

CHRISTOPHE CHAMPETIER

Petite simplification dans les groupes hyperboliques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 3, n^o 2
(1994), p. 161-221

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_2_161_0

© Université Paul Sabatier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Petite simplification dans les groupes hyperboliques^(*)

CHRISTOPHE CHAMPETIER⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous donnons une preuve complète de l'affirmation par M. Gromov que le quotient de tout groupe hyperbolique par des éléments satisfaisant une condition de petite simplification est encore hyperbolique. Cela nous amène à définir une notion de volume dans les espaces métriques et, suivant Gromov, à étudier les propriétés du flot géodésique agissant sur un groupe hyperbolique.

ABSTRACT. — In this paper, we give a complete proof of the statement of M. Gromov that the quotient of any hyperbolic group by elements which satisfy some "small cancellation" property is still hyperbolic. This leads us to define a notion of volume in general metric spaces and, following M. Gromov, to study properties of the geodesic flow acting on hyperbolic groups, as compared to the case of negatively curved manifolds.

1. Introduction

En 1912, M. Dehn montre que la présentation standard $\langle X \mid r \rangle$ du groupe fondamental de toute surface compacte orientable admettant une métrique riemannienne à courbure strictement négative possède la propriété suivante : tout mot réduit du groupe libre $L(X)$ trivial dans cette présentation contient comme sous-mot d'un conjugué cyclique du relateur r ou de r^{-1} , de longueur strictement supérieure à la moitié de la longueur de r . En particulier, cela fournit un algorithme qui détermine si un mot du groupe libre est trivial ou non dans le groupe quotient. Ce fait a été généralisé au quotient d'un

(*) Reçu le 22 novembre 1993

(1) Université de Grenoble 1, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. (U.R.A. 188), B.P. 74, F-38402 Saint-Martin-d'Hères (France)
Ce travail a été effectué lorsque l'auteur était à l'École Normale Supérieure de Lyon, U.M.R. 128 du C.N.R.S.

groupe libre par des éléments r_1, \dots, r_k vérifiant une hypothèse de “petite simplification” (la condition $C'(1/6)$, voir par exemple [LS]). L’algorithme donné par M. Dehn permet en particulier de montrer que le graphe de Cayley d’une telle présentation vérifie une inégalité isopérimétrique (pour une certaine définition de l’aire, voir [Gr1], et [Sh], [Ch2]) linéaire.

Dans [Gr3], M. Gromov extrait une propriété purement métrique, qu’il appelle *hyperbolicité*, vérifiée par les variétés riemanniennes à courbure strictement négative : l’existence d’une borne à la finesse des triangles à bord géodésique. Cette propriété est à la source de beaucoup des propriétés “à l’infini” de ces espaces. L’hyperbolicité n’est par une propriété infinitésimale, mais plutôt stable par quasi-isométrie (voir les définitions aux paragraphes 1.1 et 1.2). En particulier, un groupe de type fini sera dit hyperbolique si son graphe de Cayley pour une quelconque de ses présentations est un espace métrique hyperbolique.

Un fait notable ([Gr3], [Sh]) est que l’hyperbolicité est équivalente à l’existence d’une inégalité isopérimétrique linéaire, dans les espaces où la notion d’aire est clairement définie : les variétés riemanniennes ou des graphes de Cayley (notre proposition 3.9 généralise ce fait à tous les espaces métriques). Ainsi, M. Gromov montre que les groupes ayant une présentation à petite simplification $C'(1/6)$ sont hyperbolique ([GH], [Ch2]). En fait, tout groupe hyperbolique possède une présentation dans laquelle l’algorithme de Dehn est vérifié [Sh].

Dans [Gr3], M. Gromov montre comment généraliser la notion de petite simplification aux éléments d’un groupe hyperbolique, afin d’obtenir un résultat du type suivant : le quotient d’un groupe hyperbolique par des éléments possédant une propriété de petite simplification “relative” est encore un groupe hyperbolique. Ce fait important lui permet en particulier de construire des groupes remarquables (par exemple infinis de torsion) comme “limites” de groupes hyperboliques, cette méthode étant inspirée par A. Y. Ol’shanskii [Ol1]. Nous avons précisé et poursuivi les applications de ce résultat dans [Ch3] (voir aussi [Ol2], [Ol3]).

Le but de cet article est de préciser ces idées de M. Gromov, en particulier d’énoncer ce théorème de quotient des groupes hyperboliques par des éléments à petite simplification “relative” (théorème 5.2) et d’en écrire une preuve. Un résultat similaire a été donné indépendamment par T. Delzant [De2].

Au Paragraphe 5.5.F de [Gr3], M. Gromov montre (la preuve contenant une difficulté) qu’une inégalité isopérimétrique linéaire est vérifiée dans

une variété riemannienne à courbure négative dans laquelle on a attaché des disques sur certaines géodésiques fermées (ce qui permet d'étudier le quotient du groupe fondamental de la variété par les éléments correspondant à ces géodésiques fermées), dans le cas où ces géodésiques fermées vérifient une hypothèse de "petite simplification". Nous donnons une preuve complète de ce fait à la section 2, en montrant une propriété proche de la propriété de Dehn citée plus haut, pour les disques troués riemanniens à courbure négative.

Pour généraliser à un groupe hyperbolique sa preuve faite sur les variétés à courbure négative, M. Gromov suggère d'utiliser un espace associé au groupe hyperbolique, espace métrique sur lequel agit le "flot géodésique" du groupe : pour le groupe fondamental d'une variété riemannienne à courbure strictement négative, cet espace est, métriquement, le fibré tangent unitaire à cette variété. Nous rappelons à la section 4 la construction de M. Gromov de cet espace, et surtout l'existence d'une métrique pour laquelle il vérifiera une propriété de convergence exponentielle des géodésiques (théorème 4.13). C'est une sorte de propriété $CAT(-K^2)$ "à l'infini" : les triangles idéaux d'un tel espace sont plus "fins" que les triangles idéaux d'un plan hyperbolique à courbure constante strictement négative $-K^2$.

Auparavant, nous aurons introduit à la section 3 une notion d'aire valable pour tout espace métrique, de fait proche de la notion de *filling volume* définie par M. Gromov [Gr2], adaptée à cet espace du flot géodésique car permettant de majorer l'aire de ses triangles idéaux. De même qu'une distance n'est pas nécessairement une distance de longueur, c'est-à-dire que la distance entre deux points d'un espace métrique peut être mesurée sans qu'aucun chemin (*a fortiori* "géodésique") ne lie ces deux points, nous pouvons mesurer l'aire d'une courbe sans qu'aucune surface (*a fortiori* "minimale") ne borde cette courbe (bien sûr cela se généraliserait à une notion de volume en toute dimension). Qu'une telle quantité soit non triviale résulte du fait que le volume d'un cube (plein) muni d'une métrique riemannienne est toujours conditionné par la fonction distance sur son bord (par l'inégalité de Besicovitch, voir le lemme 3.4).

Nous conclurons à la section 5 par la preuve du théorème 5.2.

1.1 Notations

On note d_E la fonction distance d'un espace métrique E .

Soient d un réel positif, X et Y deux parties de E . On dit que X est *d-proche* de Y si tout point de X est à distance inférieure à d d'un point

de Y .

Le segment image d'un arc $g : [t, u] \rightarrow E$ tel que $g(t) = a$ et $g(u) = b$ sera noté $[a, b]_g$ ou $[a, b]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Lorsque l'arc est rectifiable, on note $\ell_E([a, b])$ sa longueur. On identifiera souvent par abus de langage, un arc et son image.

On appelle arc *géodésique* de E un arc rectifiable $g : I \rightarrow E$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , tel que pour tous x, y de I ,

$$d_E(g(x), g(y)) = |x - y|.$$

Pour tout réel τ positif, on appelle arc τ -*géodésique* de E un arc $g : I \rightarrow E$ dont la restriction à tout intervalle de la forme $[t, t + \tau]$ est géodésique. On dit que g est un arc *géodésique local*.

On appelle arc (λ, μ) -*quasi-géodésique* de E un arc rectifiable $g : I \rightarrow E$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , tel que pour tout x, y de I ,

$$\ell_E([g(x), g(y)]) \leq \lambda d_E(g(x), g(y)) + \mu.$$

Un arc géodésique est appelé *segment géodésique*, *rayon géodésique* ou *ligne géodésique* (parfois simplement *géodésique*) suivant qu'il est défini sur un intervalle fini, semi-infini ou sur \mathbb{R} .

L'espace métrique E est dit *géodésique* si, entre deux points quelconques de E , il existe un segment géodésique joignant ces deux points.

Tous les groupes Γ considérés seront discrets de type fini, rapportés à un système générateur fixé. On notera L le groupe libre sur ces générateurs.

Si X est une partie d'un groupe Γ , on note $\mathcal{N}(X)$ le sous-groupe normal de Γ engendré par X

On note Γ_{Cay} le graphe de Cayley associé à Γ et son système générateur : les sommets de Γ_{Cay} sont les éléments de Γ et on met une arête entre γ et γe pour tout élément γ de Γ et tout générateur e de Γ . En supposant les arêtes de longueur 1, cela fait de Γ_{Cay} un espace métrique de longueur.

La distance sur Γ_{Cay} sera notée d_Γ (elle induit une distance sur Γ : la métrique des mots). Ainsi l'action naturelle du groupe Γ sur Γ_{Cay} par translation à gauche est isométrique. Si γ est un élément du groupe Γ , on note $\ell_\Gamma(\gamma)$ la distance dans Γ_{Cay} entre l'élément neutre 1_{Cay} et γ . On note $B_\Gamma(r)$ la boule de rayon r du groupe Γ pour son système générateur fixé.

Un mot du groupe libre désignera toujours un mot réduit.

À un mot du groupe libre L correspond un chemin de Γ_{Cay} d'origine l'élément neutre 1_{Cay} (ou plus généralement un chemin d'origine n'importe quel sommet de Γ_{Cay}). On appelle *écriture géodésique* d'un élément γ de Γ tout mot du groupe libre de longueur minimale parmi ceux qui se projettent sur γ . Un mot du groupe libre L est dit *géodésique dans Γ* si c'est une écriture géodésique de l'élément correspondant dans Γ . De même on dit qu'un mot du groupe libre L est *minimal dans sa classe de conjugaison* dans Γ si c'est l'écriture géodésique d'un mot de Γ de longueur minimale dans sa classe de conjugaison.

On appelle *ligne* (d'origine le sommet 1_{Cay}) engendrée dans Γ_{Cay} par un mot w de L l'arc $g : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma_{\text{Cay}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g|_{[n\ell_L(w), (n+1)\ell_L(w)]}$ est l'application naturelle de cet intervalle sur le segment w de Γ_{Cay} d'origine le sommet correspondant à l'image de w^n dans Γ .

Un élément γ de Γ est dit *de torsion* s'il y engendre un groupe fini (la ligne qu'il engendre dans Γ_{Cay} est alors fermée). Un groupe est dit *sans torsion* s'il ne possède aucun élément de torsion.

1.2 Espaces et groupes hyperboliques

Toutes les définitions de ce paragraphe sont dues à M. Gromov. Soit (E, d_E) un espace métrique géodésique.

On appelle *triangle géodésique* de E la donnée T de trois points x, y, z de E et de trois segments géodésiques $[x, y]_f, [y, z]_g, [x, z]_h$ dans E . On notera ce triangle (x, y, z) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On appelle *finesse* d'un triangle géodésique le plus petit nombre d tel que tout point d'un côté de ce triangle est à distance inférieure à d de la réunion des deux autres côtés. On dira que le triangle est *d -fin*.

On dit qu'un espace métrique géodésique E est *δ -hyperbolique* si tous ses triangles géodésiques sont δ -fins. On supposera toujours $\delta \geq 1$.

On appelle *triplet central* associé à ce triangle géodésique de côtés f, g, h et d'extrémités x, y, z le triplet de points (u, v, w) tels que $u \in [x, y]_f, v \in [y, z]_g, w \in [x, z]_h$ et $d_E(x, u) = d_E(x, w), d_E(y, u) = d_E(y, v)$ et $d_E(z, v) = d_E(z, w)$.

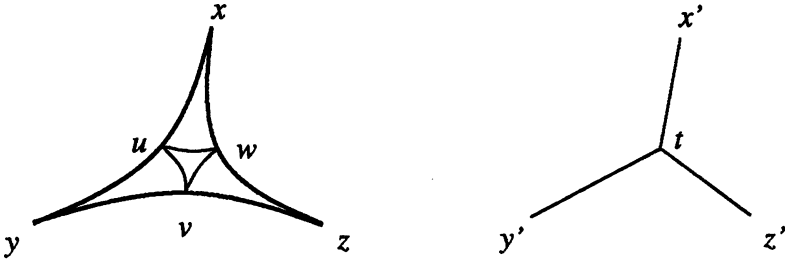


Fig. 1

Le *tripode* associé à ce triangle géodésique T est l'arbre métrique T_0 formé de trois segments $[x', t]$, $[y', t]$ et $[z', t]$ disjoints sauf en t , de longueurs respectives $d_E(x, u)$, $d_E(y, v)$ $d_E(z, w)$. On peut alors considérer l'application $\phi_T : [x, y]_f \cup [y, z]_g \cup [x, z]_h \rightarrow T_0$ qui envoie x, y et z sur x', y' et z' et qui est isométrique sur les trois côtés du triangle.

Si E est un espace métrique δ -hyperbolique, alors pour tout triangle géodésique T de E , l'application ϕ_T vérifie :

$$\text{si } \phi_T(p) = \phi_T(q) \text{ alors } d_E(p, q) \leq 2\delta$$

pour tous points p et q sur les côtés du triangle (notons que cette condition sur un triangle géodésique implique évidemment que le triangle est 2δ -fin).

Un groupe Γ de type fini muni d'un système générateur fixé est δ -hyperbolique si le graphe de Cayley Γ_{Cay} associé est δ -hyperbolique. On dira qu'un groupe est hyperbolique s'il est δ -hyperbolique pour un certain système générateur et un certain δ .

2. Une propriété de type algorithme de Dehn des disques troués riemanniens à courbure négative

On appelle disque riemannien à n trous la donnée d'une métrique riemannienne sur un disque fermé D^2 privé de n disques ouverts, ces disques étant d'adhérences deux à deux disjointes et disjointes du bord du disque D^2 .

Prenons un tel disque troué P à bord géodésique et à courbure strictement négative. Considérons le lieu des points de P dont la distance au bord du disque troué est réalisée par au moins 2 points du bord.

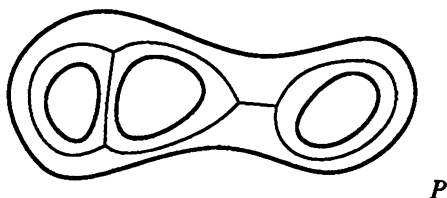


Fig. 2

La courbure de P étant strictement négative, cet ensemble est une réunion d'arcs fermés : c'est le lieu de coupure (*cut-locus*) du bord de P . Nous appellerons *épaisseur* de P la distance du bord de P à cet ensemble.

Montrons un résultat facile.

PROPOSITION 2.1. — *Soit P un disque riemannien à n trous, à bord géodésique et à courbure strictement négative, inférieure à $-K^2$. Si la longueur de chacune des composantes du bord est supérieure à $2\pi/(\varepsilon K^2) + 2\varepsilon$, alors l'épaisseur de P est inférieure à ε .*

Démonstration. — Par le théorème de Gauss-Bonnet, l'aire du disque troué P est inférieur à $2(n-1)/K^2$.

Si l'épaisseur de P est supérieure à ε , les ε -voisinages des $n+1$ composantes du bord sont deux à deux disjoints. L'inégalité de Besikovitch (lemme 3.4) montre que chacun de ces voisinages a une aire supérieure à $2\pi/K^2$, ce qui est impossible. \square

Nous allons affiner cet argument d'aire, en utilisant un argument combinatoire proche des idées de petite simplification ([LS], [Ch1]).

Tout d'abord rappelons une définition de pièce des composantes du bord d'un disque troué riemannien P à courbure strictement négative donnée par M. Gromov [Gr3, § 5.5.F]. Une illustration de cette définition est donnée par la figure 27.

DÉFINITION 2.2. — *Soit P un disque riemannien à n trous, à bord géodésique et à courbure strictement négative. Appelons t_0, \dots, t_n les composantes du bord de P . Soit d un réel positif. On appelle d -pièce de t_i , relativement à t_j , pour $i, j \in \{0 \dots p\}$ éventuellement confondus, une partie connexe c de t_i telle que tout relevé \tilde{c} de c , sur une composante \tilde{t}_i du relevé de t_i , dans le revêtement universel \tilde{P} de P est uniformément d -proche dans \tilde{P} d'une composante de $\partial\tilde{P} - \tilde{t}_i$ relevée de t_j .*

Notons qu'à une d -pièce de t_i relativement à t_j correspond une d -pièce de t_j relativement à t_i . On dira (par abus de langage) que t_i et t_j partagent une d -pièce.

Dans le disque troué P , une d -pièce de t_i relativement à t_j , pour $i \neq j$, se caractérise par deux segments c_i sur t_i et c_j sur t_j uniformément d -proches dans P . Une d -pièce de t_i relativement à lui-même se caractérise par deux segments disjoints c_i et c'_i sur t_i uniformément d -proches.

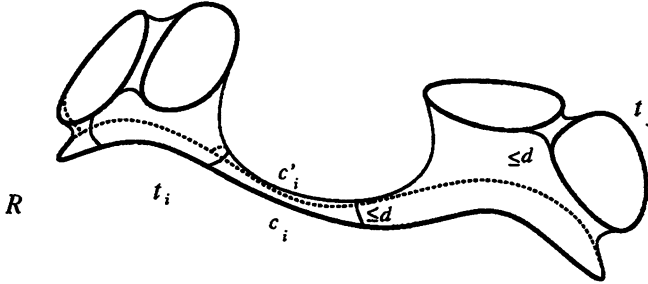


Fig. 3

Notons $\ell_P(c)$ la longueur d'un arc c dans P . Nous pouvons alors énoncer la proposition 2.3.

PROPOSITION 2.3. — Soit P un disque riemannien à n trous, $n \geq 2$, à bord géodésique et à courbure strictement négative, inférieure à $-K^2$. Soit $\kappa > 100$.

Supposons que toute 1-pièce d'une composante t_i , relativement à une composante t_j , pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, est de longueur inférieure à $\ell_P(t_i)/\kappa$. Supposons de plus que toute composante t_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, est de longueur supérieure à $\sup\{24 \pi \kappa / K^2, 100 \kappa\}$.

Alors au moins deux composantes t_{i_1} et t_{i_2} , avec $i_1, i_2 \geq 1$, partagent avec la composante t_0 dans P une 1-pièce, de longueurs supérieures respectivement à $\ell_P(t_{i_1})(\kappa - 8)/\kappa$ et $\ell_P(t_{i_2})(\kappa - 8)/\kappa$.

Démonstration. — Tout d'abord comme pour la proposition précédente, le théorème de Gauss-Bonnet montre que :

$$\text{aire}(P) \leq \frac{2(n-1)\pi}{K^2}. \tag{1}$$

Pour minorer l'aire de P , nous allons étudier le 1-voisinage des composantes t_1, \dots, t_n du bord de P . Nous allons maintenant construire le graphe \mathcal{G}_P des 1-pièces de P . Les sommets de \mathcal{G}_P sont les t_i pour $i \geq 1$.

Considérons pour chaque composante du bord de P son lieu de coupe. C'est une courbe dont le complémentaire est une réunion de $(n+1)$ anneaux ouverts, correspondant aux lieux W_i des points de P plus proches d'un point de t_i que de tous les autres.

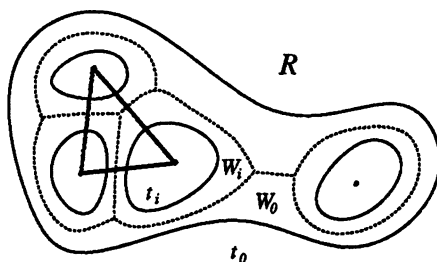


Fig. 4

Ces courbes définissent un graphe planaire \mathcal{D} . Notons \mathcal{D}^* le dual de ce graphe : il y aura une arête entre t_i et t_j dans \mathcal{D}^* là où $\overline{W_i}$ et $\overline{W_j}$ s'intersectent sur une portion de courbe. Définissons \mathcal{G}_P comme le sous-graphe de \mathcal{D}^* obtenu en ôtant le sommet correspondant à t_0 et en ne conservant une arête entre t_i et t_j de \mathcal{D}^* que si la portion de courbe correspondante sur $\overline{W_i} \cap \overline{W_j}$ intersecte les $1/2$ -voisinages de t_i et de t_j .

À une arête entre t_i et t_j dans \mathcal{G} correspond donc naturellement une 1-pièce entre t_i et t_j .

Nous appellerons graphe planaire un graphe plongé dans le plan. Une face intérieure (resp. extérieure) du graphe sera une composante bornée (resp. non bornée) du complémentaire du graphe dans le plan.

Le lemme suivant est une version plus générale des lemmes classiques de petite simplification [Ch2, § 3.1.1].

LEMME 2.4. — *Dans un graphe planaire dont toutes les faces intérieures ont au moins 3 sommets sur leurs bords, le nombre de sommets est majoré par 6 fois le nombre de sommets de degré inférieur à 6.*

Démonstration. — Notons \mathcal{G} un graphe comme dans le lemme. On peut, en lui rajoutant des arêtes, trianguler ses faces intérieures et faire en sorte que le bord de la face extérieure soit une courbe simple, sans modifier l'ensemble des sommets sur la face extérieure. Cette opération ne fait qu'augmenter le degré des sommets du graphe. Notons \mathcal{G}' le graphe ainsi obtenu, et s son nombre de sommets, a son nombre d'arêtes et f son nombre de faces intérieures. On a donc $s - a + f = 1$.

En comptant le nombre de couples (face F de \mathcal{G}' , arête adjacente à F), on obtient $3f = 2a - s_{\text{ext}}$ où on note s_{ext} le nombre de sommets sur la face extérieure de \mathcal{G}' . Cela fait $3s - s_{\text{ext}} = 3 + a$.

Notons s_i , $s_{\leq i}$ et $s_{\geq i}$ le nombre de sommets de degré i , $\leq i$ et $\geq i$ dans le graphe \mathcal{G}' . En comptant le nombre de couples (arête A de \mathcal{G}' , sommet adjacent à A), on obtient :

$$2a \geq 7s_{\geq 7} + 6s_6 + 5s_5 + 4s_4 + 3s_3 + 2s_2 + s_1.$$

D'où

$$6s - 2s_{\text{ext}} \geq 6 + 7s_{\geq 7} + 6s_6 + 5s_5 + 4s_4 + 3s_3 + 2s_2 + s_1$$

et en particulier

$$6s \geq 7s_{\geq 7} + 6s_6 + 5s_5 + 4s_4 + 3s_3 + 2s_2 + s_1.$$

Cela montre que

$$s_6 + 2s_5 + 3s_4 + 4s_3 + 5s_2 + 6s_1 \geq s.$$

Or cette inégalité, vérifiée dans le graphe \mathcal{G}' , est aussi vraie dans le graphe \mathcal{G} , car diminuer les degrés des sommets du graphe sans changer les sommets sur la face extérieure ne fait que renforcer l'inégalité. Le lemme est montré. \square

Nous allons appliquer ce lemme au graphe \mathcal{G}_P . Supposons donc dans un premier temps qu'aucune composante du bord t_i , $i \neq 0$, ne partage de 1-pièce avec lui-même, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boucle dans le graphe \mathcal{G}_P , et que deux composantes distinctes du bord t_i et t_j pour $i, j \geq 1$ partagent au plus une 1-pièce dans P , c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'arête multiple dans \mathcal{G}_P .

Supposons que toute composante t_i , $i \neq 0$, partage au plus une 1-pièce avec t_0 de longueur inférieure à $(\kappa - 7)/\kappa$ fois sa longueur. Alors, l'inégalité de Besicovitch (lemme 3.4) montre que le 1-voisinage W_i d'une composante t_i , $i \geq 1$, de degré inférieur à 6 dans le graphe \mathcal{G}_P a une aire supérieure à

$$\left(1 - \frac{\kappa - 7}{\kappa} - \frac{6}{\kappa}\right) \ell_P(t_i) - 14 \geq \frac{\ell_P(t_i)}{2\kappa}.$$

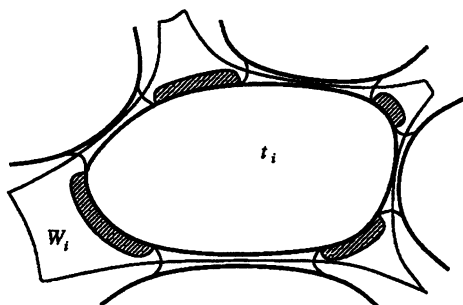


Fig. 5

Le nombre de composantes t_i , avec $i \geq 1$, de degré inférieur à 6 dans \mathcal{G}_P étant supérieur à $n/6$ et comme $\ell_P(t_i) \geq 12\pi\kappa/K^2$, l'aire de R est alors supérieure à

$$\frac{n}{6} \frac{12\pi\kappa}{K^2} \frac{1}{2\kappa}$$

et cela contredit l'inégalité (1).

Cela montre qu'au moins une composante t_i , avec $i \geq 1$, partage plus de $(\kappa - 7)/\kappa$ de son bord en une seule pièce avec t_0 , ou bien partage plusieurs pièces avec t_0 . Dans le premier cas, la composante t_i satisfait la propriété cherchée. Si on est dans le deuxième cas, nous allons trouver une composante (*extrémale*) du bord de P qui partage avec t_0 une 1-pièce de longueur plus grande que $\ell_P(t_i)(\kappa - 8)/\kappa$. Pour cela, on procède comme suit (voir un raisonnement similaire dans [Ch2, § 3.3]).

On prend une composante t_{i_0} du bord de P qui partage plusieurs 1-pièces avec t_0 . On coupe le disque troué P selon deux segments de longueur au plus 1 joignant les extrémités d'un sous-segment de t_{i_0} à celles d'un sous-segment de t_0 , les intérieurs de ces deux sous-segments ne partageant pas de 1-pièce dans P .

On notera P' le disque troué ainsi obtenu et t'_0 la composante de son bord formée des deux segments de longueur 1 et des deux sous-segments de t_{i_0} et t_0 dans P .

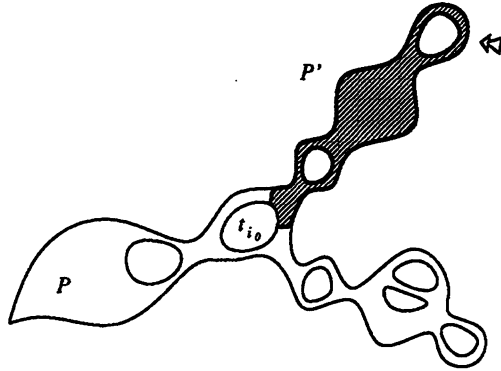


Fig. 6

Le raisonnement précédent s'applique alors à P' (il faut adapter le lieu de coupure et le calcul d'aire au niveau des deux segments de longueur 1 qui rendent la composante t'_0 géodésique par morceaux). Il existe donc une composante, autre que t'_0 , du bord de P' qui partage avec t'_0 une 1-pièce de longueur supérieure à $\ell_P(t_i)(\kappa - 7)/\kappa$. Cette composante du bord de P' est une composante t_i du bord de P pour $i \geq 1$. Comme t_i ne peut partager une 1-pièce de longueur supérieure à $1/\kappa$ fois la longueur de son bord avec t_{i_0} , elle partage au moins $(\kappa - 8)/\kappa$ de son bord avec t_0 . Si t_i n'a qu'une pièce avec t_0 , elle convient. Sinon elle partage plusieurs pièces avec t_0 .

En itérant ce procédé, on trouve au moins une composante du bord de P qui partage une 1-pièce de longueur plus grande que $(\kappa - 8)/\kappa$ fois sa longueur avec t_0 . En coupant le disque troué P le long de deux segments de longueur 1 au bord de cette pièce (le reste n'est pas vide car $n \geq 2$), le même raisonnement permettrait de trouver une deuxième composante du bord qui possède une grande pièce avec t_0 .

La proposition est ainsi montrée dans le cas où le graphe des pièces n'a ni boucle ni arête multiple. Il reste à éliminer le cas où une composante t_i du bord de P partage une 1-pièce avec lui-même et le cas où deux composantes distinctes t_i et t_j ($i, j \geq 1$) partagent deux 1-pièces entre elles. Mais, il est maintenant clair que cela est impossible : par exemple dans le premier cas, en coupant le disque troué P le long d'un segment de longueur au plus 1 joignant deux points de la composante t_i , le même raisonnement que précédemment montrerait qu'une composante t_j partage avec t_i une 1-pièce de longueur supérieure à $\ell_R(t_j)/\kappa$, ce qui est impossible. \square

3. Aire dans les espaces métriques

Nous développons dans cette section une notion de surface (2-variété) et d'aire "abstraitement" sous-tendue par une courbe (ou une famille de courbes) dans un espace métrique quelconque. Cela permettra de mesurer dans l'espace du flot géodésique d'un groupe hyperbolique (défini à la section 4) l'aire des triangles idéaux, qui ne bordent a priori pas de disques dans cet espace (comparer avec [Gr3, § 6.8]). Il nous a été signalé que cette définition (donnée par la dimension 1 et en fixant la topologie de la variété bordante), inspirée par les idées de [Gr3, § 5.5.F], formalise de fait la notion de *filling volume* défini par M. Gromov dans [Gr2, § 2].

3.1 Définition de l'aire et propriétés

Soit (E, d_E) un espace métrique. On note S^1 un cercle topologique. Un lacet t de E est une application continue de S^1 dans E .

Fixons une sphère topologique de dimension deux à n trous $S_{(n)}$, c'est-à-dire une sphère de dimension deux privée de n disques ouverts d'adhérences disjointes.

DÉFINITION 3.1. — *On appelle multicourbe à n composantes (ou n -courbe) de E une application continue rectifiable P du bord de $S_{(n)}$ dans E , c'est-à-dire de la réunion disjointe $S(P) = S_1 \cup \dots \cup S_n$ de n copies de S^1 dans E .*

On notera t_i la restriction de P à S_i . On appellera *composante* de P (resp. de $\text{Im}(P)$) un lacet (resp. l'image d'un lacet) t_i .

Appelons sphère riemannienne à n trous la donnée d'une métrique riemannienne sur $S_{(n)}$. Si R est une sphère riemannienne trouée, son bord ∂R est l'image d'une multicourbe de R .

Notons que $\text{Im}(P)$ est muni de la distance d_P induite par la métrique de E . De plus, chaque composante de $\text{Im}(P)$ est munie de la distance donnée par la longueur d'arc le long du lacet correspondant : nous l'appellerons distance de longueur sur cette composante.

DÉFINITION 3.2. — *Soit $P : \partial S_{(n)} \rightarrow E$ une n -courbe simple de E . On note \mathcal{R} l'ensemble des sphères riemanniennes R à n trous (c'est-à-dire des métriques riemanniennes sur $S_{(n)}$) pour lesquelles l'homéomorphisme $P : \partial R \rightarrow E$ est 1-lipschitzien (pour les métriques induites).*

On définit alors l'aire sous-tendue par P comme :

$$\text{aire}(P) = \inf_{R \in \mathcal{R}} \text{aire}(R).$$

Notons que cette aire ne dépend pas du paramétrage, en particulier de l'orientation, des lacets de P , mais seulement de leurs images.

L'ensemble \mathcal{R} de la définition n'est pas vide, puisqu'il contient une sphère euclidienne de rayon assez grand privée de n disques de rayons adéquats. En particulier cela prouve qu'une courbe fermée de longueur ℓ sous-tend une aire inférieure à $\ell^2/2\pi$ (prendre la demi-sphère euclidienne de rayon $\ell/2\pi$).

On dira qu'une sphère trouée riemannienne de \mathcal{R} est *sous-tendue* par P et de l'application P qu'elle est *sous-tendante*.

Remarque. — Soulignons que l'application P n'est définie que sur le bord de la sphère trouée riemannienne R et ne demande pas à être prolongée à l'intérieur de R . L'aire sous-tendue par une multicourbe d'un espace métrique ne dépend que de la multicourbe et de sa métrique induite, et pas de l'espace dans laquelle elle est plongée.

Pour $n \geq 2$, on dira qu'une n -courbe P est non triviale si son image contient au moins un point appartenant à une seule composante de $\text{Im}(P)$. On dira qu'un lacet est non trivial s'il contient un point simple.

PROPOSITION 3.3. — *Une multicourbe non triviale sous-tend une aire non nulle.*

Plus précisément, soit P une multicourbe et $[a, b]$ un segment sur l'une des composantes de $S(P)$ correspondant à un lacet t . On note $\ell = d_P(t(a), t(b))$. Supposons que pour un réel $e > 0$, le e -voisinage du segment $[t(a), t(b)]$ dans $\text{Im}(t)$ ne contient que des points de $\text{Im}(t)$ à distance de longueur (sur $\text{Im}(t)$) inférieure à e de $[a, b]$. On suppose de plus que $\ell + 2e$ est inférieur à la longueur de t . Alors :

$$\text{aire}(P) \geq e(\ell - 2e).$$

Démonstration. — Pour montrer cela, on va utiliser le lemme suivant généralisant (légèrement) l'inégalité de Besicovitch.

LEMME 3.4. — *Soit C le carré $I \times I$ de \mathbb{R}^2 privé d'un nombre fini de disques ouverts disjoints $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. On suppose C muni d'une métrique*

riemannienne. On note d_1 (resp. d_2) la distance entre les deux côtés verticaux $\{0\} \times [0, 1]$ et $\{1\} \times [0, 1]$ (resp. horizontaux). On suppose de plus que les bords des disques Δ_i sont à distance plus grande que d_1 du bord $\{0\} \times [0, 1]$. Alors :

$$\text{aire}(C) \geq d_1 \cdot d_2 .$$

L'inégalité de Besicovitch montre ce lemme dans le cas où le carré est sans trou. Notons que les hypothèses de ce lemme portent uniquement sur les propriétés métriques du bord du disque troué riemannien C . Il peut donc être énoncé dans le cadre général des multicourbes. Nous allons adapter la preuve du théorème 38.1.1 de [BZ] (voir aussi [Gr1, § 4.6]) pour ce lemme.

Démonstration. — On note I_1 et I_2 les côtés $\{0\} \times [0, 1]$ et $[0, 1] \times \{0\}$ de C . On note ρ la métrique sur C et μ la métrique euclidienne standard de \mathbb{R}^2 .

On considère l'application :

$$\begin{aligned} \phi : (C, \rho) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mu) \\ x &\longrightarrow (\phi_1(x), \phi_2(x)) \end{aligned}$$

où $\phi_i = \inf\{d_i, d_C(x, I_i)\}$.

D'après l'inégalité triangulaire, les applications ϕ_i sont 1-lipschitzienne et donc presque partout différentiable. De plus :

$$\|\text{grad}_\rho \phi_1\| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|\text{grad}_\rho \phi_2\| \leq 1 .$$

Donc le jacobien $J_\phi(x)$ est inférieur à 1 pour presque tout x dans C . Ceci montre :

$$\text{aire}_\rho(C) \geq \text{aire}_\mu(\phi(C)) .$$

Notons $D = [0, d_1] \times [0, d_2]$. On a $\phi(C) \subset D$, et on va montrer l'égalité, ce qui conclura.

Supposons par l'absurde qu'il existe un point a de D qui n'est pas dans $\phi(C)$. L'application ϕ définit un morphisme $\phi_* : \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(D \setminus a)$.

L'hypothèse du lemme fait que ∂C s'envoie dans ∂D par ϕ . De plus pour tout i , $\partial \Delta_i$ ne rencontre pas le côté $\{0\} \times [0, d_2]$ de D . Donc l'image par ϕ_* de la classe d'homotopie de $\partial \Delta_i$ est nulle dans $\pi_1(D \setminus a)$. Or $\phi : \partial(I \times I) \rightarrow \partial D$ est le degré 1, donc $\phi_*([\partial(I \times I)])$ est non nulle dans $\pi_1(D \setminus a)$. C'est absurde. \square

Plaçons-nous maintenant dans les conditions de la proposition. Notons $t(a')$ et $t(b')$ les points à distance e de $t(a)$ et $t(b)$ sur t . Soit R une sphère trouée riemannienne sous-tendue par P . On note $[x, y]$ l'image inverse de $[a, b]$ dans ∂R par l'application sous-tendante P . Comme P est 1-lipschitzienne, tout point du segment $[x, y]$ est à distance supérieure à e des autres composantes du bord ∂R . Pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on choisit dans le domaine $\{u \in R \mid \lambda e < d(u, [x, y]) < e\}$ (qui déconnecte R) une réunion d'arcs, dont un arc $[x', y']$ d'extrémités sur t , qui déconnecte R .

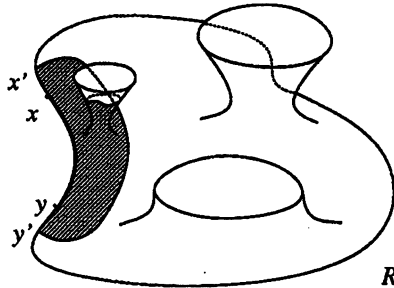


Fig. 7

Les deux côtés $[x, x']$ et $[y, y']$ du carré (éventuellement troué) (x, y, y', x') sont à distance minorée par la distance entre $[t(a), t(a')]$ et $[t(b), t(b')]$ dans P , qui est supérieure à $\ell - 2e$. Le lemme précédent permet alors de minorer l'aire de R par $\lambda e(\ell - 2e)$. On fait alors tendre λ vers 1 et la proposition est montrée. \square

Remarque. — Dans la définition de l'aire d'une multicourbe P , nous nous sommes restreint à la famille des sphères trouées riemanniennes bordant P . Ces sphères trouées sont des variétés à bord, dont les composantes du bord sont supposés C^∞ . En recollant deux sphères trouées riemanniennes le long d'un segment de leurs bords (de même longueur dans les deux sphères trouées), on obtient une sphère trouée dont l'intérieur est muni d'une métrique riemannienne par morceaux, à bord C^∞ par morceaux. Mais il est clair que si on élargit, dans la définition de l'aire d'une multicourbe, la classe des métriques riemanniennes sur $S_{(n)}$ à la classe des métriques riemanniennes par morceaux sur $S_{(n)}$ (dont le bord sera C^∞ par morceaux), cela ne modifie pas l'aire sous-tendue par la multicourbe.

De plus, nous pouvons supposer que l'homéomorphisme P est une isométrie pour les distances de longueur sur chaque composante connexe de ∂R et de $\text{Im}(P)$. En effet, en collant à une sphère trouée de \mathcal{R} , sur chaque composante ∂R_i de son bord correspondant à une composante S_i de $S(P)$,

un anneau d'épaisseur ε dont chaque méridien est géodésique, les longueurs des deux méridiens du bord étant celles de ∂R_i et de S_i , on obtient une nouvelle sphère trouée, munie d'une métrique riemannienne par morceaux, et pour laquelle on peut clairement définir une application P' de son bord sur $\text{Im}(P)$, isométrique pour les distances de longueur et 1-lipschitzienne pour les métriques induites. Comme l'aire des anneaux ajoutés tend vers 0 quand ε tend vers 0, ceci montre notre affirmation.

Cette remarque sera utilisée dans le lemme suivant, qui montre la sous-additivité de l'aire.

LEMME 3.5. — Soient P et P' deux multicourbes d'un espace métrique E , formées des lacets t_1, \dots, t_n et t'_1, \dots, t'_m avec

$$S(P) = S_1 \cup \dots \cup S_n \quad \text{et} \quad S(P') = S'_1 \cup \dots \cup S'_m.$$

Supposons qu'il existe des segments connexes p de S_1 et p' de S'_1 tels que $P(p) = P'(p')$. On note S le cercle (éventuellement "vide") obtenu par recollement de $S_1 \setminus p$ et $S'_1 \setminus p'$ en leurs extrémités, t le lacet défini (à orientation près) sur S par t_1 et t'_1 et $P \cup_{p,p'} P'$ la multicourbe formée des lacets $t, t_2, \dots, t_n, t'_2, \dots, t'_m$. Alors :

$$\text{aire} \left(P \cup_{p,p'} P' \right) \leq \text{aire}(P) + \text{aire}(P').$$

Démonstration. — Pour $\varepsilon > 0$, prenons deux sphères trouées riemanniennes R et R' calculant l'aire de P et P' à ε près, telles que les composantes des bords de R et R' se plongent isométriquement, pour les distances de longueur, dans E . On considère la sphère trouée M obtenue en recollant R et R' sur les segments (isométriques) correspondant à p et p' .

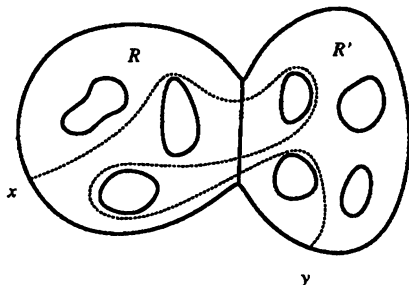


Fig. 8

On munit M de la métrique riemannienne par morceaux obtenue par recollement des métriques de R et R' . Les images dans E des composantes de $S(P \bigcup_{p,p'} P')$ et les composantes du bord de M , se correspondent, isométriquement pour leurs métriques de longueur, par une application f obtenue par recollement des applications sous-tendantes P et P' . Il reste à montrer que cette application f est 1-lipschitzienne, pour les métriques induites, de ∂M sur $\text{Im}((P \bigcup_{p,p'} P'))$.

Considérons donc deux points x et y du bord de M . Comme la métrique sur M est une métrique de longueur, il existe un chemin c dans M réalisant leur distance. Quitte à rallonger l'arc c d'au plus ε , nous pouvons supposer que c coupe $R \cap R'$ en un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_n .

Les restrictions de f à ∂R et $\partial R'$ étant 1-lipschitziennes,

$$d_{P \cup_{p,p'} P'}(f(x_i), f(x_{i+1})) \leq \ell([x_i, x_{i+1}]_c)$$

et l'inégalité triangulaire dans $\text{Im}(P \bigcup_{p,p'} P')$ montre que

$$d_{P \cup_{p,p'} P'}(f(x), f(y)) \leq \ell_M(c) \leq d_M(x, y) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, ceci montre le lemme. \square

Maintenant supposons que l'on ait une sphère riemannienne à n trous R , par exemple à courbure constante -1 . Pour calculer son aire, on recouvre R par $2(n-2)$ triangles idéaux, dont l'aire est π . On va adapter au cadre général des multicourbes le découpage en triangles idéaux. Pour cela on va définir ce qu'est un triangle idéal (et son aire) dans un espace métrique.

DÉFINITION 3.6. — On appelle triangle idéal T de E la donnée de trois arcs rectifiables $t_1, t_2, t_3 : \mathbb{R} \rightarrow E$, tels que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} d_E(t_i(u), t_{i+1}(-u)) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

On appelle ces arcs les côtés de T .

On dira des arcs t_i et t_{i+1} qu'ils sont *asymptotes* (rappelons que le paramétrage des arcs n'intervient pas sur l'aire).

Pour définir l'aire de ces triangles, on procède ainsi. Pour tout $\varepsilon > 0$, on restreint les arcs t_i à des segments finis minimaux (pour l'inclusion) tels qu'en dehors de ces intervalles, l'image de chacun des arcs t_i est dans le ε -voisinage des autres arcs.

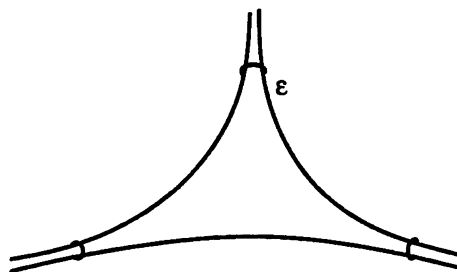


Fig. 9

On considère alors l'espace métrique E_ϵ formé de la réunion de ces trois portions d'arcs et de trois segments (disjoints de E) de longueur adéquate (inférieure à ϵ) dont les extrémités sont les extrémités des courbes. On prend comme métrique sur E_ϵ la métrique engendrée par la métrique de T sur les portions de courbes et la métrique de longueur sur les trois segments rajoutés. Ceci définit un lacet T_ϵ dont l'image est E_ϵ .

Il est clair que l'aire sous-tendue par T_ϵ croît quand ϵ décroît. On pose

$$\text{aire}(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{aire}(T_\epsilon).$$

Montrons maintenant comment recouvrir une multicourbe par des triangles idéaux. Un lacet sera vu dans cette définition comme une application de \mathbb{R} dans E périodique.

DÉFINITION 3.7. — Soit P une n -courbe formée des lacets t_1, \dots, t_n . Un découpage de P en triangles idéaux est la donnée de :

- une triangulation combinatoire de la sphère orientée S^2 en $2(n-2)$ triangles et n sommets x_1, \dots, x_n , chaque sommet étant muni d'un signe ;
- pour chaque triangle (x_i, x_j, x_k) de cette triangulation, un triangle idéal dont les côtés sont asymptotes aux lacets t_i, t_j, t_k de P , en $+\infty$ si le signe est positif, $-\infty$ sinon (fig. 10).

Un tel découpage se résume donc par la donnée de $2(n-2)$ triangles idéaux T_1, \dots, T_n asymptotes aux lacets de P .

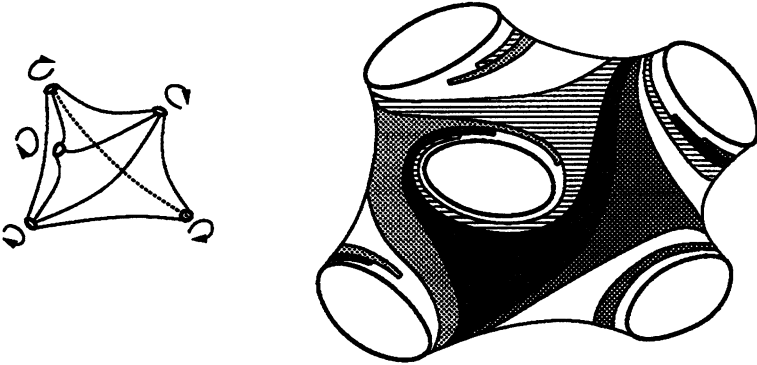


Fig. 10

On montrerait alors facilement le lemme suivant.

LEMME 3.8. — *Soit P une n -courbe et $T_1, \dots, T_{2(n-2)}$ un découpage de P en triangle idéaux. Alors :*

$$\text{aire}(P) \leq \text{aire}(T_1) + \dots + \text{aire}(T_{2(n-2)}).$$

3.2 Espaces métriques hyperboliques

Pour conclure, nous remarquons l'équivalence pour un espace métrique géodésique entre être hyperbolique et satisfaire une inégalité isopérimétrique linéaire.

Nous nous contenterons essentiellement d'adapter des preuves déjà existantes dans le cadre combinatoire des groupes hyperboliques (voir [CDP] pour le lemme 3.10 et [Sh] pour le lemme 3.11).

PROPOSITION 3.9. — *Soit (E, d_E) un espace métrique géodésique. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) E est hyperbolique ;
- ii) il existe une constante C telle que pour toute courbe fermée rectifiable t de E , on ait :

$$\text{aire}(t) \leq C \ell_E(t).$$

Le rapport entre la constante d'hyperbolicité et la constante d'isopérimétrie sera précisé dans les deux lemmes suivants qui montrent le théorème.

LEMME 3.10. — Si E est δ -hyperbolique, alors la propriété ii) de la proposition 3.9 est vraie avec $C = 20\delta$.

Démonstration. — Rappelons qu'une courbe de E de longueur inférieure à ℓ sous-tend une aire inférieure à $\ell^2/2\pi$. En particulier, une courbe de longueur inférieure à 11δ dans E sous-tend une aire inférieure à $20\delta^2$.

Nous supposons $\delta > 0$, le cas $\delta = 0$ étant trivial (les espaces 0-hyperboliques sont des arbres).

Prenons une courbe fermée t dans E et choisissons un point base x sur t . On va montrer $\text{aire}(t) \leq 20\delta\ell_E(t)$ par récurrence sur la partie entière de $\ell_E(t)/\delta$. L'inégalité est vraie si $\ell_E(t) \leq 6\delta$. On suppose donc

$$\ell_E(t) > 6\delta.$$

Considérons le point y sur t à distance maximale de x .

Si l'un des deux segments joignant x à y sur t est de longueur inférieure à 3δ , l'autre est alors de longueur supérieure à 3δ . Et on prend le point y' sur ce segment à distance 3δ de y le long de t , et on coupe le lacet t en deux lacets par un segment géodésique joignant x à y' . Par le choix de y , ce segment est de longueur au plus 3δ . On a donc obtenu deux lacets, l'un de longueur au plus 6δ , l'autre de longueur inférieure à $\ell_E(t) - 3\delta$. Le second, par hypothèse de récurrence, sous-tend une aire inférieure à $20\delta(\ell_E(t) - 3\delta)$ et le premier sous-tend une aire inférieure à $60\delta^2$. Le lemme 3.5 conclut.

Si les deux segments joignant x à y sur t sont de longueur supérieure à 3δ , on considère les deux points y' et y'' sur t tels que les segments qui les joignent à y sont de longueur 3δ . Alors

$$d_E(y', y'') \leq 5\delta.$$

En effet dans le quadruplet (x', y, y', y'') , nous avons ([Gr3], [GH], [CDP]) :

$$\begin{aligned} d_E(y', y'') + d_E(x, y) &\leq \\ &\leq \sup\{d_E(x, y') + d_E(y, y''), d_E(x, y'') + d_E(y, y')\} + 2\delta \end{aligned}$$

et par hypothèse

$$d_E(x, y) \geq \sup\{d_E(x, y'), d_E(x, y'')\}$$

et

$$3\delta \geq \sup\{d_E(y, y'), d_E(y, y'')\}.$$

On prend alors un arc géodésique joignant y' et y'' et on coupe le lacet t en deux le long de cet arc. L'un des lacets obtenus est de longueur inférieure à $\ell_E(t) - \delta$ et l'hypothèse de récurrence s'applique : il sous-tend une aire inférieure à $20\delta(\ell_E(t) - \delta)$. L'autre est de longueur inférieure à 11δ et il sous-tend une aire inférieure à $20\delta^2$. L'inégalité cherchée est vérifiée. \square

LEMME 3.11. — *Supposons la propriété ii) de la proposition 3.9 vérifiée dans E . Alors E est δ -hyperbolique avec $\delta = 24C$.*

Démonstration. — Considérons un triangle géodésique d'extrémités (a, b, c) dans E . Notons δ sa finesse.

Il existe donc un point x sur un côté du triangle, par exemple $[a, b]$, à distance δ de la réunion des autres côtés.

On considère alors les points a_1, b_2 sur le côté $[a, b]$ tels que $x \in [a_1, b_2]$ et

$$\begin{aligned} d_E(a_1, [a, c] \cup [b, c]) &= d_E(b_2, [a, c] \cup [b, c]) \\ &= d_E([a_1, b_2], [a, c] \cup [b, c]) = \frac{\delta}{6} \end{aligned}$$

(ces points existent par le choix de δ). Puis on prend a_2 et b_1 sur $[a, c] \cup [b, c]$ qui réalisent les distances précédentes. On supposera pour simplifier que $a_2 \in [a, c]$ et $b_1 \in [b, c]$, les cas dégénérés se traitant de la même façon. Remarquons que $d_E(a_2, b_1) \geq 4\delta/3$. On prend alors c_1 sur $[a, c]$ et c_2 sur $[b, c]$ tels que $d_E(c_1, c_2) = \delta/6$ et l'hexagone ainsi formé par les points a_i, b_i et c_i est le périmètre minimal : cela garantit que les trois côtés de cet hexagone sur les côtés du triangle (a, b, c) sont deux à deux à distance supérieure à $\delta/6$.

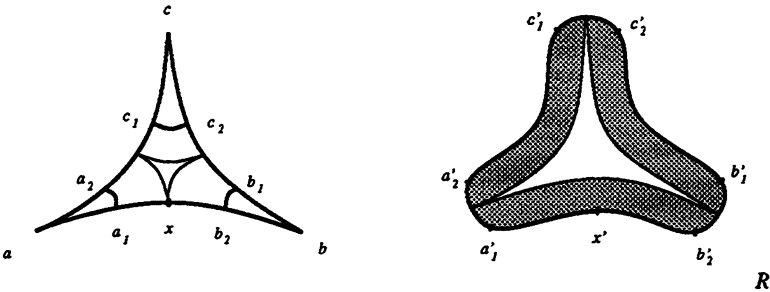


Fig. 11

Considérons maintenant un disque riemannien R qui calcule l'aire de cet hexagone à ε près, pour $\varepsilon > 0$ donné. On notera a'_i, b'_i, c'_i les points de ∂R correspondant aux a_i, b_i, c_i .

Notons que x est sur le côté $[a_1, b_2]$ de l'hexagone, et la longueur ℓ_c de ce côté est donc au moins $10\delta/6$. Nous noterons ℓ_a et ℓ_b les longueurs des deux autres côtés similaires.

La propriété ii) montre que :

$$\text{aire}(R) \leq C \left(\ell_a + \ell_b + \ell_c + \frac{\delta}{2} \right) + \varepsilon.$$

Nous allons minorer l'aire de R avec l'inégalité de Besicovitch. En effet, considérons dans R le $\delta/12$ -voisinage des segments géodésiques $[a'_1, b'_2]$, $[a'_2, c'_1]$ et $[b'_1, c'_2]$ de ∂R . Par hypothèse ils sont disjoints. Mais, il est clair qu'ils ont respectivement une aire supérieure à

$$\left(\ell_a - \frac{\delta}{6} \right) \frac{\delta}{12}, \quad \left(\ell_b - \frac{\delta}{6} \right) \frac{\delta}{12} \quad \text{et} \quad \left(\ell_c - \frac{\delta}{6} \right) \frac{\delta}{12}.$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons ainsi :

$$\left(\ell_a + \ell_b + \ell_c - \frac{\delta}{2} \right) \frac{\delta}{12} \leq C \left(\ell_a + \ell_b + \ell_c + \frac{\delta}{2} \right).$$

Or $\ell_c \geq 10\delta/6$ implique

$$\ell_c - \frac{\delta}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\ell_c + \frac{\delta}{2} \right).$$

D'où le lemme. \square

4. Le flot géodésique d'un groupe hyperbolique

Dans ce paragraphe, Γ désigne un groupe δ -hyperbolique, pour un système générateur fixé, et Γ_{Cay} son graphe de Cayley associé. Nous supposons $\delta \geq 1$.

Dans Γ_{Cay} , il y a en général plusieurs géodésiques ayant même extrémités sur le bord $\partial\Gamma$. De plus, les images de deux géodésiques convergeant vers un même point au bord peuvent être à distance non nulle, bien qu'inférieure à δ (voir l'exemple trivial $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Le “flot géodésique” de Γ peut être vu comme l’action de \mathbb{R} sur l’ensemble des géodésiques de Γ_{Cay} , mais cet ensemble est en quelque sorte trop gros. M. Gromov construit un espace métrique $\widehat{\Gamma}$ (topologiquement quotient de l’espace des géodésiques de Γ_{Cay}), quasi-isométrique à Γ (en particulier c’est un espace hyperbolique ayant pour bord $\partial\Gamma$), sur lequel agit le flot géodésique de Γ , ainsi que le groupe Γ par isométrie. Dans cet espace, il n’y a qu’une orbite du flot géodésique joignant deux points du bord.

Le but de ce paragraphe est d’établir que deux orbites du flot géodésique dans $\widehat{\Gamma}$ convergeant vers un même point au bord se “rapprochent” exponentiellement l’une de l’autre (théorème 4.13).

Nous allons donner les détails de la construction de cet espace $\widehat{\Gamma}$, qui est entièrement due à M. Gromov, et nous suivons les indications du paragraphe 8.3 de [Gr3]. Une présentation complémentaire est donnée par F. Mathéus [Ma].

Nous nous restreindrons au cas du flot géodésique d’un groupe hyperbolique, alors que la construction est valable pour tout espace métrique propre hyperbolique sur lequel un groupe agit proprement cocompactement par isométries. Nous travaillerons dans le graphe de Cayley du groupe.

Nota. — Dans ce paragraphe, plusieurs constantes, qui ne dépendent que du groupe Γ , interviendront. Lorsqu’elles ne jouent aucun rôle calculatoire, nous les désignerons par une même lettre C . Il faut voir C comme une constante “variable”, qui croît le long du texte, mais qui ne dépend que de Γ .

4.1 L’espace des géodésiques et son flot

Rappelons qu’une (ligne) géodésique de Γ_{Cay} est une application de \mathbb{R} dans Γ_{Cay} , paramétrée par la longueur d’arc et dont l’image réalise le plus court chemin entre deux quelconques de ses points. Il s’agit donc d’une partie de Γ_{Cay} isométrique à la droite euclidienne, munie d’une origine et d’une orientation.

Notons $G\Gamma$ l’espace des géodésiques de Γ_{Cay} muni de la distance :

$$d_{G\Gamma}(g, h) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} 2^{-|n|} d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(n), h(n)).$$

L'application de $G\Gamma$ dans Γ_{Cay} , qui envoie une géodésique g sur $g(0)$, est une quasi-isométrie :

$$d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(0), h(0)) \leq d_{G\Gamma}(g, h) \leq 3d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(0), h(0)) + 8. \quad (4.1)$$

et les espaces $G\Gamma$ et Γ_{Cay} sont quasi-isométriques.

Notons que $G\Gamma$ est propre (c'est-à-dire tout fermé borné de $G\Gamma$ est compact) : cela se vérifie par un procédé diagonal.

4.1.1 Construction de l'espace du flot géodésique

On fixe les constantes suivantes :

$$\rho_0 = 5\delta, \quad \rho_1 = 10^4 \delta^2 \cdot \text{card } B_{\Gamma}(5\delta).$$

On choisit une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ continue valant 1 sur $[0, \rho_1]$ et 0 sur $[\rho_1 + 1, +\infty[$. On considère de plus la fonction ψ définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} t & \text{si } -\rho_1 + \rho_0 + 5\delta \leq t \leq \rho_1 - \rho_0 - 5\delta \\ -\rho_1 + \rho_0 + 5\delta & \text{si } t \leq -\rho_1 + \rho_0 + 5\delta \\ \rho_1 - \rho_0 - 5\delta & \text{si } t \geq \rho_1 - \rho_0 - 5\delta \end{cases}$$

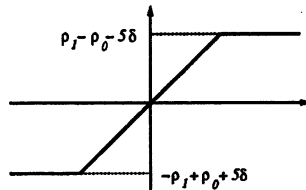


Fig. 12

Soit x un point de Γ_{Cay} . Si g un élément de $G\Gamma$, on pose

$$R_x(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(t))) dt.$$

On choisit alors un temps t_x tel que

$$\int_{t_x}^{+\infty} \phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(t))) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(t))) dt$$

et on pose :

$$r_x(g) = \psi \left(\int_{t_x}^0 \phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(t))) dt \right).$$

Cette quantité ne dépend plus de t_x et, dans le cas où la géodésique g s'approche suffisamment de x , mesure le décalage de l'origine de g avec une "projection" $g(t_x)$ de x sur g . Elle vérifie $-\rho_1 + \rho_0 + 5\delta \leq r_x(g) \leq \rho_1 - \rho_0 - 5\delta$.

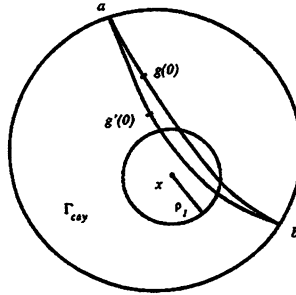


Fig. 13

Donnons-nous maintenant deux points distincts a et b sur le bord de Γ_{Cay} . On notera $G\Gamma_{a,b}$ l'ensemble des géodésiques de Γ_{Cay} ayant pour extrémités a et b . La quantité $\sup_{g \in G\Gamma_{a,b}} d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(\mathbb{R}))$ est finie et diffère d'au plus 2δ de $d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(\mathbb{R}))$ pour tout $g \in G\Gamma_{a,b}$.

On pose

$$\kappa(a, b, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sup_{g \in G\Gamma_{a,b}} d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(\mathbb{R})) \leq \rho_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier si $\kappa(a, b, x) \neq 0$, la boule de centre x de rayon ρ_1 rencontre toutes les géodésiques ayant pour extrémités a et b , et on peut "projeter" x sur chacune de ces géodésiques.

On associe alors à tout couple (g, g') d'éléments de $G\Gamma_{a,b}$ le décalage entre g et g' relativement à x défini par :

$$r_x(g, g') = \kappa(a, b, x)(r_x(g) - r_x(g')).$$

Pour deux éléments g et g' de $G\Gamma$ n'ayant pas les mêmes extrémités, on posera $r_x(g, g') = 0$.

LEMME 4.1. — $r_x(g, g')$ est nul pour presque tous sommets x de Γ_{Cay} , c'est-à-dire tous sauf un nombre fini.

Démonstration. — Soit x tel que $\kappa(a, b, x) \neq 0$. En particulier

$$d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(\mathbf{R})) < \rho_0 \quad \text{et} \quad d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g'(\mathbf{R})) < \rho_0.$$

Il existe donc t_1, t_2, t'_1 et t'_2 tels que

$$d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(t_i)) = d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g'(t'_i)) = \rho_1,$$

et on prend t_1 et t'_1 minimaux, t_2 et t'_2 maximaux pour cette propriété.

On choisit un triangle géodésique $(x, g(t_1), g(t_2))$ formé sur g .

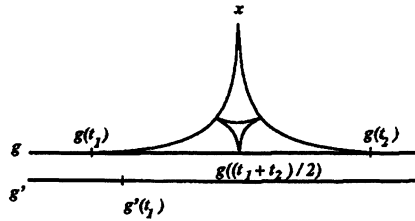


Fig. 14

Le triplet central associé passe par $g((t_1 + t_2)/2)$ et le segment

$$\left[g(t_1), g\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right]$$

est δ -proche du côté $[g(t_1), x]$. Donc si $|t| \geq 2\delta$, alors

$$d_{\Gamma_{\text{Cay}}}\left(x, g\left(\frac{t_1 + t_2}{2} + t\right)\right) \geq d_{\Gamma_{\text{Cay}}}\left(x, g\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\right).$$

Ceci montre que

$$d_{\Gamma_{\text{Cay}}}\left(x, g\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\right) \leq d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(\mathbf{R})) + 2\delta \leq \rho_0 + 2\delta.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$t_2 - t_1 \leq 2\rho_1 - 2d_{\Gamma_{\text{Cay}}}\left(x, g\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\right).$$

Donc :

$$\rho_1 - \rho_0 - 2\delta \leq \frac{t_2 - t_1}{2} \leq \rho_1.$$

Maintenant pour tout t entre $t_1 + 2\delta$ et $t_2 - 2\delta$, on a $d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(t), x) < \rho_1$ et $\phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(t), x)) = 1$. Pour $t \leq t_1 - 2\delta$ ou $t \geq t_2 + 2\delta$, $\phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(t), x)) = 0$. On a donc :

$$\frac{t_1 + t_2}{2} - 2\delta \leq t_x \leq \frac{t_1 + t_2}{2} + 2\delta. \quad (4.2)$$

Finale^{ment}

$$(t_2 - 2\delta) - t_x \geq \frac{t_2 - t_1}{2} - 2\delta \geq \rho_1 - \rho_0 - 4\delta.$$

Ceci montre que si $0 \geq t_2$,

$$\int_{t_x}^0 \phi(d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(t))) dt \geq \rho_1 - \rho_0 - 4\delta$$

et donc $r_x(g) = \rho_1 - \rho_0 - 5\delta$. On vérifierait de même que si $0 \leq t_1$, alors $r_x(g) = -\rho_1 + \rho_0 + 5\delta$. En particulier si $d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(0), x) \geq \rho_1 + 2\delta$, alors $0 \geq t_2$ ou $0 \leq t_1$.

Finale^{ment} si x est assez loin de $g(0)$ et $g'(0)$, $r_x(g)$ et $r_x(g')$ valent simultanément $\rho_1 - \rho_0 - 5\delta$ ou $-\rho_1 + \rho_0 + 5\delta$. Ceci montre le lemme. \square

On pose alors pour toute paire g, g' d'éléments de GT :

$$L(g, g') = \sum_{x \in \Gamma} r_x(g, g').$$

Propriétés de L

- L est Γ -invariante. C'est évident par construction.
- Si g, g' et g'' sont des géodésiques ayant même extrémités, on a la relation :

$$L(g, g') + L(g', g'') = L(g, g'').$$

La relation $g \sim g'$ si et seulement si $L(g, g') = 0$ est donc d'équivalence.

PROPOSITION 4.2. — *Les classes d'équivalence de GT pour la relation \sim sont compactes.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord que les classes sont bornées.

Soient g et g' deux géodésiques ayant mêmes extrémités a et b . Supposons $d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(0), g'(0)) > 10\rho_1$. Soit t_0 tel que $d_{\Gamma}(g'(0), g(t_0)) \leq 2\delta$. On peut supposer $t_0 > 0$, c'est-à-dire que g est "en avance" sur g' .

Il est facile de vérifier que la quantité

$$r_x(g) - r_x(g') = \psi \left(\int_{t_x}^0 \phi \left(d_{\Gamma_{\text{Cay}}} (x, g(t)) \right) dt \right) - \psi \left(\int_{t'_x}^0 \phi \left(d_{\Gamma_{\text{Cay}}} (x, g'(t)) \right) dt \right)$$

est toujours positive ou nulle. En effet, si $t'_x \geq 0$, comme $d_{\Gamma_{\text{Cay}}} (x, g'(t'_x)) \leq \rho_0 + 4\delta$ (d'après l'inégalité (4.2)), alors $d_{\Gamma_{\text{Cay}}} (x, g(0)) \geq \rho_1 + 2\delta$ et $r_x(g) = \rho_1 - \rho_0 - 5\delta$. D'autre part, il est clair que $r_{g'(0)}(g) - r_{g'(0)}(g')$ est strictement positif.

Ceci montre que $L(g, g') > 0$, donc que g et g' ne peuvent être dans la même classe.

Montrons maintenant que les classes d'équivalence sont fermées.

Notons tout d'abord que la relation d'équivalence est une notion locale : si g et h ont même extrémités et si elles coïncident sur $[-2\rho_1, 2\rho_1]$, alors elles sont équivalentes (ceci n'a d'intérêt que parce que nous travaillons dans un graphe).

Le lemme suivant est une sorte de réciproque.

LEMME 4.3. — *Soient g et h deux géodésiques de Γ_{Cay} ayant mêmes extrémités. Supposons que $g(\mathbb{R})$ et $h(\mathbb{R})$ coïncident sur $g([-2\rho_1, 2\rho_1])$. Alors :*

$$g \sim h \Rightarrow g(0) = h(0)$$

et g et h coïncident alors sur $[-2\rho_1, 2\rho_1]$.

En particulier ce lemme montre que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$g^\alpha \sim g^\beta \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Démonstration. — On note a et b les extrémités de g et h . Soit t_g tel que $g(0) = h(t_g)$. Supposons $t_g < 0$. Alors pour tout sommet x de Γ_{Cay} à distance inférieure à $\rho_1 - 100\delta$ de $g(0)$ et tel que $\kappa(a, b, x) = 1$,

$$r_x(h) - r_x(g) = \int_{t_g}^0 \phi \left(d_{\Gamma_{\text{Cay}}} (x, h(t)) \right) dt$$

est strictement positif. Dans les autres cas, $r_x(h) = r_x(g)$. Le lemme est montré. \square

Notons enfin que si g et h sont deux géodésiques de Γ_{Cay} telles que $d_{G\Gamma}(g, h) \leq 2^{-n}$, alors $g(\mathbb{R})$ et $h(\mathbb{R})$ coïncident sur le segment $g([-n+1, n-1])$.

Considérons alors une suite g_n d'éléments de $G\Gamma$ dans la même classe convergeant vers une géodésique g . Il est clair que g a mêmes extrémités que les g_n . De plus le lemme précédent montre que, pour n assez grand, tous les g_n coïncident (donc avec g) sur $[-2\rho_1, 2\rho_1]$. Cela suffit pour avoir $g \sim g_n$. \square

DÉFINITION 4.4. — *On appelle espace du flot géodésique le quotient $\widehat{\Gamma} = G\Gamma / \sim$.*

À l'aide de la proposition précédente, considérons sur $\widehat{\Gamma}$ la métrique de Hausdorff $d_{\widehat{\Gamma}}^H$ sur les classes d'équivalence. L'application de $G\Gamma$ dans $\widehat{\Gamma}$ qui envoie une géodésique g sur sa classe \widehat{g} est une quasi-isométrie :

$$d_{G\Gamma}(g, h) - C \leq d_{\widehat{\Gamma}}^H(\widehat{g}, \widehat{h}) \leq d_{G\Gamma}(g, h) + C, \quad (4.3)$$

où C est le diamètre des classes d'équivalence.

Ceci montre que les espaces Γ et $\widehat{\Gamma}$ sont quasi-isométriques pour les métriques d_{Γ} et $d_{\widehat{\Gamma}}^H$.

4.1.2 L'action du flot géodésique sur $\widehat{\Gamma}$

\mathbb{R} agit canoniquement (par translation) sur les géodésiques de Γ_{Cay} , c'est-à-dire sur les éléments de $G\Gamma$. Nous appellerons cette action le flot géodésique de $G\Gamma$. On va étudier comment cette action se comporte vis-à-vis de la relation d'équivalence.

Soit g un élément de $G\Gamma$. On notera g^t le translaté de t de g par le flot géodésique sur $G\Gamma$:

$$g^t(x) = g(t + x).$$

L'application $\mathbb{R} \rightarrow G\Gamma$, $t \rightarrow g^t$ définit, à un reparamétrage près, une géodésique de $G\Gamma$. En effet :

$$d_{G\Gamma}(g^t, g^u) = 3|t - u|.$$

Étudions maintenant l'image d'une telle orbite sur le quotient $\widehat{\Gamma}$. Par quasi-isométrie, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \widehat{\Gamma}$, $t \rightarrow \widehat{g}^t$ définit une quasi-géodésique de $\widehat{\Gamma}$. Elle vérifie d'après (4.3) :

$$3|t - u| - C \leq d_{\widehat{\Gamma}}^H(\widehat{g}^t, \widehat{g}^u) \leq 3|t - u| + C. \quad (4.4)$$

Notons que l'action du flot géodésique sur $G\Gamma$ n'est pas compatible avec la relation d'équivalence : si g et h sont dans la même classe, g^t et h^t ne sont *a priori* pas dans la même classe.

Par contre, la quantité $L(g, g^t)$ est bien sûr compatible avec la relation d'équivalence (puisque'elle la définit), et elle définit un flot sur $\widehat{\Gamma}$. Mais la distance $d_{\widehat{\Gamma}}^H$, issue de $d_{G\Gamma}$, dépend essentiellement du paramétrage des géodésiques dans Γ_{Cay} . Nous allons donc comparer $L(g, g^t)$ à t . Ceci montrera au moins que les images dans $\widehat{\Gamma}$ des orbites du flot géodésiques de $G\Gamma$ sont des arcs rectifiables.

Nous allons étudier localement ces quasi-géodésiques pour définir l'action d'un flot sur $\widehat{\Gamma}$.

Si g et h sont deux géodésiques de Γ_{Cay} ayant même extrémités, il existe t_g tel que $g \sim h^{t_g}$ (car l'application $t \rightarrow L(g, h^t)$ est continue). De plus, t_g est unique par le lemme 4.3.

Donc si $g \sim h$, il existe $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g^t \sim h^{\beta(t)}$. Cette application est strictement croissante (voir la preuve du lemme 4.3) donc continue, et elle vérifie $\beta(0) = 0$. À nouveau, l'équation (4.4) appliquée à h montre que c'est une quasi-isométrie :

$$|t| - C \leq |\beta(t)| \leq |t| + C.$$

Nous allons montrer que l'image de l'orbite $t \rightarrow g^t$ est une courbe rectifiable de $\widehat{\Gamma}$. Pour cela, on va montrer qu'au voisinage de zéro l'application β est bi-lipschitzienne de rapport borné.

PROPOSITION 4.5. — Soient g et h deux éléments de $G\Gamma$ tels que $g \sim h$. Soit $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g^t \sim h^{\beta(t)}$. Alors pour $-1 \leq t \leq 1$, on a $1/2 \leq \beta(t)/t \leq 2$.

Démonstration. — Par définition $L(g, h) = 0$ et $L(g^t, h^{\beta(t)}) = 0$. Donc $L(g, g^t) = L(h, h^{\beta(t)})$. On va évaluer ces quantités. Notons a et b les extrémités de g . Soient

$$U_g = \left\{ x \in \Gamma \mid \kappa(a, b, x) = 1 \text{ et } d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(0)) \leq \rho_1 - \rho_0 - 8\delta \right\}$$

et

$$V_g = \left\{ x \in \Gamma \mid \kappa(a, b, x) = 1 \right. \\ \left. \text{et } \rho_1 - \rho_0 - 8\delta \leq d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(x, g(0)) \leq \rho_1 + \rho_0 + 8\delta \right\}.$$

On a alors $r_x(g) - r_x(g^t) = t$ pour tout $x \in U_g$, et $0 \leq r_x(g) - r_x(g^t) \leq t$ pour tout $x \in V_g$.

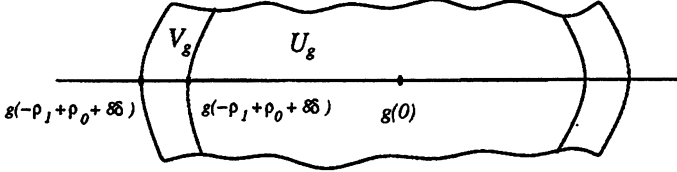


Fig. 15

Donc

$$t \cdot \text{card } U_g \leq L(g, g^t) \leq t \cdot (\text{card } U_g + \text{card } V_g).$$

Or les points à distance inférieure à $\rho_0 - 2\delta$ de $g(\mathbb{R})$ vérifient $\kappa(a, b, x) = 1$ et on peut donc mettre $(\rho_1 - \rho_0 - 8\delta)/\rho_0$ boules disjointes de rayon $\rho_0 - 2\delta$ dans U_g . Donc,

$$\text{card } U_g \geq \frac{\rho_1 - \rho_0 - 8\delta}{\rho_0} \cdot \text{card } B_\Gamma(\rho_0 - 2\delta).$$

Par contre pour un point x de V_g , si y est un point de $g(\mathbb{R})$ à distance inférieure à ρ_0 de x , $d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(y, g(\pm\rho_1)) \leq 2\rho_0 + 8\delta$. Donc

$$\text{card } V_g \leq 4(\rho_0 + 4\delta) \cdot \text{card } B_\Gamma(\rho_0).$$

Les constantes ρ_0 et ρ_1 ont été choisie pour que

$$t \cdot \text{card } U_g \leq L(g, g^t) \leq \frac{5}{4} t \cdot \text{card } U_g.$$

On aurait de même

$$\beta(t) \cdot \text{card } U_h \leq L(h, h^{\beta(t)}) \leq \frac{5}{4} \beta(t) \cdot \text{card } U_h.$$

Il reste à comparer $\text{card } U_g$ et $\text{card } U_h$. Comme $g \sim h$,

$$d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(0), h(0)) \leq 25\delta.$$

Soit $U = U_g \cap U_h$. Si $x \in U_g \setminus U$, pour un point y à distance inférieure à ρ_0 de x sur $h(\mathbb{R})$, on a :

$$d_{\Gamma_{C_{ay}}}(y, h(\pm\rho_1)) \leq 2\rho_0 + 35\delta,$$

sinon on aurait

$$d_{\Gamma_{C_{ay}}}(x, g(0)) > \rho_1 + \rho_0 + 8\delta \quad \text{ou} \quad d_{\Gamma_{C_{ay}}}(x, h(0)) < \rho_1 - \rho_0 - 8\delta.$$

Donc à nouveau

$$\frac{\text{card}(U_g - U)}{\text{card } U_g} \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} \leq \frac{\text{card } U_g}{\text{card } U_h} \leq \frac{5}{4}.$$

Ceci montre la proposition 4.5. \square

COROLLAIRE 4.6. — Les arcs $t \rightarrow \widehat{g}^t$ sont rectifiables et pour tout t, t' :

$$\frac{|t - t'|}{2} \leq \ell([\widehat{g}^t, \widehat{g}^{t'}]) \leq 2|t - t'|.$$

Démonstration. — Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$d_{G\Gamma}(g^t, g^{t+u}) = 3|u|.$$

De plus si $h \sim g^t$, $h^{\beta(u)} \sim g^{t+u}$ et

$$\frac{3|u|}{2} \leq d_{G\Gamma}(h, h^{\beta(u)}) = 3|\beta(u)| \leq 6|u|.$$

Ceci montre que $3|u|/2 \leq d_{\widehat{\Gamma}}^H(\widehat{g}^t, \widehat{g}^{t+u}) \leq 6|u|$ et le corollaire. \square

On notera $s \rightarrow \widehat{g}^s$ le paramétrage de l'orbite de \widehat{g} par l'abscisse curviligne. Si $\widehat{g}^0 = \widehat{g}^0$ et $\widehat{g}^t = \widehat{g}^{s(t)}$, alors

$$\frac{t}{2} \leq s(t) \leq 2t. \tag{4.5}$$

DÉFINITION 4.7. — On appelle *flot géodésique sur $\widehat{\Gamma}$* l'action de \mathbb{R} sur les orbites $s \rightarrow \widehat{g}^s$.

Remarque. — Le flot géodésique commute avec l'action de Γ sur $\widehat{\Gamma}$.

4.2 Métrique sur $\widehat{\Gamma}$

L'espace $\widehat{\Gamma}$ muni de la métrique $d_{\widehat{\Gamma}}^H$ est quasi-isométrique à Γ . En particulier les bords $\partial\widehat{\Gamma}$ et $\partial\Gamma$ sont homéomorphes. De plus, on a vu que par deux points distincts du bord de $\widehat{\Gamma}$ passe une unique orbite du flot géodésique. Notons $\text{diag}(\partial^2\Gamma)$ la diagonale de $\partial^2\Gamma$.

PROPOSITION 4.8. — $\widehat{\Gamma}$ est homéomorphe à $(\partial^2\Gamma \setminus \text{diag}(\partial^2\Gamma)) \times \mathbb{R}$ par un homéomorphisme conjugant l'action du flot géodésique de $\widehat{\Gamma}$ et l'action de \mathbb{R} par translation sur $(\partial^2\Gamma \setminus \text{diag}(\partial^2\Gamma)) \times \mathbb{R}$.

Remarque. — Cet homéomorphisme n'est bien sûr pas Γ -équivariant : il n'y a pas de section "canonique" à la projection $\Gamma \rightarrow \partial^2\Gamma \setminus \text{diag}(\partial^2\Gamma)$.

Démonstration. — Il suffit de constater (avec M. Gromov) que la projection $\Gamma \rightarrow \partial^2\Gamma \setminus \text{diag}(\partial^2\Gamma)$ est une fibration principale de fibre contractile \mathbb{R} , donc un fibré trivial. Pour montrer que la projection est une fibration, il faut pouvoir lui trouver une section locale : elle est par exemple donnée par le théorème de Bebutov [NS, p. 333], qui montre l'existence de section locale à tout flot continu sans point fixe sur un espace métrique. \square

Rappelons que dans l'espace Γ_{Cay} , deux géodésiques convergeant vers un même point au bord restent 2δ -proches dans un voisinage de l'infini. Dans l'espace $\widehat{\Gamma}$, deux points dont les orbites par le flot géodésique convergent vers un même point au bord voient leur distance mutuelle (pour $d_{\widehat{\Gamma}}^H$) décroître vers zéro sous l'action du flot.

Remarque. — Cette décroissance est même "exponentielle" à partir d'un certain temps. Précisément si les orbites de \widehat{g} et \widehat{h} convergent vers un même point au bord, alors il existe un temps s_0 tel que

$$d_{\widehat{\Gamma}}^H(\widehat{g}^s, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \leq 2^{-(s-s_0)} d_{\widehat{\Gamma}}^H(\widehat{g}^{s_0}, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \quad \text{pour tout } s \geq s_0.$$

Ceci résulte du fait que pour toute géodésique g dans la classe \widehat{g} , il existe une géodésique h dans \widehat{h} telle que $g(\mathbb{R})$ et $h(\mathbb{R})$ coïncident avec un voisinage de $+\infty$ ainsi que de la compacité des classes d'équivalence. Mais nous ne savons pas majorer le temps s_0 uniformément sur $\widehat{\Gamma}$ (ce problème est lié à l'existence d'un "représentant canonique" pour les éléments de Γ [RS]). Autrement dit, les orbites de $\widehat{\Gamma}$ "restent" (pour $d_{\widehat{\Gamma}}^H$) à distance bornée un certain temps, avant de converger exponentiellement.

Remarque. — Notre but est maintenant de construire une nouvelle distance sur $\widehat{\Gamma}$, telle que Γ agisse toujours par isométrie, et telle que deux orbites du flot géodésique convergeant vers un même point au bord convergent “exponentiellement” (théorème 4.13). Nous développons ici la construction de M. Gromov [Gr3, § 8.3F].

On note π la projection de $G\Gamma$ sur $\widehat{\Gamma}$.

L'action de Γ sur les espaces $G\Gamma$ et $\widehat{\Gamma}$ est propre et les quotients sont compacts. En effet, l'action de Γ sur $G\Gamma$ admet un domaine fondamental compact :

$$\{g \in G\Gamma \mid g(0) = 1\}.$$

Notons que l'action de Γ sur $G\Gamma$ est libre. Par contre, la projection π peut créer des stabilisateurs non triviaux pour l'action de Γ sur $\widehat{\Gamma}$. Mais ces stabilisateurs sont finis, puisque l'action est propre et les classes d'équivalence sont compactes.

Supposons dans un premier temps que l'action de Γ sur $\widehat{\Gamma}$ est libre.

On peut alors recouvrir un domaine fondamental compact de $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ par un nombre fini d'ouverts U_1, \dots, U_n qui s'injectent dans le quotient $\widehat{\Gamma}/\Gamma$. De plus, avec la proposition 4.8, on peut choisir pour ces ouverts des ouverts distingués du flot (*flow boxes*); pour tout i , il existe $\phi_i : U_i \xrightarrow{\sim} B_i \times [0, 1]$ où B_i est un ouvert (relativement compact) de $\partial^2\Gamma \setminus \text{diag}(\partial^2\Gamma)$ et le flot agit par translation sur les fibres au-dessus de B_i .

Pour chaque ouvert U_i , nous allons définir une distance d_i^{tr} sur B_i , c'est-à-dire une distance “transverse” au flot sur U_i .

Pour cela, considérons l'ouvert $\pi^{-1}(U_i)$ dans $G\Gamma$. On choisit un élément de cet ouvert. C'est une géodésique de Γ et son origine détermine un point x_i dans Γ_{Cay} .

Rappelons comment un point base de Γ_{Cay} définit une famille de distances sur le bord $\partial\Gamma$ ([Gr3, § 1.8.B] ou [GH, chap. 7]). Si w est un point de Γ_{Cay} et a et b sont deux points du bord $\partial\Gamma$, on note

$$(a \mid b)_w = \inf_{g \in G\Gamma_{a,b}} d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(w, g(\mathbf{R})).$$

Fixons $\tau = 1/10\delta$. La quantité $\delta_w(a, b) = e^{-\tau(a|b)_w}$ ne définit pas tout à fait une distance, car elle ne satisfait pas exactement l'inégalité triangulaire.

Néanmoins l'écart par chaîne associé à δ_w définit une distance sur $\partial\Gamma$, que nous noterons $d_{\partial\Gamma,w}$ ([GH, proposition 10, chap. 7]). De plus, $\delta_w \geq d_w \geq \delta_w/2$.

Le lemme suivant est facile et essentiel. Une géodésique g dans Γ_{Cay} définit deux points au bord, que nous noterons g^- et g^+ .

LEMME 4.9. — Soient a, b, c trois points distincts du bord $\partial\Gamma$. Soient g et h deux géodésiques de Γ_{Cay} telles que $g^- = a, h^- = b$ et $g^+ = h^+ = c$. Supposons que $d_{\Gamma_{\text{Cay}}}(g(0), h(\mathbb{R})) \leq 2\delta$. Alors :

$$d_{\partial\Gamma,g(t)}(a, b) \leq 4d_{g(0)}(a, b) e^{-\tau t} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que

$$d_{g(t)}(a, b) \leq \delta_{g(0)}(a, b) e^{-\tau(t-2\delta)} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Or ceci résulte de la finesse des triangles idéaux (a, b, c) formés sur g, h et une géodésique joignant a à b . \square

Revenons à l'ouvert U_i .

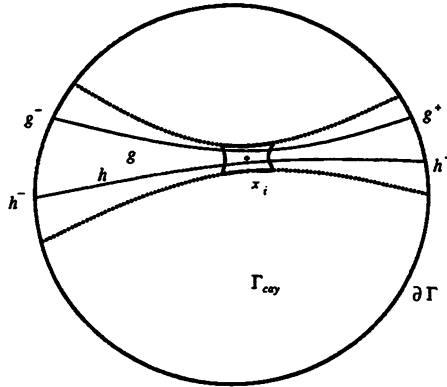


Fig. 16

La distance $d_{\partial\Gamma,x_i}$ sur le bord $\partial\Gamma$ définit sur B_i une distance produit, donnée par :

$$d_i^{\text{tr}}(\widehat{g}, \widehat{h}) = d_{x_i}(\widehat{g}^-, \widehat{h}^-) + d_{x_i}(\widehat{g}^+, \widehat{h}^+).$$

Notons que pour tous points x et y de Γ_{Cay} , les distances $d_{\partial\Gamma,x}$ et $d_{\partial\Gamma,y}$ sur le bord sont équivalentes :

$$\frac{1}{D} \leq \frac{d_x}{d_y} \leq D, \tag{4.6}$$

où la constante D ne dépend que de $d_{\Gamma_{C,y}}(x, y)$. Autrement dit pour tout i, j , le changement de cartes de U_i à U_j définit une application d'une partie de B_i dans B_j lipschitzienne pour les distances d_i^{tr} et d_j^{tr} .

Nous allons maintenant définir une distance sur U_i . Le paramétrage d'une orbite du flot géodésique détermine sur ses restrictions aux ouverts distingués U_i une distance, notée $|\cdot|_{\mathbb{R}}$, et le choix d'une section $B_i \rightarrow B_i \times \{0\}$ définit une distance sur U_i :

$$d_i^o = d_i^{\text{tr}} + |\cdot|_{\mathbb{R}}.$$

Mais ce choix d'une section est arbitraire et ne garantit pas *a priori* que les distances d_i^o et d_j^o sont équivalentes sur $U_i \cap U_j$. Néanmoins par un reparamétrage le long de chaque orbite, nous allons construire des distances sur U_i et U_j satisfaisant cette condition.

LEMME 4.10. — Soit K un compact muni d'un recouvrement par des ouverts O_1, \dots, O_n tels que :

$$\text{pour tout } i, \quad \text{il existe } \phi_i : \overline{O_i} \xrightarrow{\sim} A_i \times [0, 1]$$

où chaque A_i est un compact muni d'une distance d_i^{tr} , les changements de cartes de O_i à O_j préservant la fibre $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} \phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i(O_i \cap O_j) \subset A_i \times [0, 1] &\longrightarrow \phi_j(O_i \cap O_j) \subset A_j \times [0, 1] \\ (a, t) &\longrightarrow (f_{i,j}(a), g_{i,j}(a, t)). \end{aligned}$$

Supposons de plus que pour tout i, j , les applications $f_{i,j}$ sont lipschitziennes pour les métriques d_i^{tr} et d_j^{tr} .

Alors on peut reparamétriser les ouverts O_i par :

$$\psi_i : \overline{O_i} \xrightarrow{\sim} A_i \times [0, 1]$$

de sorte que, quitte à remplacer le recouvrement $\{O_i\}$ par un recouvrement $\{O'_i\}$, avec $O'_i \subset O_i$, les métriques relevées des métriques produits $d_i^{\text{tr}} + |\cdot|_{\mathbb{R}}$ par ψ_i et ψ_j sont équivalentes sur $O'_i \cap O'_j$.

Démonstration. — Le but est donc de construire sur l'adhérence de chaque ouvert O_i un changement de "temps", c'est-à-dire une application :

$$\begin{aligned} \overline{O_i} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow s_i(x) \end{aligned}$$

(ce sera la deuxième composante de ψ_i) dont la restriction à chaque orbite dans $\overline{O_i}$ est bijective et strictement croissante, et, telle que pour tout i, j , le changement de carte entre O_i et O_j ainsi reparamétrisés

$$\left(a, s_i(\phi_k^{-1}(a, t)) \right) \longrightarrow \left(f_{i,j}(a), s_j \left(\phi_j^{-1}(a, g_{i,j}(a, t)) \right) \right)$$

soit lipschitzien pour les métriques produits $d_i^{\text{tr}} + |\cdot|_{\mathbb{R}}$ et $d_j^{\text{tr}} + |\cdot|_{\mathbb{R}}$.

On procède par récurrence. On pose :

$$s_1(\phi_1^{-1}(a, t)) = t, \quad \text{pour tout } a \in A_1, t \in [0, 1].$$

Supposons le temps construit sur O_1, \dots, O_{k-1} . Pour $i, \dots, k-1$, cela munit O_i de la métrique d_i relevée par ϕ_i de la métrique produit $d_i^{\text{tr}} + |\cdot|_{\mathbb{R}}$. On va construire le temps s_k .

Considérons V_k un voisinage de $O_k \setminus (\bigcup_{i \leq k-1} O_i)$ dans O_k , tel que $O_1 \setminus V_k, \dots, O_{k-1} \setminus V_k$ et O_k recouvrent $\bigcup_{i \leq k} O_i$.

Pour tout point a de A_k , l'orbite correspondante dans O_k rencontre certains ouverts O_i avec $i < k$, et éventuellement V_k . Quitte à oublier certains de ces ouverts, on peut recouvrir cette orbite par des intervalles contenus dans des ouverts O_{j_1}, \dots, O_{j_m} tels que :

- si $j_i = k$, l'intervalle est contenu dans V_k ;
- les intervalles sont totalement ordonnés pour l'ordre $]a, b[\leq]c, d[$ si $a \leq c$ et $b \leq d$, et chaque point de l'orbite appartient à au plus deux intervalles (il suffit de prendre un recouvrement par un nombre minimal d'intervalles).

Un recouvrement de ce type peut s'étendre (en conservant l'ordre du recouvrement) à l'orbite associée à tout point d'un voisinage de a dans A_k , et on peut ainsi recouvrir A_k par un nombre fini de tels voisinages T_1, \dots, T_p . On a recouvert O_k par des ouverts $W_i = \phi_k^{-1}(T_i \times]0, 1[)$, chacun d'eux étant recouvert par des ouverts de type $W_{i,j} \subset W_i \cap O_j$ (l'indice j variant dans un ensemble d'indice $J_i = \{j_1, \dots, j_m\}$ dépendant de i). De plus pour tout i , les ouverts $W_{i,j}$ sont totalement ordonnés.

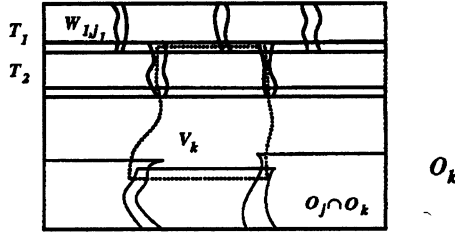


Fig. 17

Prenons une partition de l'unité $\xi_{i,j}$ relative à ce recouvrement. On peut supposer que pour $j \neq k$, les applications $\xi_{i,j}$ sont lipschitziennes pour la métrique d_j sur $W_{i,j}$, et que pour tout i , l'application $\sum_j \xi_{i,j}$ est constante le long de toute orbite $\phi_k^{-1}(x \times]0, 1[)$. En effet, il suffit de prendre pour partition de l'unité un produit d'une partition de l'unité sur O_k relative au recouvrement par les ouverts W_i (issue d'une partition de l'unité sur A_k relative au recouvrement par les ouverts T_i , lipschitzienne pour la métrique d_i^{tr}) et d'une partition de l'unité sur chaque W_i relative au recouvrement par les ouverts $W_{i,j}$ (avec des fonctions lipschitziennes sur $W_{i,j}$ pour les métriques d_j). Enfin, on peut supposer que sur chaque orbite les fonctions $\xi_{i,j}$ sont des fonctions cloches (croissantes puis décroissantes).

On veut maintenant construire un changement de paramètre $s_k : A_k \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui rend les changements de carte entre O_k et O_i , pour $i < k$, lipschitziens hors de V_k . On va recoller, avec la partition de l'unité $\xi_{i,j}$, sur $O_k \cap (\bigcup_{i < k} O_i)$ les paramètres déjà construits sur les ouverts O_i , et sur V_k le paramètre d'origine (le tout pour obtenir une fonction strictement croissante).

Rappelons que sur W_i , les ouverts $W_{i,j}$ sont totalement ordonnés :

$$W_{i,j_1} < W_{i,j_2} < \dots < W_{i,j_m}.$$

On pose alors

$$h_k : O_k \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longrightarrow h_k(x) = \sum_i \sum_{j_\ell} \xi_{i,j_\ell}(x) (s_{j_\ell}(x) + \ell)$$

avec dans cette somme la convention $s_{j_\ell}(\phi_k^{-1}(a, t)) = t$ si $j_\ell = k$.

Il faut vérifier que cette application est strictement croissante sur chaque orbite. Prenons un point x de O_k et i_0 tel que $x \in W_{i_0}$. Il suffit de montrer que dans la somme définissant h_k , la somme partielle pour $i = i_0$ est une application croissante. Au voisinage de tout point $\phi_k^{-1}(a, t)$ dans l'orbite $\phi_k^{-1}(a \times [0, 1])$, on peut écrire cette somme partielle sous la forme :

$$h(t) = \xi(t)u(t) + (\alpha - \xi(t))v(t),$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \xi(t) \leq \alpha$ et $v(t) \geq u(t)$. De plus u et v sont strictement croissantes et ξ est nécessairement décroissante. Ceci suffit à montrer que h est strictement croissante (c'est trivial si les applications sont dérivables).

D'autre part, pour tout $i < k$, la fonction h_k est lipschitzienne sur $O_i \setminus V_k$ pour la métrique d_i . On pose alors $s_k(x) = h_k(x)/h_k(\phi_k^{-1}(a, 1))$, si x est dans l'orbite correspondant à a , et le lemme est montré. \square

Ce lemme, appliqué au recouvrement de $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ par les quotients des ouverts distingués U_i , construit une métrique sur chacun de ces ouverts quotients, et ces métriques rendent lipschitziens les changements de cartes d'un recouvrement par les quotients d'ouverts plus petits. On peut relever dans $\widehat{\Gamma}$ chacune de ces distances aux images réciproques de l'ouvert quotient, c'est-à-dire aux translatés (disjoints) par Γ d'un ouvert U_i . Nous allons maintenant construire une distance sur $\widehat{\Gamma}/\Gamma$.

Plaçons-nous à nouveau dans un cadre général. Considérons un compact K et un recouvrement \mathcal{O} de K par des ouverts O_1, \dots, O_n . On suppose chaque ouvert O_i muni d'une distance bornée d_i (compatible avec la topologie de K). Pour tous x, y éléments de K , on appelle *chaîne* de x à y relative au recouvrement $\{O_i\}_{i=1 \dots n}$ un k -uplet $(x_1, O_{i_1}, x_2, \dots, x_{k-1}, O_{i_k}, x_k)$ où x_1, \dots, x_k sont des points de K tels que :

$$\begin{cases} x_1 = x, x_k = y \\ \text{pour tout } j \leq k-1, x_j \text{ et } x_{j+1} \text{ sont dans le même ouvert } O_{i_j}. \end{cases}$$

On note $C_{x,y}$ l'ensemble des chaînes de x à y et on définit un écart $d_{\mathcal{O}}$ sur K par :

$$d_{\mathcal{O}}(x, y) = \inf_{C_{x,y}} \sum_k d_{i_k}(x_k, x_{k+1}).$$

En particulier pour tous points x, y d'un ouvert O_i , on a $d_{\mathcal{O}}(x, y) \leq d_i(x, y)$. Notons que $d_{\mathcal{O}}$ n'est en général pas une distance.

LEMME 4.11. — Avec les données précédentes, supposons que pour tout i, j les distances d_i et d_j sont équivalentes sur $O_i \cap O_j$. Alors l'écart $d_{\mathcal{O}}$ est une distance sur K et sur chaque ouvert O_i , les distances $d_{\mathcal{O}}$ et d_i sont équivalentes.

Démonstration. — On va tout d'abord montrer que l'écart $d_{\mathcal{O}}$ et les distances d_i sont localement équivalentes, c'est-à-dire pour tout point x de K et tout ouvert O_i contenant x , il existe un voisinage de x dans O_i sur lequel $d_{\mathcal{O}}$ et d_i sont équivalentes. Ceci montrera en particulier que $d_{\mathcal{O}}$ est une distance.

Cette propriété est assez facile à montrer dans le cas où les distances d_i sont des distances de longueur. Pour traiter le cas général, nous allons utiliser des ouverts de "sécurité" dans O_i .

Choisissons des ouverts O'_i tels que $O'_i \subset \overline{O'_i} \subset O_i$ et qui recouvrent K . Il existe alors un nombre ρ tel que pour tout point x de K , si $x \in O'_i \cap O'_j$, $y \in O'_j$ et $d_j(x, y) \leq \rho$, alors $y \in O_i$.

Pour tout x dans O_i , on notera $B_{d_i}(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r dans O_i .

Supposons donc que :

$$\frac{1}{C} \leq \frac{d_i}{d_j} \leq C \quad \text{sur } O_i \cap O_j.$$

Pour tout point x de K , par exemple dans O'_1 , prenons $\varepsilon < \rho$ tel que $B_{d_1}(x, \varepsilon) \subset O'_1$. On va montrer que $d_{\mathcal{O}}$ et d_1 sont équivalentes sur $B_{d_1}(x, \varepsilon/4C)$, de rapport borné par C .

Par l'absurde, supposons qu'il existe une chaîne $x_1, O_{i_1}, x_2, \dots, x_k$ telle que $x_1, x_k \in B_{d_1}(x, \varepsilon/4C)$ et :

$$d_{i_1}(x_1, x_2) + \dots + d_{i_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) < \frac{d_1(x_1, x_k)}{C}. \quad (4.7)$$

Au moins un des points x_i n'appartient pas à O_1 , sinon on pourrait comparer chacune des distances d_{i_j} à d_1 et l'inégalité triangulaire contredirait l'inégalité précédente.

Prenons j tel que $x_1, \dots, x_j \in B_{d_1}(x, \varepsilon)$ et $x_{j+1} \notin B_{d_1}(x, \varepsilon)$.

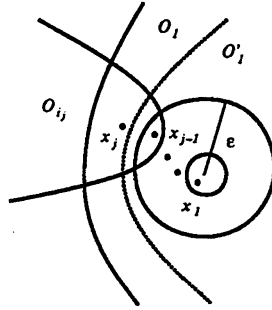


Fig. 18

D'après l'inégalité (4.7), on a :

$$d_{i_j}(x_j, x_{j+1}) < \frac{d_1(x_1, x_k)}{C} < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Or $x_j \in O'_1$ et $\varepsilon/2C \leq \rho$. Donc $x_{j+1} \in O_1$, et on peut comparer les distances de x_j à x_{j+1} dans O_1 et dans O_j . On a $d_1(x_j, x_{j+1}) < \varepsilon/2$. Comme $d_1(x, x_{j+1}) \geq \varepsilon$, cela montre $d_1(x_1, x_j) \geq \varepsilon/4$, et

$$d_{i_1}(x_1, x_2) + \dots + d_{i_{j-1}}(x_{j-1}, x_j) \geq \frac{d_1(x_1, x_2) + \dots + d_1(x_{j-1}, x_j)}{C} \geq \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Ceci contredit l'inégalité (4.7).

Il reste à montrer que $d_{\mathcal{O}}$ et d_i sont équivalentes sur O_i pour tout i . Supposons par l'absurde qu'il existe deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans O_i telles que $d_{\mathcal{O}}(x_n, y_n) \leq d_i(x_n, y_n)/n$. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que ces suites convergent dans K . Comme les distances sont bornées, elles convergent vers un même point x . Ce point appartient à un ouvert O_j , et les distances de $d_{\mathcal{O}}$ et d_j sont équivalentes dans un voisinage de x : d'où la contradiction. \square

Appliquée au recouvrement de $\widehat{\Gamma}/\Gamma$ par les quotients des ouverts distingués $U'_i \times [0, 1]$, cette construction définit une distance sur le quotient $\widehat{\Gamma}/\Gamma$.

En fait, il faut voir les deux lemmes précédents appliqués sur $\widehat{\Gamma}$, et non sur le quotient $\widehat{\Gamma}/\Gamma$, de manière équivariante pour l'action de Γ . Plus précisément, on recouvre un domaine fondamental compact de l'action par des ouverts U_1, \dots, U_n . On a choisi chacun de ces ouverts pour que ses translatés par Γ soient deux à deux disjoints. On peut ainsi appliquer la construction du lemme 4.10 de manière équivariante par Γ : on prend la

métrique $d_1 = d_1^0$ sur U_1 et ses translatées sur $\Gamma \cdot U_1$. L'action de Γ sur $\Gamma \cdot U_1$ est isométrique pour la distance d_1 , là où cette distance est définie. Puis on modifie (avec le lemme 4.10) la métrique d_2^0 sur U_2 pour obtenir une métrique d_2 équivalente à d_1 sur $U_1 \cap U_2$. On prend les translatés de d_2 sur $\Gamma \cdot U_2$. Par récurrence, cela construit une distance d_i sur U_i , l'action de Γ sur chacun des ouverts $\Gamma \cdot U_i$ étant isométrique pour d_i , là où elle est définie. Ces distances sont deux à deux équivalentes sur les intersections et la preuve du lemme 4.11 s'applique pour construire une distance par chaîne sur $\widehat{\Gamma}$, et l'action de Γ est naturelle isométrique pour cette distance.

Dans le cas où l'action de Γ n'est pas libre, le lemme 4.10 ne s'applique plus simplement : un ouvert U_i peut rencontrer un translaté γU_i (avec γ non trivial), et le reparamétrage sur $U_i \cap \gamma U_i$ (comme dans le lemme 4.10) doit laisser γ agir isométriquement : il faut opérer de manière équivariante. Ceci sera possible parce que les stabilisateurs pour l'action de Γ sont finis.

Considérons donc un point \widehat{g} de $\widehat{\Gamma}$ dont le stabilisateur $\Gamma_{\widehat{g}}$ pour l'action de Γ est trivial.

Il existe un voisinage V de \widehat{g} tel que pour tout élément γ de Γ , les ouverts γV et V se rencontrent si et seulement si $\gamma \in \Gamma_{\widehat{g}}$. L'ouvert

$$U = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_{\widehat{g}}} \gamma V$$

a donc la propriété suivante : pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $\gamma U \cap U = \emptyset$, soit $\gamma U = U$ (et $\gamma \in \Gamma_{\widehat{g}}$).

Recouvrons alors un domaine fondamental compact de $\widehat{\Gamma}$ par de tels ouverts U_1, \dots, U_n (que l'on peut supposer distingués), et essayons d'appliquer le lemme 4.10 en conservant le caractère isométrique de l'action de Γ .

Tout d'abord U_1 est stabilisé par un sous-groupe fini Γ_1 de Γ . La proposition 4.8 fournit une section transverse au flot sur U_1 . Les images par les éléments de Γ_1 de cette section forment un ensemble fini de sections de U_1 . L'isobarycentre de ces sections (cela a bien un sens) est donc une section de U_1 invariante par le groupe Γ_1 , et fournit une distance d_1 sur U_1 telle que Γ_1 agit par isométrie sur U_1 . On transporte alors cette distance sur $\Gamma \cdot U_1$, et l'action de Γ y est isométrique pour cette distance, là où elle est définie. Considérons maintenant U_2 , fixé par un groupe fini Γ_2 . On peut de même trouver une distance d_2^0 sur U_2 qui rende l'action de Γ_2 isométrique. Mais il faut rendre d_1 et d_2^0 équivalentes sur $U_1 \cap U_2$ (comme dans le lemme 4.10), en changeant le paramètre des orbites de U_2 de manière équivariante pour Γ_2 .

C'est possible en prenant, dans la preuve du lemme 4.10, un recouvrement $W_{i,j}$ et une partition de l'unité $\xi_{i,j}$ associée équivariants pour Γ_2 . On peut ainsi itérer le processus qui se conclut comme précédemment.

Nous avons ainsi construit une distance $d_{\widehat{\Gamma}}$ sur $\widehat{\Gamma}$, pour laquelle l'action de Γ est isométrique.

4.3 Convergence exponentielle des orbites du flot géodésique

Les espaces (Γ, d_{Γ}) et $(\widehat{\Gamma}, d_{\widehat{\Gamma}})$ sont quasi-isométriques. Nous conserverons désormais ces métriques sur ces espaces. On notera $\widehat{\delta}$ la constante d'hyperbolicité de $\widehat{\Gamma}$ pour $d_{\widehat{\Gamma}}$.

Par la quasi-isométrie entre Γ et $\widehat{\Gamma}$, une géodésique de Γ s'envoie sur une orbite du flot géodésique de $\widehat{\Gamma}$. Par construction de $d_{\widehat{\Gamma}}$ (utilisant en particulier le reparamétrage le long des orbites donné par le lemme 4.10), l'application $s \rightarrow d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{g}^s)$ est strictement croissante et vérifie :

$$s - 1 \leq d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{g}^s) \leq s + 1. \quad (4.8)$$

Autrement dit, les images des orbites du flot géodésique sur $\widehat{\Gamma}$ sont des lignes géodésiques de $\widehat{\Gamma}$, mais le flot géodésique, tel que nous l'avons défini, agit "quasi-isométriquement" le long de ces orbites! (il serait maintenant naturel d'appeler "flot géodésique" sur $\widehat{\Gamma}$ l'action par translation pour $d_{\widehat{\Gamma}}$ et non pour $d_{\widehat{\Gamma}}^H$ le long des orbites...).

Considérons maintenant deux points \widehat{g} et \widehat{h} de $\widehat{\Gamma}$ dont les orbites par le flot géodésique convergent vers un même point du bord. On peut supposer $d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \leq \widehat{\delta}$.

LEMME 4.12. — *Il existe une constante C telle que pour tous points \widehat{g} et \widehat{h} de $\widehat{\Gamma}$ dont les orbites par le flot géodésique convergent vers un point au bord, et tels que $d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \leq \widehat{\delta}$, si g est un géodésique de Γ dans la classe de \widehat{g} , alors :*

$$\frac{d_{\partial\Gamma, g(0)}(\widehat{g}^-, \widehat{h}^-)}{C} \leq d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \leq C d_{g(0)}(\widehat{g}^-, \widehat{h}^-).$$

Démonstration. — Montrons que

$$\frac{d_{\partial\Gamma, g(0)}(\widehat{g}^-, \widehat{h}^-)}{C} \leq d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{h}^{\mathbb{R}}).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on prend une chaîne $g_1, U_{i_1}, \dots, U_{i_{k-1}}, \widehat{g}_k$ calculant la distance de \widehat{g} à $\widehat{h}^{\mathbb{R}}$ à ε près. Comme $d_{\widehat{\Gamma}}$ et $d_{\widehat{\Gamma}}^H$ sont quasi-isométriques, les points $\widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_k$ sont dans un domaine borné (de diamètre ne dépendant que de δ). Dans chacune des cartes U_{i_j} , on peut minorer la distance d_{i_j} par la distance transverse $d_{i_j}^{\text{tr}}$, et l'inégalité (4.6) conclut.

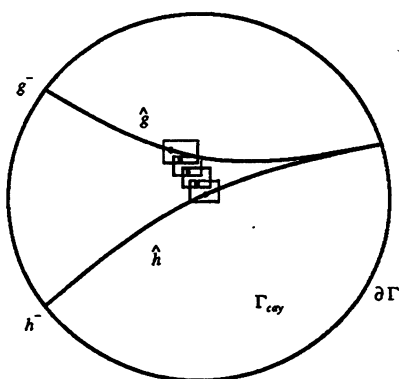


Fig. 19

Pour obtenir l'autre inégalité, constatons qu'elle est vraie si \widehat{g} et une de ses projections sur $\widehat{h}^{\mathbb{R}}$ sont dans la même carte, donc si $d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{h}^{\mathbb{R}})$ est assez petite, inférieure à une constante ne dépendant que de Γ . Mais sinon, l'inégalité est triviale puisque $d_{\partial\Gamma, g(0)}(\widehat{g}^-, \widehat{h}^-)$ est bornée. \square

Il reste à conclure par le théorème suivant.

THÉORÈME 4.13 (M. Gromov). — *Considérons un groupe δ -hyperbolique Γ , et $\widehat{\Gamma}$ l'espace métrique construit plus haut, sur lequel agit le flot géodésique de Γ . Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante :*

- si \widehat{g} et \widehat{h} sont deux points de $\widehat{\Gamma}$ dont les orbites par le flot géodésique convergent vers le même point en $+\infty$, et tels que $d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \leq \widehat{\delta}$, alors pour tout $s \geq 0$,

$$d_{\widehat{\Gamma}}(\widehat{g}^s, \widehat{h}^{\mathbb{R}}) \leq C e^{-\frac{s}{20\delta}}.$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des lemmes 4.9 et 4.12. \square

Nous pouvons définir ainsi des triangles géodésiques idéaux dans l'espace du flot géodésique $\widehat{\Gamma}$.

DÉFINITION 4.14. — *On appellera triangle géodésique idéal de $\widehat{\Gamma}$ la donnée de trois orbites du flot géodésique, chaque orbite ayant chacune des ses extrémités en commun avec l'une des deux autres orbites.*

Le théorème 4.13 permet de majorer l'aire des triangles idéaux de $\widehat{\Gamma}$ (au sens de la section 3).

COROLLAIRE 4.15. — *Il existe une constante $K > 0$ (qui ne dépend que de Γ) telle que les triangles idéaux du plan hyperbolique à courbure constante $-K^2$ sous-tendent les triangles idéaux de $\widehat{\Gamma}$. En particulier, les triangles idéaux de $\widehat{\Gamma}$ sous-tendent une aire inférieure à π/K^2 .*

Démonstration. — Considérons g_1, g_2, g_3 les trois côtés d'un triangle idéal T_K du plan hyperbolique \mathbb{H}_K à courbure constante $-K^2$. On peut prendre leurs origines deux à deux sur un même horocycle centré en un sommet du triangle idéal. On a alors, pour tout $i \neq j$,

$$d_{\mathbb{H}_K}(g_i(0), g_j(0)) = \frac{\log(3 + \sqrt{2})}{K}$$

et pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{K} e^{-Kt} \leq d_{\mathbb{H}_K}(g_i(t), g_j(t)) \leq \frac{\log(3 + \sqrt{2})}{K} e^{-Kt}. \quad (4.9)$$

On vérifie de plus facilement que pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$ et tout $t, u \in \mathbb{R}$, on a :

$$d_{\mathbb{H}_K}(g_i(t), g_j(u)) \geq \frac{1}{3} (d_{\mathbb{H}_K}(g_i(t), g_j(t)) + d_{\mathbb{H}_K}(g_j(t), g_j(u))).$$

Considérons maintenant un triangle idéal de $\widehat{\Gamma}$, d'image $T = \widehat{f}_1^{\mathbb{R}} \cup \widehat{f}_2^{\mathbb{R}} \cup \widehat{f}_3^{\mathbb{R}}$. Les orbites de $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ et \widehat{f}_3 étant des quasi-géodésiques, avec l'inégalité (4.8), on peut supposer ces trois points de $\widehat{\Gamma}$ à distances mutuelles inférieures à $100\widehat{\delta}$ (par la finesse du triangle idéal).

Notons F_t la translation de t , pour la distance $d_{\widehat{\Gamma}}$, le long des orbites du flot géodésique dans $\widehat{\Gamma}$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \phi : T_K &\longrightarrow T \\ g_i(t) &\longrightarrow F_{t/3}(\widehat{f}_i). \end{aligned}$$

L'application ϕ contracte les longueurs le long de chaque côté du triangle : pour tout $i = 1, 2, 3$ et tout $t, u \in \mathbb{R}$, on a

$$d_{\widehat{\Gamma}}(\phi(g_i(t)), \phi(g_i(u))) = \frac{|t - u|}{3} = \frac{d_{\mathbb{H}_K}(g_i(t), g_i(u))}{3}.$$

Avec les inégalités (4.8), (4.9) et le théorème 4.13, on peut choisir K assez petit pour que ϕ contracte transversalement les longueurs, avec pour tout i, j et tout t :

$$d_{\widehat{\Gamma}}(\phi(g_i(t)), \phi(g_j(t))) \leq \frac{d_{\mathbb{H}_K}(g_i(t), g_j(t))}{3}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}_K}(g_i(t), g_j(u)) &\geq d_{\widehat{\Gamma}}(\phi(g_i(t)), \phi(g_j(t))) + d_{\widehat{\Gamma}}(\phi(g_j(t)), \phi(g_j(u))) \\ &\geq d_{\widehat{\Gamma}}(\phi(g_i(t)), \phi(g_j(u))) \end{aligned}$$

et cela montre le corollaire. \square

5. Petite simplification relative dans un groupe hyperbolique

Dans cette section, Γ désigne un groupe δ -hyperbolique pour un système générateur fixé. On note L le groupe libre sur ces générateurs et $x \rightarrow \bar{x}$ la projection de L sur Γ .

Le théorème 5.2 de cette section est un outil essentiel utilisé dans [Ch3]. Il est presque énoncé par M. Gromov dans [Gr3], et nous avons tenté de suivre les indications du paragraphe 5.5.F.

Donnons une définition d'éléments à petite simplification dans le groupe hyperbolique Γ , inspirée de [Gr3, § 5.5.F] (voir [Ch2, définition 2.2]).

DÉFINITION 5.1. — Soit $d \in \mathbb{R}^+$. Soient x et y deux mots du groupe libre L géodésiques dans Γ . On appelle d -pièce de x par rapport à y (relativement au groupe Γ) un sous-mot p de x ou de x^{-1} tel qu'il existe a, b dans L et un sous-mot q de y ou de y^{-1} vérifiant :

- $\ell_L(a) \leq d$, $\ell_L(b) \leq d$, $\bar{p} = \overline{aqb}$, avec si x' et y' sont les conjugués cycliques de $x^{\pm 1}$ et $y^{\pm 1}$ commençant respectivement par p et par q , alors $x' \neq ay'a^{-1}$.

Deux mots a et b (éventuellement égaux) du groupe libre L géodésiques dans Γ sont dits à d -simplification inférieure à $1/\kappa$ (entre eux) dans Γ si toutes les d -pièces entre a et b sont de longueurs strictement inférieures à $\inf\{\ell_L(a), \ell_L(b)\}/\kappa$.

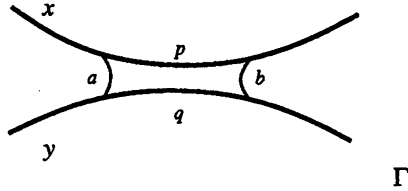


Fig. 20

Notons qu'en faisant $d = 0$, nous obtenons les définitions classiques de petite simplification $C'(1/\kappa)$ dans le groupe libre. Nous renvoyons à [Ch2] pour une étude combinatoire de la petite simplification relative.

THÉORÈME 5.5. — Soit Γ un groupe δ -hyperbolique. Il existe des constantes κ et C telles que :

- si r_1, \dots, r_k sont des mots du groupe libre L , minimaux dans leur classe de conjugaison dans Γ , de longueurs supérieures à C et tels que pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$, les mots r_i et r_j sont à 2δ -simplification inférieure à $1/\kappa$, alors le quotient $\Gamma/\mathcal{N}(\overline{r_1}, \dots, \overline{r_k})$ est δ' -hyperbolique avec $\delta' = \sup_i \ell_L(r_i)$.

La constante κ dépend (polynomialement) de la constante multiplicative λ de quasi-isométrie entre le groupe Γ et l'espace $\widehat{\Gamma}$ du flot géodésique de Γ . La constante C dépend des deux constantes de quasi-isométrie, et de l'aire des triangles idéaux de $\widehat{\Gamma}$ (section 4).

Nous allons montrer en fait le résultat suivant.

ALGORITHME DE DEHN RELATIF. — Avec les hypothèses du théorème précédent, pour tout $\xi \in [0, 1[$, si κ est assez grand, tout mot w du groupe libre L , géodésique dans Γ , qui se projette sur l'élément neutre dans le quotient $\Gamma/\mathcal{N}(\overline{r_1}, \dots, \overline{r_k})$, partage une 2δ -pièce avec l'une des relations r_i ou son inverse de longueur supérieure à $\xi \ell_L(r_i)$.

Comme dans la théorie classique de petite simplification, augmenter κ permet d'augmenter le coefficient ξ .

COROLLAIRE 5.3. — *En particulier, avec les hypothèses précédentes, les mots de Γ de longueur inférieure à $\xi \inf_i \ell_L(r_i)$ ne sont pas triviaux dans le quotient, c'est-à-dire que l'application quotient est injective sur la boule de rayon $\xi \inf_i \ell_L(r_i)$.*

5.1 Démonstration de l'algorithme de Dehn relatif

Considérons un mot w du groupe libre L , géodésique dans Γ et trivial dans le quotient $\Gamma/\mathcal{N}(\overline{r_1}, \dots, \overline{r_k})$. Nous supposons que w est minimal dans sa classe de conjugaison dans Γ et nous allons montrer que w partage avec un conjugué cyclique d'une relation r_i ou de son inverse une 2δ -pièce de longueur supérieure à ξ fois de la longueur de r_i . Le lemme 2.10 de [Ch2] montre que cela suffit à montrer le résultat.

On choisit des mots a_1, \dots, a_p de L et s_1, \dots, s_p des conjugués cycliques des relations r_i ou de leurs inverses tels que :

$$\overline{w} = \prod_{i=1}^p \overline{a_i s_i a_i^{-1}} \quad \text{dans } \Gamma \quad (5.1)$$

le nombre p de relations s_i étant minimal parmi toutes ces écritures possibles. Notons que le lemme 2.10 de [Ch2] montre qu'on peut supposer $p \geq 2$.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion dans Γ , si C est assez grand, les éléments $\overline{s_i}$ ne sont pas de torsion dans Γ . De plus, nous pouvons supposer que l'élément \overline{w} n'est pas de torsion dans Γ . En effet s'il était de torsion, l'une des relations r_i s'écrirait comme produit non trivial de conjugués des relations $r_j^{\pm 1}$. Nous constaterons à la fin de la preuve que ceci est impossible.

D'après l'équation (5.1), le mot $(\prod_{i=1}^n a_i s_i a_i^{-1}) w^{-1}$ détermine une courbe fermée du graphe de Cayley Γ_{Cay} . Notre but est d'évaluer une aire sous-tendue par ce lacet. Ici l'aire combinatoire (calculée par des diagrammes représentant le mot) n'est pas suffisante [Ch2]. Nous utiliserons la notion d'aire développée dans la section 3 et le fait que les triangles idéaux de l'espace du flot géodésique de Γ sous-tendent une aire bornée.

Notons que l'équation (5.1) exprime que les mots w, s_1, \dots, s_p bordent un disque à n trous dans le 2-complexe de Cayley $C_2(\Gamma)$ associé à une présentation de Γ , au sens de la définition 3.8 de [Ch2]. Pour "relever" ce disque troué dans Γ_{Cay} , nous procédons ainsi : on fait agir (à gauche) le

sous-groupe Λ de Γ engendré par les éléments $\overline{a_i s_i a_i^{-1}}$, $i = 1, \dots, p$, sur le lacet b correspondant à $(\prod_{i=1}^n a_i s_i a_i^{-1}) w^{-1}$ (dont l'origine est placée, par exemple, au point 1 de Γ_{Cay}).

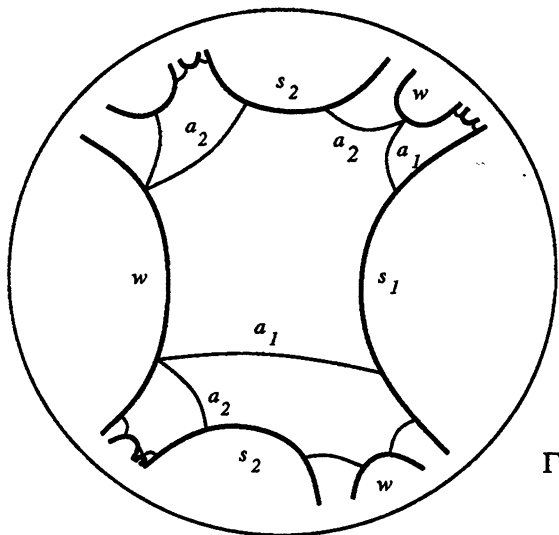


Fig. 21

Les éléments du groupe Λ “recollent” les images du lacet b le long des chemins a_i et a_i^{-1} de Γ_{Cay} . Ceci fait apparaître les relèvements cherchés des composantes w, s_1, \dots, s_p du disque troué de $C_2(\Gamma)$: ce sont les arcs engendrés par $n \rightarrow w^n$, $n \rightarrow a_i s_i^n a_i^{-1}$ et leurs images sous l'action de Λ . Nous allons montrer que ces arcs définissent des quasi-géodésiques de Γ_{Cay} .

5.1.1 Géodésiques locales dans Γ_{Cay}

Dans cette partie, τ désigne une constante supérieure à 8δ . La proposition suivante est une version du théorème 2.15 de [Sh], rappelée dans [Ch1].

PROPOSITION 5.4. — Soient g un segment τ -géodésique et h un segment géodésique ayant même extrémités dans Γ_{Cay} . Alors g reste dans le 4δ -voisinage de h et

$$\ell(h) \geq \left(1 - \frac{8\delta}{\tau}\right) \ell(g).$$

Ainsi, une ligne τ -géodésique g définit deux points du bord $\partial\Gamma_{\text{Cay}}$. Si h est une ligne géodésique ayant même extrémités que g dans $\partial\Gamma_{\text{Cay}}$, alors g reste dans le 4δ -voisinage de h .

Appliquons cette proposition aux arcs $n \rightarrow w^n$ et $n \rightarrow a_i s_i^n a_i^{-1}$. Comme w et les mots s_i sont minimaux dans leurs classes de conjugaison dans Γ , ces axes définissent des géodésiques locales dans Γ . En particulier les axes $n \rightarrow a_i s_i^n a_i^{-1}$ sont des $\ell_\Gamma(s_i)$ -géodésiques. D'après la proposition précédente, ces axes définissent deux points à l'infini. Le mot w pourrait être de longueur inférieure à 4δ , auquel cas la proposition 5.4 ne s'applique pas. Néanmoins nous avons supposé qu'il est sans torsion, et l'axe $n \rightarrow w^n$ définit une quasi-géodésique et donc deux points à l'infini ([CDP], [GH], [Sh]).

5.1.2 Passage à l'espace du flot géodésique

Nous avons ainsi obtenu une partie Π de $\partial\Gamma^2 \setminus \text{diag}(\partial\Gamma^2)$ correspondant aux extrémités de géodésiques locales engendrées par les éléments $\bar{w}, a_i s_i a_i^{-1}$ et leurs images par Λ . Pour chaque couple (a, b) dans Π , nous choisissons une géodésique ayant pour extrémités a et b , orientée de a vers b . La proposition 5.4 affirme que les géodésiques associées aux mots $a_i s_i a_i^{-1}$ et les géodésiques locales correspondantes sont à distance de Hausdorff au plus 4δ .

Maintenant nous identifions $\partial\Gamma$ avec le bord de l'espace $\hat{\Gamma}$ du flot géodésique sur Γ . D'après la proposition 4.8, pour chaque couple (a, b) de Π , il existe une unique orbite du flot géodésique dans $\hat{\Gamma}$ ayant pour extrémités a et b (avec la bonne orientation). On notera \tilde{P} la réunion de ces orbites.

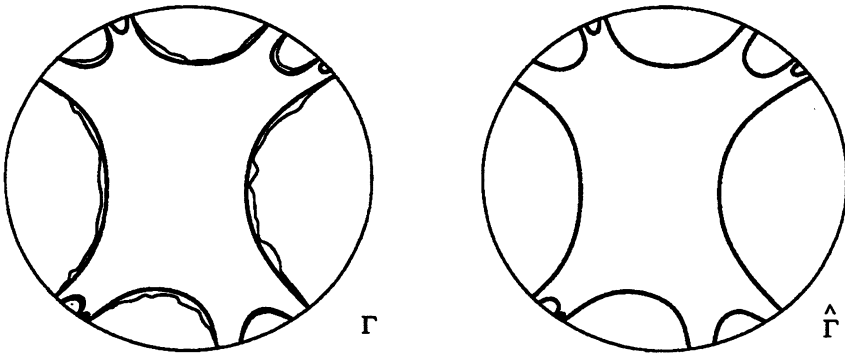


Fig. 22

Par quasi-isométrie entre Γ et $\hat{\Gamma}$ (§ 4.1.1), \tilde{P} est quasi-isométrique à la réunion des géodésiques de Γ précédemment choisie. De plus le groupe Λ agit sur \tilde{P} . Étudions de plus près comment.

À l'élément $\overline{a_i s_i a_i^{-1}}$ correspond une géodésique g_i de Γ et une orbite du flot géodésique $\widehat{g}_i^{\mathbb{R}}$ dans $\widehat{\Gamma}$. On supposera désormais que $g_i(0)$ est un des points les plus proches de $\overline{a_i}$ sur g_i et que \widehat{g}_i est la classe d'équivalence de g_i dans $\widehat{\Gamma}$.

L'élément $\overline{a_i s_i a_i^{-1}}$ agit isométriquement sur $\widehat{\Gamma}$ en préservant les points à l'infini de \widehat{g}_i , donc \widehat{g}_i (par unicité des orbites du flot géodésique entre deux points du bord). Il agit donc sur \widehat{g}_i par translation. Notons ℓ_i la distance de translation de $\overline{a_i s_i a_i^{-1}}$ sur \widehat{g}_i .

LEMME 5.5. — Il existe une constante A , ne dépendant que de Γ et de C , telle que :

$$\frac{\ell_{\Gamma}(s_i)}{A} \leq \ell_i \leq A \ell_{\Gamma}(s_i).$$

Démonstration. — En effet pour tout t , on a :

$$\ell_i = d_{\widehat{\Gamma}} \left(\widehat{g}_i(t), \overline{a_i s_i a_i^{-1}} \widehat{g}_i(t) \right).$$

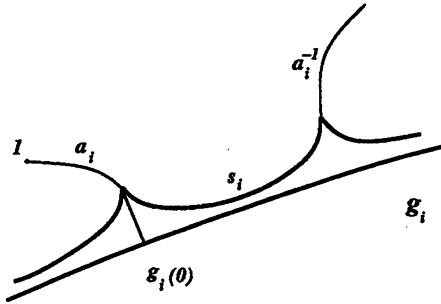


Fig. 23

Il suffit alors d'utiliser la quasi-isométrie (Γ -équivariante) $\widehat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ qui envoie \widehat{g}_i sur $g_i(0)$. Si λ et μ sont les constantes de quasi-isométrie, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d_{\Gamma}(g_i(0), \overline{a_i s_i a_i^{-1}} g_i(0))}{\lambda} - \mu &\leq d_{\widehat{\Gamma}} \left(\widehat{g}_i(0), \overline{a_i s_i a_i^{-1}} \widehat{g}_i(0) \right) \\ &\leq \lambda d_{\Gamma} \left(g_i(0), \overline{a_i s_i a_i^{-1}} g_i(0) \right) + \mu \end{aligned}$$

et par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| d_{\Gamma} \left(g_i(0), \overline{a_i s_i a_i^{-1} g_i(0)} \right) - d_{\Gamma}(\overline{a_i}, \overline{a_i s_i}) \right| &\leq \\ &\leq d_{\Gamma}(g_i(0), \overline{a_i}) + d_{\Gamma} \left(\overline{a_i s_i}, \overline{a_i s_i a_i^{-1} g_i(0)} \right) \\ &\leq 2d_{\Gamma}(g_i(0), \overline{a_i}) \\ &\leq 8\delta \end{aligned}$$

d'après la proposition 5.4. Comme $d_{\Gamma}(\overline{a_i}, \overline{a_i s_i}) = \ell_{\Gamma}(s_i)$, cela conclut, dès que C est supérieur à quelques δ , avec $A = 2\lambda$. \square

Le groupe libre à p générateurs (abstrait) $L(x_1, \dots, x_p)$ agit sur \tilde{P} , le générateur x_i agissant par translation à gauche par $a_i s_i a_i^{-1}$. Cette action n'est *a priori* pas libre, c'est-à-dire Λ n'est *a priori* pas un groupe libre (nous pourrions voir *a posteriori* que c'en est un). Autrement dit, le quotient de \tilde{P} par Λ est une n -courbe (section 3) mais dont les composantes du bord ne sont éventuellement pas simples. Pour éluder ce problème, nous allons construire un vrai disque riemannien à p trous, à bord géodésique, qui sera sous-tendu par \tilde{P}/Λ .

Comme nous avons défini un recouvrement d'une multicourbe par des triangles idéaux dans la section 3 (définition 3.7), nous pouvons "recouvrir" cet ensemble d'orbites du flot géodésique par $2(p-1)$ triangles idéaux $T_1, \dots, T_{2(p-1)}$ et leurs images par l'action de Λ . Nous allons faire cette construction dans le cas $p=2$ et nous laisserons au lecteur le cas général : choix d'une triangulation à $p+1$ sommets de la sphère, du découpage en triangle idéaux correspondant et du relèvement à $\hat{\Gamma}$.

Supposons donc momentanément $p=2$. Pour tout élément hyperbolique γ de Γ , on notera γ^+ et γ^- les points à l'inini de la quasi-géodésique engendrée par $n \rightarrow \gamma^n$. Prenons le triangle idéal T de $\hat{\Gamma}$ de sommets

$$\overline{w}^+, \quad \overline{a_1 s_1 a_1^{-1}}^+ \quad \text{et} \quad \overline{a_2 s_2 a_2^{-1}}^+.$$

On notera :

- f le côté $(\overline{w}^+, \overline{a_1 s_1 a_1^{-1}}^+)$,
- g le côté $(\overline{w}^+, \overline{a_2 s_2 a_2^{-1}}^+)$,
- h le côté $(\overline{a_2 s_2 a_2^{-1}}^+, \overline{a_1 s_1 a_1^{-1}}^+)$.

Prenons maintenant le triangle idéal T' de côtés $x_1^{-1} \cdot f$, $x_2 \cdot g$ et h .

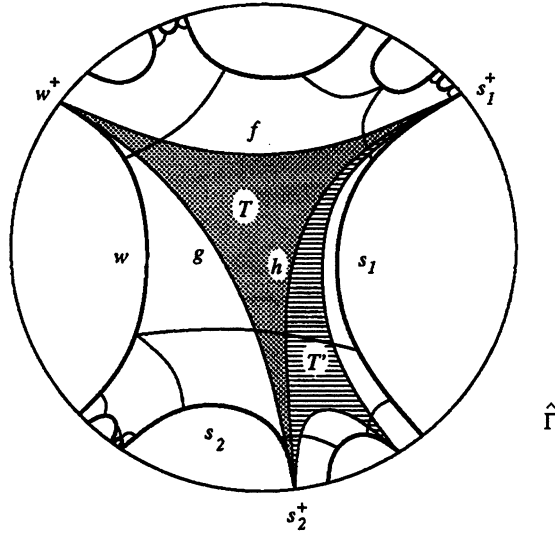


Fig. 24

Notons que les triangles de $\Lambda \cdot (T \cup T')$ se recollent le long de certains côtés, comme T et T' le long de h . On dira que $\Lambda \cdot (T \cup T')$ "recouvre" \tilde{P} .

Rappelons qu'il existe $K \neq 0$ tel que tout triangle idéal du plan hyperbolique \mathbb{H}_K à courbure constante $-K^2$ sous-tend les triangles idéaux de $\hat{\Gamma}$ (corollaire 4.15). On prend alors deux triangles idéaux T_K et T'_K de \mathbb{H}_K , ayant un côté commun, sous-tendant T et T' . Les applications sous-tendantes sont notées

$$\phi : \partial T_K \rightarrow T \quad \text{et} \quad \phi' : \partial T'_K \rightarrow T'.$$

Notons que T et T' ayant un côté commun, cela impose la compatibilité de ϕ et de ϕ' (assurées par translation d'un des deux triangles idéaux) sur ce côté. T'_K est donc uniquement déterminé par le choix de T_K .

Maintenant on fait agir le groupe libre $L(x_1, x_2)$ sur T_K et T'_K de la manière suivante : x_1 est l'isométrie de \mathbb{H}_K envoyant, pour tout t , $\phi^{-1}(x_1^{-1} \cdot f(t))$ sur $\phi^{-1}(f(t))$ et x_2 est l'isométrie de \mathbb{H}_K envoyant $\phi^{-1}(g(t))$ sur $\phi^{-1}(x_2 \cdot g(t))$.

Ainsi $L(x_1, x_2) \cdot (T_K \cup T'_K)$ est le revêtement universel d'un pantalon ouvert. On notera \tilde{R} sa fermeture. Le bord $\partial \tilde{R}$ est géodésique et correspond naturellement (par la combinatoire de l'action) aux orbites du flot géodésique de \tilde{P} .

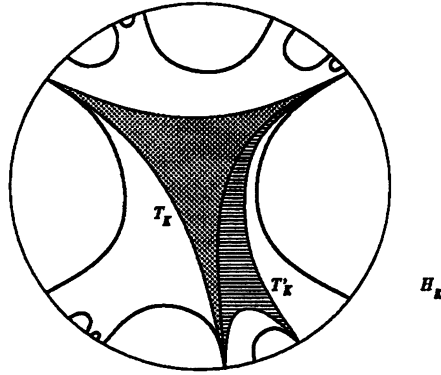


Fig. 25

On va maintenant construire une application $\Phi = \partial\tilde{R} \rightarrow \tilde{P}$ qui contracte les distances, isométrique sur les composantes du bord pour les distances de longueur, et qui commute avec l'action de $L(x_1, x_2)$. Pour cela on dispose des applications $\phi : \partial T_K \rightarrow T$ et $\phi' : \partial T'_K \rightarrow T'$, donc pour tout élément u de $L(x_1, x_2)$ des applications $u\phi : u \cdot \partial T_K \rightarrow u \cdot T$ et $u\phi' : u \cdot \partial T'_K \rightarrow u \cdot T'$. Par passage à la limite, ces applications induisent une application $\Phi = \partial\tilde{R} \rightarrow \tilde{P}$, qui commute évidemment avec l'action de $L(x_1, x_2)$ par construction.

L'inégalité triangulaire dans $\hat{\Gamma}$ montre que Φ contracte les longueurs, puisque la distance sur \tilde{R} (qui est convexe dans \mathbf{H}_K) est de longueur. Φ est clairement une isométrie sur les composantes du bord de \tilde{R} par passage à la limite.

Revenons maintenant au cas général, où le nombre p de composantes du bord est quelconque.

Nous obtenons, par la méthode précédente, une partie convexe \tilde{R} du plan hyperbolique \mathbf{H}_K sur laquelle le groupe libre $L(x_1, \dots, x_p)$ agit isométriquement. Le quotient $R = \tilde{R}/L(x_1, \dots, x_p)$ est un disque riemannien à p trous dont p composantes du bord t_1, \dots, t_p , géodésiques, correspondent aux isométries x_1, \dots, x_p . En particulier $\ell_R(t_i) = \ell_i$. On notera t_0 la composante du bord correspondant au produit $x_1 \cdots x_p$ (c'est-à-dire à w). On dispose de plus d'une application $L(x_1, \dots, x_p)$ -équivariante $\Phi : \partial\tilde{R} \rightarrow \tilde{P}$ qui contracte les distances et qui est isométrique sur chaque composante du bord pour les métriques de longueur associées.

On munit le disque riemannien troué R d'un point base sur le bord, qui identifie son groupe fondamental au groupe libre $L(x_1, \dots, x_p)$.

Nous allons maintenant utiliser la proposition 2.3.

LEMME 5.6. — *Pour tout κ' , si l'hypothèse de petite simplification relative sur les éléments s_i de Γ est assez forte, c'est-à-dire si κ est assez grand et si C est assez grand, alors dans le disque troué riemannien R , toute 1-pièce de t_i relativement à t_j pour $i \neq j$, $i, j \geq 1$, est de longueur inférieure à l_i/κ' .*

Démonstration. — Soient c_i une 1-pièce de t_i relativement à t_j et c_j la pièce correspondante sur t_j . Notons c un chemin joignant l'origine de c_i à l'origine de c_j dans R et a un chemin joignant le point base de R à l'origine de c . Quitte à changer les générateurs du groupe libre $L(x_1, \dots, x_p)$ en changeant les conjugués de la relation (5.1), nous pouvons supposer $i = 1$, $j = 2$, que le lacet at_1a^{-1} correspond à x_1 et que le lacet $act_2c^{-1}a^{-1}$ correspond à x_2 . Le lacet $at_1ct_2c^{-1}a^{-1}$ correspond alors à l'élément x_1x_2 dans $L(x_1, \dots, x_p)$ (et $a_1s_1a_1^{-1}a_2s_2a_2^{-1}$ dans Λ).

Nous allons en fait montrer que si la pièce est trop longue, ce lacet se projette sur l'élément trivial de Λ . Ce qui contredira le choix de minimalité fait sur l'équation (5.1) (c'est exactement le raisonnement qu'on ferait au lemme 2.13 de [Ch2]).

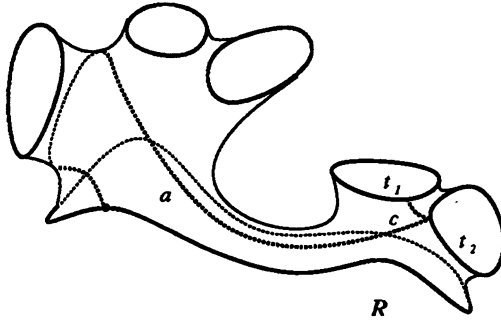


Fig. 26

Choisissons un relevé \tilde{c}_1 de c_1 sur la composante \tilde{t}_1 telle que $\Phi(\tilde{t}_1) = \hat{g}_1$. Alors \tilde{c}_1 est uniformément 1-proche d'une composante \tilde{t}_2 telle que $\Phi(\tilde{t}_2)$ est l'orbite $x_1 \cdot \hat{g}_2$.

Petite simplification dans les groupes hyperboliques

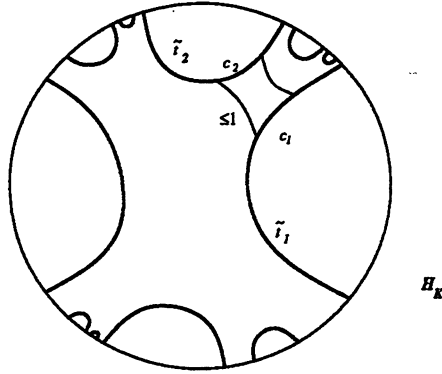


Fig. 27

Comme l'application Φ contracte les distances, $\Phi(\tilde{c}_1)$ est un segment de $\Phi(\tilde{t}_1)$ uniformément 1-proche de $\Phi(\tilde{c}_2)$ sur $\Phi(\tilde{t}_2)$. De plus $\ell_{\hat{\Gamma}}(\Phi(\tilde{c}_1)) = \ell_R(c_1)$ et de même pour c_2 .

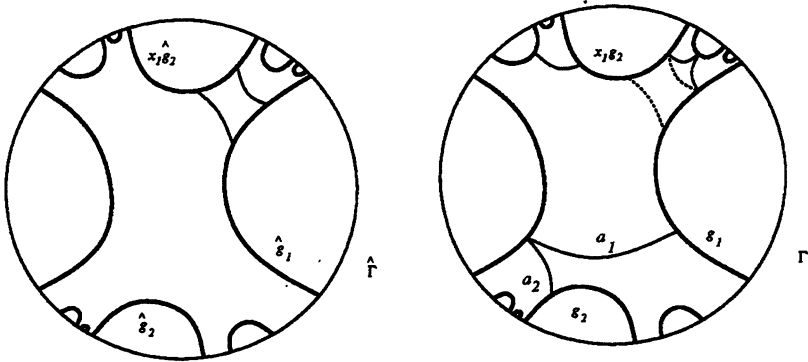


Fig. 28

La quasi-isométrie $\hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ donne, dans Γ , un segment d_1 sur la géodésique g_1 qui vérifie :

$$\ell_{\Gamma}(d_1) \geq \frac{\ell_{\hat{\Gamma}}(\Phi(\tilde{c}_1))}{\lambda} - \mu, \quad (5.2)$$

et de même pour un segment d_2 sur $a_1 s_1 a_1^{-1} g_2$. De plus, d_1 est uniformément $(\lambda + \mu)$ -proche de d_2 .

D'après la proposition 5.4, tout point de g_1 est uniformément 4δ -proche de la géodésique locale $n \rightarrow a_1 s_1^n a_1^{-1}$.

Quitte à changer de conjuguants dans la relation (5.1) (en changeant les points bases sur les composantes t_1 et t_2 du bord de R), on peut supposer que le segment d_1 est 4δ -proche du sous-mot s_1 de $a_1 s_1$ sur la quasi-géodésique $n \rightarrow a_1 s_1^n a_1^{-1}$. Donc d_1 et d_2 induisent deux sous-mots f_1 et f_2 de s_1 et s_2 , qui, vus comme sous-segments des segments $a_1 s_1$ et $a_1 s_1 a_1^{-1} a_2 s_2$ (d'origine en 1) de Γ_{Cay} , sont uniformément $(10\delta\lambda + \mu)$ -proches. Ces sous-mots sont de longueur au moins $\ell_\Gamma(d_i) - 4\delta$. On notera u un chemin géodésique (de longueur inférieure à $(4\delta\lambda + \mu)$) dans Γ_{Cay} joignant l'origine de f_1 à l'origine de f_2 . On peut supposer (toujours quitte à conjuguer cycliquement s_1 et s_2) que s_1 finit par f_1 , et que s_2 commence par f_2 . On a alors $\bar{u} = a_1^{-1} a_2$.

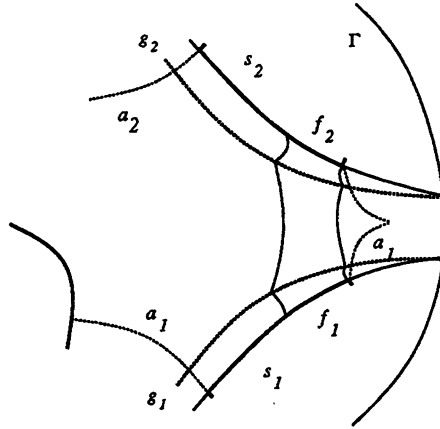


Fig. 29

f_1 et f_2 vont définir des pièces relatives entre s_1 et s_2 , sauf si $s_1 u s_2 u^{-1} = 1$. Mais dans ce cas on aurait $a_1 s_1 a_1^{-1} a_2 s_2 a_2^{-1} = 1$ dans Γ et cela contredit le choix de minimalité de l'équation (5.1).

Donc f_1 et f_2 sont des $(4\delta\lambda + \mu)$ -pièces entre s_1 et s_2 . Or par hypothèse de petite simplification relative, les 2δ -pièces de s_1 relativement à s_2 dans Γ sont de longueur inférieure à $\ell_\Gamma(s_1)/\kappa$. Donc par δ -hyperbolicité de Γ , et si s_1 est assez long, les $(4\delta\lambda + \mu)$ -pièces de s_1 relativement à s_2 dans Γ sont de longueur inférieure à $2\ell_\Gamma(s_1)/\kappa$. D'où :

$$\ell_\Gamma(d_1) - 4\delta \leq \frac{2\ell_\Gamma(s_1)}{\kappa} \quad \text{et} \quad \ell_\Gamma(d_1) \leq \frac{3\ell_\Gamma(s_1)}{\kappa}.$$

L'inégalité (5.2) conclut, dès que λ/κ est assez petit (et que C est assez grand). \square

La proposition 2.3 montre alors que pour tout β , si les longueurs des composantes t_i du bord, pour $i \geq 1$, sont assez grandes, qu'une composante t_i du bord de R partage une 1-pièce avec t_0 de longueur supérieure à $\beta l_\Gamma(t_i)$.

Il reste à exprimer ce que cela signifie sur les mots \bar{s}_i et \bar{w} du groupe Γ . Tout d'abord cela impose que $l_R(t_0)$, et donc $l_\Gamma(w)$, est assez grand, supérieur à 2δ . Donc la proposition 5.4 s'applique. La routine (entamée au lemme 5.6) montre qu'une telle pièce entre t_0 et une composante t_i dans R fournit une pièce relative, dans Γ , entre un conjugué cyclique de w et un conjugué cyclique de s_i . Si on a pris β assez grand, cette pièce sera de longueur supérieure à ξ fois la longueur de s_i . Comme il y a deux telles pièces et qu'elles sont clairement disjointes, l'une au moins est une pièce avec w , et cela conclut. \square

5.2 Finesse des triangles géodésiques

Elle résulte immédiatement de l'algorithme de Dehn relatif : il suffit de procéder exactement comme pour la preuve du théorème 3.14 de [Ch2], et cela montrerait la "forme" des triangles géodésiques dans un graphe de Cayley de $\Gamma/\mathcal{N}(\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_k)$ (fig. 30).

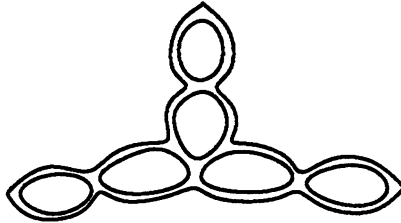


Fig. 30

Cela conclut la preuve du théorème 5.2.

Remerciement

Je tiens à remercier E. Ghys qui a dirigé ma thèse, que reprend en partie cet article.

Bibliographie

- [Bo] BOWDITCH (B.) . — *Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path metric spaces*, in *Group theory from geometrical viewpoint*, E. Ghys, A. Haefliger et A. Verjovski (eds), I.C.T.P. World Scientific (1991), pp. 64-167.
- [BZ] BURAGO (Y.D.) et ZALGALLER (V.A.) . — *Geometric Inequalities*, Springer Verlag (1988).
- [Ch1] CHAMPETIER (C.) . — *Propriétés génériques des groupes de type fini*, Thèse de doctorat, Université de Lyon I, décembre 1991.
- [Ch2] CHAMPETIER (C.) . — *Propriétés statistiques des groupes de présentation finie*, *Advances in Mathematics*, à paraître.
- [Ch3] CHAMPETIER (C.) . — *L'espace des groupes de type fini*, *Topology*, à paraître.
- [CDP] COORNAERT (M.), DELZANT (T.) et PAPADOPOULOS (A.) . — *Groupes et géométrie : les groupes hyperboliques de Gromov*, *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag 1441 (1991).
- [De1] DELZANT (T.) . — *Sous-groupes à deux générateurs des groupes hyperboliques*, in *Group theory from geometrical viewpoint*, E. Ghys, A. Haefliger et A. Verjovski (eds), I.C.T.P. World Scientific (1991), pp. 177-189.
- [De2] DELZANT (T.) . — *Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques*, prépublication.
- [Gh] GHYS (E.) . — *Les groupes hyperboliques*, Séminaire Bourbaki, Soc. Math. de France, Astérisque 189-190 (mars 1990).
- [GH] GHYS (E.) et DE LA HARPE (P.) (eds) . — *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*, Birkhäuser, *Progress in Math.* 83 (1990).
- [Gr1] GROMOV (M.) . — *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, in *Riemann surfaces and related topics*, *Ann. Math. Studies*, Princeton University Press 97 (1980), pp. 183-213.
- [Gr2] GROMOV (M.) . — *Filling riemannian manifolds*, *J. Diff. Geometry* 18 (1983), pp. 1-147.
- [Gr3] GROMOV (M.) . — *Hyperbolic groups*, in *Essays in group theory*, S. M. Gerstern (ed.), M.S.R.I. Publ., Springer Verlag 8 (1987), pp. 75-263.
- [Gr4] GROMOV (M.) . — *Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group*, non publié.
- [GLP] GROMOV (M.), LAFONTAINE (J.) et PANSU (P.) . — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic-Fernand Nathan (1981).
- [LS] LYNDON (R.C.) et SCHUPP (P.E.) . — *Combinatorial group theory*, Springer Verlag (1977).
- [Ma] MATHÉUS (F.) . — *Flot géodésique et groupes hyperboliques d'après M. Gromov* Mémoire de D.E.A. à l'E.N.S. Lyon (1990), Séminaire de topologie spectrale et géométrie, Chambéry-Grenoble (1990-1991), pp. 67-87.
- [NS] NEMYTSKII (V.V.) et STEPANOV (V.V.) . — *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press (1960).

Petite simplification dans les groupes hyperboliques

- [O1] OL'SHANSKII (A.Y.) .— *On the geometric method in the combinatorial group theory*, Proc. I.C.M., Warszawa, 1 (1984), pp. 415-423.
- [O12] OL'SHANSKII (A.Y.) .— *Periodic factor groups of hyperbolic groups*, Math. U.S.S.R., Sbornik, 72 (1992), pp. 519-541.
- [O13] OL'SHANSKII (A.Y.) .— *On residually homomorphisms and G -subgroups of hyperbolic groups*, prepublication.
- [RS] RIPS (E.) et SELA (Z.) .— *Canonical representatives and equations in hyperbolic groups*, preprint I.H.E.S.
- [Sh] SHORT (H.) .— *Notes on word hyperbolic groups*, in Group theory from geometrical viewpoint, E. Ghys, A. Haefliger et A. Verjovski (*eds*), I.C.T.P. World Scientific (1991), pp. 3-63.