ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PHILIPPE BÉNILAN
HAMIDOU TOURÉ

Solution entropique pour une équation parabolique-hyperbolique non linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 3, nº 1 (1994), p. 63-80

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1994_6_3_1_63_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. III, n° 1, 1994

Solution entropique pour une équation parabolique–hyperbolique non linéaire(*)

PHILIPPE BÉNILAN ET HAMIDOU TOURÉ(1)

RÉSUMÉ. — Nous donnons ici une version abstraite via la théorie des semi-groupes non linéaires dans L^1 d'un résultat récent de Escobedo, Vasquez et Zuazua pour l'équation $u_t = \Delta_x u - \partial_y f(u)$. Nous précisons ensuite les différentes formes possibles de la condition entropique et donnons une formule de représentation des solutions.

ABSTRACT. — We give an abstract version, using semi group theory in L^1, of a recent result of Escobedo, Vasquez and Zuazua on equation $u_t = \Delta_x u - \partial_y f(u)$. Then we make precise different form of the entropy condition and give a representation formula for the solution.

Introduction

Nous considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u = L_x u - \partial_y f(u) + w & \text{pour } (t,x,y) \in Q = \,]0\,,T\,[\, \times \Omega \times \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

associé à un opérateur L, générateur d'un C_0-semi-groupe linéaire sous-markovien sur $L^1(\Omega, B, \mu)$, où $T > 0$, $w \in L^1(Q)$, $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$; (Ω, B, μ) désigne un espace mesuré et f une fonction localement lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de L à $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ est symétrique. Nous désignerons par L_x l'extension de L à $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

(*) Reçu le 1 juillet 1993

(1) Équipe de Mathématiques, U.R.A. C.N.R.S. 741, Université de Franche-Comté, F-25030 Besançon Cedex (France)

Sous l'hypothèse f lipschitzienne strictement croissante, d'inverse lipschitzienne, dans la première partie, nous associons à L_x et f, un opérateur A de $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ défini par

$$Au = -L_x u + \partial_y f(u) \tag{2}$$

pour $u \in D(A) = W^{1,1}(\mathbb{R}, L^1(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, D(L))$.

Nous montrons alors que A est $s-T$-accrétif, sous-markovien à domaine dense et vérifie la "condition d'image".

Dans la seconde partie, grâce à la théorie générale des équations d'évolution dans un espace L^1, nous considérons une notion de solution entropique pour le problème (1) généralisant celle de Kruskov, pour laquelle nous obtenons un problème bien posé.

La dernière partie est consacrée à la formule de représentation des solutions entropiques de (1) lorsque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $v \equiv 0$.

Ces résultats développés dans le cadre abstrait de la théorie des semi-groupes non linéaires dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ s'applique naturellement au cas des opérateurs différentiels. Prenant $L = \Delta$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et $w = 0$, nous retrouvons, par des techniques totalement différentes, les résultats de Escobedo, Vasquez et Zuazua [EVZ] pour le problème

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u - \partial_y f(u) & \text{sur }]0\,,\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les résultats abstraits s'appliquent évidemment à d'autres exemples d'opérateurs L, par exemple au problème aux limites

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u - \partial_y f(u) + w & \text{sur }]0\,,T[\times \Omega \times \mathbb{R} \\ \lambda u + (1-\lambda)\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur }]0\,,T[\times \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u(0,\,\cdot\,) = u_0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $0 \le \lambda \le 1$.

1. Solutions intégrales

Dans cette section on suppose

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ lipschitzienne croissante} \\ \text{avec } \beta = f^{-1} \text{ lipschitzienne et } f(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

On définit l'opérateur A dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ par

$$Au = -L_x u + \partial_y f(u) \tag{1.2}$$

avec

$$D(A) = W^{1,1}\big(\mathbb{R}, L^1(\Omega)\big) \cap L^1\big(\mathbb{R}, D(L)\big)\,, \tag{1.3}$$

où $D(L)$ est muni naturellement de la norme du graphe.

Puisque f est lipschitzienne et $f(0) = 0$, pour $u \in D(A)$ on a $f(u) \in W^{1,1}\big(\mathbb{R}, L^1(\Omega)\big)$ et donc $Au \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ est bien défini. Étant donné que $D(L)$ est dense dans $L^1(\Omega)$, il est clair que :

$$D(A) \text{ est dense dans } L^1(\Omega \times \mathbb{R})\,. \tag{1.4}$$

L'opérateur L étant générateur d'un C_0-semi-groupe de contractions linéaires positives sur $L^1(\Omega)$, $-L$ est $s-T$-accrétif dans $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\int \alpha L u \,\mathrm{d}\mu \leq 0\,, \quad \forall\, u \in D(L)\,,\ \alpha \in L^\infty(\Omega)\,,\ \alpha \in \operatorname{sign}^+ u\,, \tag{1.5}$$

où sign^+ est le graphe d'Heaviside :

$$\operatorname{sign}^+ r = \begin{cases} \{1\} & \text{si } r > 0 \\ [\,0\,,1\,] & \text{si } r = 0 \\ \{0\} & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Étant donné u, $\overline{u} \in D(A)$, on a presque partout $x \in \Omega$ $f\big(u(x,\cdot)\big)$, $f\big(\overline{u}(x,\cdot)\big) \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ et donc

$$\int_{[u(x,\cdot)>\overline{u}(x,\cdot)]} \Big(\partial_y f\big(u(x,\cdot)\big) - \partial_y f\big(\overline{u}(x,\cdot)\big)\Big)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\partial_y f\big(u(x,\cdot)\big) - \partial_y f\big(\overline{u}(x,\cdot)\big) = 0 \quad \text{p.p. sur } \big[u(x,\cdot) = \overline{u}(x,\cdot)\big]\,.$$

Il en résulte immédiatement, grâce au théorème de Fubini, que l'opérateur A est $s-T$-accrétif dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \displaystyle\iint \alpha(Au - A\overline{u})\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \geq 0\,, \\ \forall\, u,\, \overline{u} \in D(A)\,,\ \alpha \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})\,,\ \alpha \in \operatorname{sign}^+(u - \overline{u})\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

En particulier pour tout $\lambda > 0$, $I + \lambda A$ est une bijection de $D(A)$ sur $R(I+\lambda A)$ et $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ est une T-contraction pour la norme $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \left\|(J_\lambda w - J_\lambda \overline{w})^+\right\|_{L^1(\Omega\times\mathbb{R})} \leq \left\|(w-\overline{w})^+\right\|_{L^1(\Omega\times\mathbb{R})}, \\ \forall\ w,\ \overline{w} \in R(I+\lambda A), \end{cases} \tag{1.7}$$

où pour $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max(r,0))$.

Notons que l'on a également le "principe du maximum"

$$\inf\operatorname{ess} w \leq J_\lambda w \leq \sup\operatorname{ess} w\,, \quad \forall\ w \in R(I+\lambda A)\,. \tag{1.8}$$

En effet, L étant générateur d'un semi-groupe sous-markovien on a

$$\int p(u) Lu \,\mathrm{d}\mu \leq 0\,, \quad \forall\ u \in D(A)\,, \forall\ p \in \mathcal{P}_0\,,$$

où $\mathcal{P}_0 = \left\{p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \mid p' \geq 0\,,\ p(0) = 0\right\}$. Il est clair d'autre part que

$$\int p\big(u(x,\cdot)\big)\partial_y f\big(u(x,\cdot)\big)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

$$\forall\ u \in D(A) \text{ p.p. } x \in \Omega\,,\ \forall\ p \in \mathcal{C}(\mathbb{R})\,,\ p(0) = 0\,,$$

et donc

$$\iint p(u) Au \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \geq 0\,, \quad \forall\ u \in D(A)\,,\ p \in \mathcal{P}_0 \tag{1.9}$$

ce qui implique immédiatement (1.8) (*cf.* par exemple [BC]).

Le résultat principal de cette section est la vérification de la "condition d'image" permettant d'appliquer la théorie des semi-groupes non linéaires.

THÉORÈME 1.— *Pour tout $\lambda > 0$, $R(I+\lambda A)$ est dense dans $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$. Plus précisément*

$$R(I+\lambda A) \supset L^1(\Omega\times\mathbb{R}) \cap L^2(\Omega\times\mathbb{R}) \cap BV\big(\mathbb{R}\,;\,L^1(\Omega)\big)\,. \tag{1.10}$$

Remplaçant L, f par λL, λf respectivement, on peut toujours supposer $\lambda = 1$. On va utiliser le lemme suivant.

LEMME 1.— *Étant donné*

$$w \in BV_{\mathrm{loc}}\big([\,0\,,\,\infty\,[\,;\,L^1(\Omega)\big) \cap L^2_{\mathrm{loc}}\big([\,0\,,\,\infty\,[\,;\,L^2(\Omega)\big)\,,$$

il existe $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}\big([\,0\,,\,\infty\,[\,;\,L^1(\Omega)\big)$ *unique tel que* $u(0) = 0$ *et p.p.* $y \in (0,\infty)$, $u(\,\cdot\,,y) \in D(L)$ *et*

$$u(\,\cdot\,,y) - Lu(\,\cdot\,,y) + \partial_y f\big(u(\,\cdot\,,y)\big) = w(\,\cdot\,,y)\,. \tag{1.11}$$

De plus pour tout $R > 0$,

$$c\big\|\partial_y f(u)\big\|^2_{L^2(\Omega\times]0,R[)} \le C\big\|w\big\|^2_{L^2(\Omega\times]0,R[)} \tag{1.12}$$

et

$$c\big\|\partial_y f(u)\big\|_{L^1(\Omega\times]0,R[)} \le \big\|w(0_+)\big\|_{L^1(\Omega)} + \big\|\partial_y w\big\|_{M(\Omega\times[0,R[)}\,, \tag{1.13}$$

où

$$0 < c \le \beta' \le C < \infty \tag{1.14}$$

et

$$\big\|\partial_y w\big\|_{M(\Omega\times[0,R[)} = \lim_{h\downarrow 0}\int_0^{R-h}\!\!\int \frac{\big|w(x\,,\,y+h) - w(x,y)\big|}{h}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \tag{1.15}$$

est la variation totale de w *par rapport à* $y \in [\,0\,,\,R\,[$.

Preuve du lemme.— **L'opérateur $B = (I - L)\beta$ de $L^1(\Omega)$ défini par $Bv = (I - L)\beta v$ avec $D(B) = \big\{v \in L^1(\Omega) \mid \beta(v) \in D(L)\big\}$ est *m*-accrétif dans $L^1(\Omega)$. En fait d'après (1.5), on a**

$$\begin{aligned}\int \alpha(Bv - B\overline{v}) \ge \int \alpha\big(\beta(v) - \beta(\overline{v})\big) = \int \big(\beta(v) - \beta(\overline{v})\big)^+ \ge\\ \ge c\int (v - \overline{v})^+\end{aligned} \tag{1.15'}$$

pour tout v, $\overline{v} \in D(B)$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathrm{sign}^+(v - \overline{v}) = \mathrm{sign}^+\big(\beta(v) - \beta(\overline{v})\big)$ où c est donné par (1.14); donc $B - cI$ est $s - T$-accrétif et *a fortiori* B est accrétif. D'autre part pour $w \in L^1(\Omega)$, l'équation $v - Bv = w$ est équivalente à $u + f(u) - Lu = w$ qui admet une solution puisque f est lipschitzienne.

Étant donné $w \in BV_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^1(\Omega)\big)$, utilisant la théorie des semi-groupes non linéaires ([B1], [BCP]), considérons la bonne solution v du problème d'évolution

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + Bv \ni w \quad \text{sur } [0\,,\,\infty[\,,\ v(0) = 0\,. \tag{1.16}$$

On a $v \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^1(\Omega)\big)$. Plus précisément puisque $B - cI$ est accrétif,

$$\begin{aligned}\big\|v(y+h) - v(y)\big\|_{L^1(\Omega)} \le \int_0^h e^{-c(y+h-z)}\big\|w(z)\big\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}z\,+ \\ + \int_0^h e^{-c(y-z)}\big\|w(z+h) - w(z)\big\|_{L^1(\Omega)}\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Supposons maintenant de plus $w \in L^2_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^2(\Omega)\big)$. On a alors $v \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^2(\Omega)\big)$ et, pour tout $R > 0$,

$$c\left\|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right\|^2_{L^2(\Omega\times]0,R[)} \le C\big\|w\big\|^2_{L^2(\Omega\times]0,R[)}\,. \tag{1.18}$$

Ceci se voit formellement à partir de l'estimation de l'énergie

$$\begin{aligned}\int_0^R\!\!\int \beta'(v)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)^2 \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int \Big((I-L)^{1/2}\beta\big(v(R)\big)\Big)^2\,\mathrm{d}\mu = \\ = \int_0^R\!\!\int \beta'(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,w\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\,,\end{aligned} \tag{1.19}$$

où $(I-L)^{1/2}$ est la racine carrée de l'opérateur auto-adjoint défini positif, fermeture dans $L^2(\Omega)$ de la restriction de $I - L$ à $L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Pour une démonstration rigoureuse de (1.18) et (1.19), on peut suivre la preuve du théorème 1 de [B2] (où le résultat est prouvé dans le cas $\mu(\Omega) < \infty$).

Puisque $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^1(\Omega)\big) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^2(\Omega)\big)$ est contenu dans $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}\big([0\,,\,\infty[\,;\,L^1(\Omega)\big)$ et B est m-accrétif, v est donc solution forte de (1.16) ([B1], [BCP]). Posant $u = \beta(v)$, on a ainsi prouvé le lemme, les estimations (1.12) et (1.13) se déduisant de (1.18) et (1.17) respectivement. □

Preuve du théorème 1.— **Fixons**

$$w \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^2(\Omega \times \mathbb{R}) \cap BV\big(\mathbb{R}\,;\, L^1(\Omega)\big)\,.$$

Étant donné $R > 0$, utilisant le lemme, il existe

$$u_R \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}\big([-R\,,\,\infty[\,;\, L^1(\Omega)\big)$$

tel que $u_R(\,\cdot\,, y) \in D(L)$ et vérifie (1.11). On prolonge u_R par 0 sur $\Omega \times\ ]-\infty\,, -R\,[$ de telle sorte que $u_R \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}\,;\, L^1(\Omega)\big)$.

On a les estimations :

$$c\big\|\partial_y f(u_R)\big\|^2_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})} \leq C\big\|w\big\|^2_{L^2(\Omega\times\mathbb{R})} \tag{1.20}$$

$$c\big\|\partial_y f(u_R)\big\|^2_{L^1(\Omega\times\mathbb{R})} \leq \big\|w\big\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^1(\Omega))} + \big\|\partial_y w\big\|_{M(\Omega\times\mathbb{R})} \tag{1.21}$$

par application de (1.12) et (1.13). On a aussi

$$\big\|u_R\big\|_{L^1(\Omega\times\mathbb{R})} \leq \big\|w\big\|_{L^1(\Omega\times\mathbb{R})} \tag{1.22}$$

puisque d'après (1.5)

$$\int \big|u_R(y)\big|\,\mathrm{d}\mu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int f\big(u_R(y)\big)\,\mathrm{d}\mu = \int \big|w(y)\big|\,\mathrm{d}\mu\,.$$

En particulier, $u_R \in D(A)$ et $u_R + Au_R = \omega_R$ où $w_R(x,y) = w(x,y)X_{[-R,\infty[}(y)$. Puisque $w_R \to w$ dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, il en résulte par accrétivité de A, que $u_R \to u$ dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$. D'après (1.20) et (1.21),

$$f(u) \in W^{1,2}\big(\mathbb{R}\,;\, L^2(\Omega)\big) \cap W^{1,1}\big(\mathbb{R}\,;\, L^1(\Omega)\big)\,.$$

Donc $u \in D(A)$ et $u + Au = w$. □

Appliquant la théorie des semi-groupes non linéaires ([B1], [BCP]), pour tout $u_0 \in L^1(\Omega\times\mathbb{R})$ et $w \in L^1\big(]0\,,\,T[\,\times\Omega\times\mathbb{R}\big)$, il existe une unique bonne solution $u \in \mathcal{C}\big([\,0\,,\,T\,]\,;\, L^1(\Omega\times\mathbb{R})\big)$ du problème d'évolution

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = w\,, \quad u(0) = u_0\,. \tag{1.23}$$

De plus, cette bonne solution est caractérisée par les inégalités intégrales. En d'autres termes, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.— *Pour tout* $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ *et* $w \in L^1(]0\,,T[\times\Omega\times\mathbb{R})$, *il existe une unique solution* $u \in \mathcal{C}([0\,,T]\,;L^1(\Omega\times\mathbb{R}))$ *avec* $u(0)=u_0$ *vérifiant*

$$\begin{cases} \forall\,\xi\in D(]0\,,T[)\,,\ \xi\geq 0\,,\ \ \forall\,\underline{u}\in D(A)\,,\\ \exists\,\alpha\in L^\infty(Q)\,,\ \ \alpha\in\operatorname{sign}(u-\underline{u})\ \textit{telle que}\\ \displaystyle\iiint \alpha\big\{(u-\underline{u})\xi'+(w-A\underline{u})\xi\big\}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\geq 0\,. \end{cases} \tag{1.24}$$

Notons enfin que, l'opérateur A étant T-accrétif, si u, $\overline{u}$ *sont les solutions correspondantes à* (u_0,w), $(\overline{u}_0,\overline{w})$ *respectivement, on a*

$$\begin{cases} \displaystyle\iint\big(u(t)-\overline{u}(t)\big)^+\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\leq\iint\big(u_0-\overline{u}_0\big)^+\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y+\\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad\qquad+\iiint\big(w-\overline{w}\big)^+\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,,\\ \forall\,t\in[0\,,T]\,, \end{cases} \tag{1.25}$$

et en particulier le "principe de comparaison"

$$u_0\leq\overline{u}_0\quad\textit{et}\quad w\leq\overline{w}\Rightarrow u\leq\overline{u}\,. \tag{1.26}$$

Également compte tenu de (1.8), on a le "principe du maximum"

$$\operatorname{inf\,ess}u_0+\int_0^T\operatorname{inf\,ess}w(t)\,\mathrm{d}t\leq u\leq\operatorname{sup\,ess}u_0+\int_0^T\operatorname{sup\,ess}w(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.27}$$

2. Solutions entropiques

Dans cette section on suppose seulement

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \text{localement lipschitzienne.} \tag{2.1}$$

On note

$$D_0=\big\{\psi\in D(L)\cap L^\infty(\Omega)\mid L\psi\in L^\infty(\Omega)\big\} \tag{2.2}$$

muni de la norme

$$\|\psi\|_{D_0}=\|\psi\|_{L^1}+\|\psi\|_{L^\infty}+\|L\psi\|_{L^1}+\|L\psi\|_{L^\infty}$$

qui en fait un espace de Banach.

Théorème 2

i) Étant donné $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ *et* $w \in L^1(Q)$ *les deux propriétés (2.3) et (2.4) suivantes sont équivalentes :*

$$\left\{\begin{aligned} &\iiint \operatorname{sign}_0(u-\psi)\,\{(u-\psi)(\xi_t + L_x\xi) + \\ &\qquad + \big(f(u)-f(\psi)\big)\xi_y + (w + L\psi)\xi\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \geq 0\,, \\ &\forall\, \psi \in D_0\,,\ \ \forall\, \xi \in D\big(]0, T[\,\times \mathbb{R}; D_0\big)\,,\ \ \xi \geq 0\,; \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\iiint \operatorname{sign}_0(u-\psi)\,\{(u-\psi)\xi_t + \\ &\qquad + \big(f(u)-f(\psi)\big)\xi_y + (w + L\psi)\xi\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \geq 0\,, \\ &\forall\, \psi \in D_0\,,\ \ \forall\, \xi \in D\big(]0, T[\,\times \mathbb{R}\big)\,,\ \ \xi \geq 0. \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

ii) Étant donné $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ *et* $w \in L^1(Q)$ *avec*

$$\int_0^T \big\|w(t)\big\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}\,\mathrm{d}t < \infty\,,$$

il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ *avec* $u(0) = u_0$ *vérifiant (2.3) et (2.4). De plus les estimations (1.25), (1.26) et (1.27) sont valables pour ces solutions.*

La preuve de ce théorème va occuper toute cette section.

Remarque 1.— **Nous remarquons d'abord que (2.3)⇒(2.4). En effet, fixons** $\psi \in D_0$, $\xi \in D(]0, T[\,\times \mathbb{R})$, $\xi \geq 0$ **et définissons, grâce au théorème de Fubini,** a, $b \in L^1(\Omega)$ **par**

$$a = \iint \operatorname{sign}_0(u-\psi)\,\{(u-\psi)\xi_t + \big(f(u)-f(\psi)\big)\xi_y + (w+L\psi)\xi\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y$$

$$b = \iint |u-\psi|\xi\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,.$$

On a $b \geq 0$. **Et appliquant (2.3) :**

$$\int (a\varphi + bL\varphi)\,\mathrm{d}\mu \geq 0\,,\quad \forall\, \varphi \in D_0\,,\ \varphi \geq 0\,, \tag{2.5}$$

on en déduit $\int a\,\mathrm{d}\mu \geq 0$ **(c'est-à-dire (2.4)) grâce au lemme suivant.**

Lemme 2.— *Étant donné $a, b \in L^1(\Omega)$, $b \geq 0$ vérifiant (2.5), on a*

$$\int a \, \mathrm{d}\mu \geq 0 .$$

Preuve du lemme 2.— Étant donné $\rho \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\rho \geq 0$ et $\lambda > 0$, on a $\varphi = (I - \lambda L)^{-1}\rho \in D_0$, $\varphi \geq 0$, et

$$L\varphi = \frac{(I - \lambda L)^{-1} - I}{\lambda} \rho .$$

Appliquant (2.5), puisque L est symétrique, on obtient

$$\int \left\{ (I - \lambda L)^{-1} a + \frac{(I - \lambda L)^{-1} b - b}{\lambda} \rho \right\} \rho \, \mathrm{d}\mu \geq 0 .$$

À la limite ceci est encore vrai pour tout $\rho \in L^\infty(\Omega)$, en particulier $\rho \equiv 1$. Puisque $b \geq 0$, on a $\int (I - \lambda L)^{-1} b \, \mathrm{d}\mu \leq \int b \, \mathrm{d}\mu$, et donc

$$\int (I - \lambda L)^{-1} a \, \mathrm{d}\mu \geq 0 .$$

En faisant $\lambda \to 0$, on obtient

$$\int a \, \mathrm{d}\mu \geq 0 . \square$$

Dans (2.3) et (2.4) on a utilisé la fonction sign_0 définie par

$$\mathrm{sign}_0 \, \sigma = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{|\sigma|} & \text{si } \sigma \neq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.— Notons que (2.3) (resp. (2.4)) est équivalent à

$$\begin{cases} \forall \; \psi \in D_0 \, , \; \forall \; \xi \in D\big(]0 \, , T[\, \times \mathbb{R} \, ; D_0\big) (\text{resp. } D\big(]0 \, , T[\, \times \mathbb{R}\big)) \, , \\ \xi \geq 0 \, , \;\; \exists \; \alpha \in L^\infty(Q) \, , \;\; \alpha \in \mathrm{sign}(u - \psi) \text{ telle que} \\ \displaystyle\iiint \alpha F \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}y \geq 0 \quad \text{avec} \\ F = (u - \psi)(\xi_t + L_x \xi) + \big(f(u) - f(\psi)\big)\xi_y + (w + L\psi)\xi \\ (\text{resp. } F = (u - \psi)\xi_t + \big(f(u) - f(\psi)\big)\xi_y + (w + L\psi)\xi). \end{cases} \tag{2.6}$$

Il est clair que (2.6) est impliquée par (2.3) (resp. 2.4). Pour prouver la réciproque, nous utilisons l'existence de $\rho \in D_0$ tel que $\rho > 0$ p.p. sur Ω (il suffit de prendre $\rho = (I-L)^{-1}\rho_0$ avec $\rho_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\rho_0 > 0$ p.p. sur Ω, *cf.* [Ar, Prop. 1.5]). Étant donné $\psi \in D_0$ et $\xi \in D(]0\,,T[\, \times \mathbb{R}\,; D_0)$ (resp. $D(]0\,,T[\, \times \mathbb{R})$), $\xi \geq 0$, considérons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha_\lambda \in L^\infty(Q)$, $\alpha_\lambda \in \operatorname{sign}(u - \psi - \lambda\rho)$ telle que l'inégalité intégrale de (2.6) en remplaçant ψ par $\psi + \lambda p$ soit satisfaite. Faisant $\lambda \to 0$, $\lambda > 0$, on a $\alpha_\lambda \to \alpha_+ = \operatorname{sign}_0(u - \psi_+)$ et donc l'inégalité intégrale de (2.6) est satisfaite avec $\alpha = \alpha_+$. De la même manière, elle est satisfaite avec $\alpha = \alpha_- = \operatorname{sign}_0(u - \psi_-)$. Il est alors clair qu'elle est satisfaite avec $\alpha = \operatorname{sign}_0(u - \psi)$. On a même

$$\iiint \operatorname{sign}_0(u-\psi) F \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \geq \left| \iiint_{[u=\psi]} F\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \right| .$$

Remarque 3.— Notons aussi que (2.3) et (2.4) ne dépendent que des valeurs de f dans l'intervalle $[\,m_-\,,\,m_+\,]$ où $m_- = \operatorname{inf\,ess} u$ et $m_+ = \operatorname{sup\,ess} u$. En effet pour tout $\psi \in L^\infty(\Omega)$ et $\xi \in D(\mathbb{R}\,; L^1(]0\,,T[\, \times \Omega))$,

$$\begin{aligned}\iiint_{\psi \notin [m_-,m_+]} & \operatorname{sign}_0(u-\psi) f(\psi) \xi_y \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{\psi < m_-} f(\psi)\,\mathrm{d}\mu \iint \xi_y \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y - \int_{\psi > m_+} f(\psi)\,\mathrm{d}\mu \iint \xi_y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y = 0\,.\end{aligned}$$

Preuve du théorème 2.— Notons d'abord que l'on peut toujours supposer que f vérifie (1.1). En effet, étant donné $u \in \mathcal{C}([\,0\,,T\,]\,; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ considérons $M > \|u\|_{L^\infty(Q)}$. Posons $c = \|f'\|_{L^\infty(-M,M)} + 1$ et définissons $\widetilde{u}(t,x,z) = u(t,x,z-ct)$ qui est aussi dans $\mathcal{C}([\,0\,,T\,]\,; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ avec $\widetilde{u}(0) = u(0)$. Faisant le changement de variable $y = z - ct$ et utilisant la remarque 3, on voit que u vérifie (2.3) (resp. (2.4)) si et seulement si $\widetilde{u}$ vérifie (2.3) (resp. (2.4)) correspondant à $\widetilde{w}(t,x,z) = w(t,x,z-ct)$ et n'importe quelle fonction $\widetilde{f}$ vérifiant $\widetilde{f}(r) = f(r) + cr$ sur $[\,-M\,,\,M\,]$. Compte tenu du choix de c, on peut toujours choisir $\widetilde{f}$ vérifiant (1.1).

Nous supposons donc maintenant que f vérifie (1.1) et adoptons les notations de la section 1. Considérons d'abord $u \in \mathcal{C}([\,0\,,T\,]\,; L^1(\Omega \times \mathbb{R})) \cap L^\infty(Q)$ vérifiant (2.4) et montrons que u vérifie (1.24). Ceci montrera que les estimations (1.25), (1.26) et (1.27) sont valables pour les solutions u de (2.4) et donc en particulier l'unicité de u vérifiant (2.4) et $u(0) = u_0$.

Il est clair que D_0 est un core pour L. Il suffit donc, pour prouver (1.24), de considérer

$$\overline{u} \in W^{1,1}(\mathbb{R}, L^1(\Omega)) \cap L^1(\mathbb{R}, D_0) \cap L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$$

et

$$\xi \in D(]0\,,T[)\,, \quad \xi > 0\,.$$

On utilise la méthode de S. N. Kruskov [Kr] en dédoublant la variable y et considérant $u(t,x,y)$ et $\overline{u}(x,z)$. Étant donné $\rho(y,z) \in D(\mathbb{R}^2)$, $\rho \geq 0$, on a en utilisant (2.4) avec $\psi(x) = \overline{u}(x,z)$ et intégrant en z,

$$\begin{aligned}\iiiint \operatorname{sign}_0(u-\overline{u})\,\big\{&(u-\overline{u})\xi'\rho + \\ &+ \big(f(u)-f(\overline{u})\big)\xi\rho_y + (w + L_x\overline{u})\xi\rho\big\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \geq 0\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

D'un autre côté, on a

$$\partial_z\left(\operatorname{sign}_0(u-\overline{u})\big(f(u)-f(\overline{u})\big)\right) = -\operatorname{sign}_0(u-\overline{u})\partial_z f(\overline{u})$$

puisque f est monotone, et donc

$$\int \operatorname{sign}_0(u-\overline{u})\big(f(u)-f(\overline{u})\big)\xi\rho_z\,\mathrm{d}z = \int \operatorname{sign}_0(u-\overline{u})\partial_z f(\overline{u})\xi\rho\,\mathrm{d}z\,. \tag{2.8}$$

Intégrant (2.8) en (t,x,y) et l'ajoutant à (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}\iiiint \operatorname{sign}_0(u-\overline{u})\,\big\{&(u-\overline{u})\xi'\rho + \\ &+ \big(f(u)-f(\overline{u})\big)\xi(\rho_y+\rho_z) + \big(w + L_x\overline{u} - \partial_z f(\overline{u})\big)\xi\rho\big\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \geq 0\,.\end{aligned}$$

Suivant S. N. Kruskov [Kr] (*cf.* aussi [B1]), ceci montre que retournant à une seule variable y, pour tout $\rho \in D(\mathbb{R})$, $\rho \geq 0$, il existe $\alpha \in L^\infty(Q)$, $\alpha \in \operatorname{sign}(u-\overline{u})$ telle que l'on ait l'inégalité intégrale de (1.24).

Nous prouvons enfin qu'une bonne solution u de (1.23) vérifie (2.3). Puisque nous savons déjà d'après la remarque 1 que (2.3) implique (2.4), utilisant les propriétés des bonnes solutions développées dans la section 1, ceci achèvera la preuve du théorème.

Nous suivons la démonstration de la proposition 2.11 de [B1]. Notons d'abord que, compte tenu de la remarque 2, (2.3) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l}\forall\ \psi \in D_0\,,\ \forall\ \xi \in D(\mathbb{R}; D_0)\,,\ \xi \geq 0\,,\ \exists\ \alpha \in L^\infty(Q)\,,\\ \alpha \in \operatorname{sign}(u-\psi) \text{ telle que pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T\,,\\ \displaystyle\iint |u(t)-\psi|\xi\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \leq \\ \displaystyle\quad \leq \iint |u(s)-\psi|\xi\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y + \int_s^t \iint \alpha\{(u-\psi)L_x\xi + \\ \qquad\qquad +\big(f(u)-f(\psi)\big)\xi_y(w+L\psi)\xi\big\}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\,.\end{array}\right. \tag{2.9}$$

Approchant w dans $L^1(Q)$ par des fonctions en escalier de $[\,0\,,T\,]$ dans $L^1(\Omega\times\mathbb{R})\cap L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})\cap BV\big(\mathbb{R}\,;L^1(\Omega)\big)$, il est clair qu'il suffit de prouver (2.9) pour une fonction w constante en temps à valeurs dans $L^1(\Omega\times\mathbb{R})\cap L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})\cap BV\big(\mathbb{R}\,;L^1(\Omega)\big)$; ce que nous supposons maintenant. Approchant u_0, on peut également supposer $u_0 \in L^1(\Omega\times\mathbb{R})\cap L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})\cap BV\big(\mathbb{R}\,;L^1(\Omega)\big)$. La bonne solution $u(t)$ est alors limite dans $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$ uniformément pour $t\in[\,0\,,T\,]$ des solutions $u^\varepsilon(t)$ du problème discrétisé

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} + Au^\varepsilon(t) = w & \text{pour } t>0\\ u^\varepsilon(t) = u_0 & \text{pour } t\leq 0.\end{array}\right.$$

Étant donné $\psi\in D_0$, $\xi\in\mathcal{D}(\mathbb{R};D_0)$, $\xi\geq 0$, on a par définition de A

$$\begin{aligned}&\frac{\big|u^\varepsilon(t)-\psi\big|-\big|u^\varepsilon(t-\varepsilon)-\psi\big|}{\varepsilon}\leq\\ &\quad\leq \operatorname{sign}_0\big(u^\varepsilon(t)-\psi\big)\frac{u^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t-\varepsilon)}{\varepsilon} =\\ &\quad= \operatorname{sign}_0\big(u^\varepsilon(t)-\psi\big)\left\{(w+L\psi)+L_x\big(u^\varepsilon(t)-\psi\big)+\right.\\ &\qquad\left.-\ \partial_y\left(f\big(u^\varepsilon(t)\big)-f(\psi)\right)\right\}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

D'après l'inégalité de Kato (*cf.* [Ar]) compte tenu de la symétrie de L, on a

$$\int \operatorname{sign}_0\big(u^\varepsilon(t)-\psi\big)L_x\big(u^\varepsilon(t)-\psi\big)\xi\,\mathrm{d}\mu \leq \int \big|u^\varepsilon(t)-\psi\big|L_x\xi\,\mathrm{d}\mu\,.$$

On a aussi

$$\operatorname{sign}_0\big(u^\varepsilon(t)-\psi\big)\partial_y\left(f\big(u^\varepsilon(t)\big)-f(\psi)\right) = \partial_y\left|f\big(u^\varepsilon(t)\big)-f(\psi)\right|$$

et donc, en multipliant (2.10) par ξ et intégrant, on obtient pour $(i-1)\varepsilon < s \le i\varepsilon \le (j-1)\varepsilon < t \le j\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
&\iint \left|u^\varepsilon(t) - \psi\right|\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y \le \\
&\quad \le \iint \left|u^\varepsilon(s) - \psi\right| \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y + \int_{i\varepsilon}^{j\varepsilon} \iint \operatorname{sign}_0(u^\varepsilon - \psi) \times \\
&\qquad\qquad \times \left\{(w + L\psi)\xi + (u^\varepsilon + \psi)L_x\xi + \big(f(u^\varepsilon) - f(\psi)\big)\xi_y\right\} \mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Passant à la limite, on obtient bien (2.9). □

Remarque 4.— La preuve (sous l'hypothèse (1.1)) qu'une bonne solution u de (1.23) vérifie (2.3) s'applique de façon immédiate pour montrer que u est solution faible de

$$\partial_t u + \partial_y f(u) = L_x u + w$$

au sens

$$\begin{cases} \displaystyle\iiint \left\{u(\xi_t + L_x\xi) + f(u)\xi_y + w\xi\right\} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}y = 0\,, \\ \forall\, \xi \in D\big(]0\,,T[\, \times \mathbb{R}\,;\, D_0\big)\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

La preuve du théorème montre en fait que toute fonction $u \in \mathcal{C}\big([0\,,T]\,;\,L^1(\Omega \times \mathbb{R})\big) \cap L^\infty(Q)$ vérifiant (2.3) (ou (2.4)) vérifie également (2.11). Notons que ceci peut se voir directement sous des hypothèses sur L, par exemple s'il existe une suite (ψ_n) dans D_0 telle que $\psi_n \to 1$ p.p. et $(L\psi_n)$ converge dans $L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$. Par contre, nous ne voyons pas comment le montrer dans le cas général sans passer par l'intermédiaire des bonnes sulutions.

3. Formule de représentation

Dans cette section, on suppose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2\,. \tag{3.1}$$

Compte tenu du théorème 2, on peut associer au problème

$$\partial_t u + \partial_y f(u) = L_x u \tag{3.2}$$

un semi-groupe $\big(S_{f,L}(t)\big)$ sur $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$: pour $u_0\in L^1(\Omega\times\mathbb{R})\cap L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$,

$$u(t)=\big(S_{f,L}(t)\big)u_0$$

est l'unique solution $u\in\mathcal{C}\big([\,0\,,\,\infty[\,;\,L^1(\Omega\times\mathbb{R})\big)\cap L^\infty(Q)$ avec $u(0)=u_0$ vérifiant (2.3) (avec $w=0$). Puisque $u_0\to u(t)$ est une contraction dans $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$ (*cf.* (1.25)), elle se prolonge par continuité en une contraction $S_{f,L}(t)$ partout définie sur $L^1(\Omega\times\mathbb{R})$.

Dans le cas $f\equiv 0$, l'équation (3.2) se réduit à

$$\partial_t u=L_x u\,,$$

et on a pour tout $t\geq 0$:

$$\big(S_{0,L}(t)u_0\big)(x,y)=\big(e^{tL}u_0(\,\cdot\,,y)\big)(x)\quad\text{p.p. }(x,y)\in(\Omega\times\mathbb{R})\,. \tag{3.3}$$

Dans le cas $L=0$, l'équation (3.2) se réduit à la loi de conservation

$$\partial_t u+\partial_y f(u)=0\,, \tag{3.4}$$

et on a pour tout $t\geq 0$:

$$\big(S_{f,0}(t)u_0\big)(x,y)=\big(T(t)u_0(x,\,\cdot)\big)(y)\quad\text{p.p. }(x,y)\in(\Omega\times\mathbb{R})\,, \tag{3.5}$$

où $T(t)$ est le semi-groupe sur $L^1(\mathbb{R})$ associé à (3.4) sur $]0\,,\,\infty[\,\times\mathbb{R}$. Pour $u_0\in L^1(\Omega)\cap L^\infty(\mathbb{R})$, $u(t)=T(t)u_0$ est l'unique solution $u\in\mathcal{C}\big([\,0\,,\,\infty[\,;\,L^1(\Omega)\big)\cap L^\infty\big(]\,0\,,\,\infty[\,\times\mathbb{R}\big)$ avec $u(0)=u_0$ vérifiant les conditions entropiques de Kruskov

$$\begin{cases}\displaystyle\iint \operatorname{sign}_0(u-k)\,\big\{(u-k)\xi_t+\big(f(u)-f(k)\big)\xi_y\big\}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\geq 0\,,\\ \forall\,k\in\mathbb{R}\,,\ \xi\in\mathcal{D}\big(]\,0\,,\,\infty[\,\times\mathbb{R}\big)\,,\ \xi\geq 0\,.\end{cases} \tag{3.6}$$

THÉORÈME 3.— *Pour tout $u_0\in L^1(\Omega\times\mathbb{R})$ et $T>0$*

$$S_{f,L}(t)u_0=L^1-\lim_{n\to\infty}\left(S_{0,L}\Big(\frac{t}{n}\Big)S_{f,0}\Big(\frac{t}{n}\Big)\right)^n u_0 \tag{3.7}$$

uniformément pour $t\in[\,0\,,\,T\,]$.

Preuve du théorème 3.— Supposons d'abord que f vérifie (1.1) et posons

$$G_f(t) = S_{0,L}(t)S_{f,0}(t) .$$

Nous allons montrer que

$$\frac{u - G_t(t)u}{t} \longrightarrow Au \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \tag{3.8}$$

pour tout $u \in D(\mathbb{R}\,; D(L))$. Puisque $D(\mathbb{R}\,; D(L))$ est un core pour A et $S_{f,L}(t) = e^{-tA}$ (au sens de théorie non linéaire), (3.7) résultera du théorème de Brézis et Pazy [BP].

Fixons donc $u \in D(\mathbb{R}\,; D(L))$ et montrons (3.8). Pour cela notons d'abord que f étant de classe $\mathcal{C}^2$ et $u_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors d'après la méthode des caractéristiques, il existe $t_0 > 0$ telle que la fonction

$$(t, y) \in [\,0\,, t_0\,] \times \mathbb{R} \longrightarrow \big(T(t)u_0\big)(y) .$$

Soit $\mathcal{C}^1$ à support compact; on aura donc alors évidemment

$$\frac{u_0 - T(t)u_0}{t} \longrightarrow \partial_y f(u_0) \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}) . \tag{3.9}$$

Rappelons, puisque $T(t)$ est une contraction, que

$$\left\| \frac{u_0 - T(t)u_0}{t} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \left\| \partial_y f(u_0) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} . \tag{3.10}$$

Écrivons

$$\begin{aligned} \frac{u - G_f(t)u}{t} - Au = &\left(\frac{u - S_{0,L}(t)u}{t} + L_x u \right) + \\ &+ S_{0,L}(t) \left(\frac{u - S_{f,0}(t)u}{t} - \partial_y f(u) \right) + \\ &+ \big(S_{0,L}(t)\partial_y f(u) - \partial_y f(u)\big) \end{aligned}$$

et évaluons $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$, les normes dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$ des trois termes du deuxième membre.

Puisque $\left(S_{0,L}(t)\right)$ est continue dans $L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $\lim_{t\to 0} I_3(t) = 0$. On a

$$I_2(t) \leq \int \left\| \frac{u(x,0) - T(t)u(x,\,\cdot\,)}{t} - \partial_y f\big(u(x,\,\cdot\,)\big) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \mathrm{d}\mu(x)\,,$$

et donc $\lim_{t\to 0} I_2(t) = 0$ grâce à (3.9) et (3.10). De même $\lim_{t\to 0} I_1(t) = 0$ puisque pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^{tL}u(\,\cdot\,,y) - u(\,\cdot\,,y)}{t} \longrightarrow Lu(\,\cdot\,,y) \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)$$

$$\left\| \frac{e^{tL}u(\,\cdot\,,y) - u(\,\cdot\,,y)}{t} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \left\| Lu(\,\cdot\,,y) \right\|_{L^1(\Omega)}.$$

Nous prouvons maintenant le résultat dans le cas général (c'est-à-dire sans supposer que f vérifie (1.1)). On peut toujours supposer $u_0 \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$; soit $M > \|u_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})}$. D'après la preuve du théorème 2, on a

$$\big(S_{f,L}(t)u_0\big)(x,y) = \big(S_{\tilde{f},L}(t)u_0\big)(x\,,\,y + ct)\,, \tag{3.11}$$

où

$$c = \|f'\|_{L^\infty(-M,M)} + 1\,, \quad \tilde{f}(r) = f(r) + cr \text{ sur } [-M\,,\,M]$$

et $\tilde{f}$ vérifie (1.1) (on peut toujours choisir $\tilde{f}$ de classe C^2).

D'après la première partie de cette preuve, on a

$$S_{\tilde{f},L}(t)u_0 = L^1 - \lim_{n\to\infty} \left(S_{0,L}\left(\frac{t}{n}\right) S_{\tilde{f},0}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u_0\,. \tag{3.12}$$

De (3.11) on déduit

$$\big(G_{\tilde{f}}(t)u_0\big)(x,y) = \big(G_f(t)u_0\big)(x\,,\,y - ct)$$

puisque $\|G_f(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})} < M$, on peut itérer pour obtenir

$$\big(G_{\tilde{f}}(t)^n u_0\big)(x,y) = \big(G_f(t)^n u_0\big)(x\,,\,y - nct)\,.$$

Passant à la limite, (3.11) et (3.12) donnent (3.7). □

Bibliographie

[Ar] ARENDT (W.) .— *Kato's inequality : a characterization of generators of positive semigroups*, Proc. Roy. Irish Acad. **84** A, n° 2 (1982), pp. 155-174.

[B1] BÉNILAN (PH.) .— *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay (1972).

[B2] BÉNILAN (PH.) .— *Sur un problème d'évolution non monotone dans $L^2(\Omega)$*, Publications Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon. Fascicule n° 2 (1975-76).

[BC] BÉNILAN (PH.) et CRANDALL (M.-G.) .— *Completely accretive operators, in semi-group theory and evolution equations*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **135** (1991), pp. 41-75.

[BCP] BÉNILAN (PH.), CRANDALL (M.-G.) et PAZY (A.) .— *Evolution equation governed by accretive operators*, À paraître.

[BP] BRÉZIS (H.) et PAZY (A.) .— *Convergence and approximation of non linear semi-groups in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **9** (1972), pp. 63-74.

[EVZ] ESCOBEDO (M.), VASQUEZ (J.-L.) et ZUAZUA (E.) .— *Entropy solutions for diffusion-convection equations with partial diffusivity*, À paraître.

[Kr] KRUSKOV (S.N.) .— *First order quasilinear equation in several independent variables*. Mat. U.S.S.R. Sbornik **10** (1970), pp. 217-243.