

NICOLAS POUYANNE

**Une résolution en singularités toriques simpliciales  
des singularités-quotient de dimension trois**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 1, n<sup>o</sup> 3  
(1992), p. 363-398

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1992\\_6\\_1\\_3\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_3_363_0)

© Université Paul Sabatier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Une résolution en singularités toriques simpliciales des singularités-quotient de dimension trois<sup>(\*)</sup>

NICOLAS POUYANNE<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Étant donné un sous-groupe fini  $G$  du groupe linéaire d'un espace vectoriel complexe  $V$  de dimension trois, on construit une variété algébrique quasi-projective  $X_G$  dont les singularités sont toriques simpliciales, et un morphisme propre et birationnel  $f : X_G \rightarrow V/G$  qui est un isomorphisme au-dessus du lieu lisse de  $V/G$ . On précise comment calculer les singularités de  $X_G$  en fonction des sous-groupes d'isotropie de  $G$ ; enfin, on présente les tables des configurations de tous les sous-groupes finis primitifs de  $PGL(3, \mathbb{C})$ . On donne en appendice la classification, en dimension trois, des quotients par des groupes abéliens qui ont des singularités canoniques, et de toutes les singularités-quotient terminales.

**ABSTRACT.** — Given a finite subgroup  $G$  of the linear group of a complex 3-dimensional vector space  $V$ , we build a quasi-projective algebraic variety  $X_G$  whose singularities are all simplicial toric, and a proper birational morphism  $f : X_G \rightarrow V/G$  which is an isomorphism above the regular locus of  $V/G$ . We explain how one can calculate the singularities of  $X_G$  in terms of isotropy subgroups of  $G$ ; at last, we present tables of configurations of all primitive finite subgroups of  $PGL(3, \mathbb{C})$  in the complex projective plane. We give in an appendix the classification of three-dimensional quotients by abelian finite groups with canonical singularities, and of all three-dimensional terminal quotient-singularities.

---

### Introduction

L'objet de ce travail s'inscrit dans l'étude locale des quotients de variétés algébriques complexes lisses de dimension trois par des groupes finis d'automorphismes, c'est-à-dire des quotients  $\mathbb{C}^3/G$  où  $G$  est un sous-groupe fini de  $GL(3, \mathbb{C})$ .

---

(\*) Reçu le 13 novembre 1992

(1) Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07 (France)

Le cas de la dimension deux a été largement étudié (Du Val, Brieskorn et beaucoup d'autres encore) en relation avec la géométrie de la désingularisation minimale des quotients de  $\mathbb{C}^2$  par les sous-groupes finis de  $GL(2, \mathbb{C})$ , et la notion de singularité rationnelle.

Le cas de la dimension trois est moins bien connu, en particulier parce que la notion de résolution minimale est moins bien comprise. Cependant, elle trouve un regain d'intérêt vu les progrès récents dans la classification birationnelle des variétés algébriques de dimension trois.

En s'inspirant au départ d'une idée de Brieskorn [B], on décrit pour chaque quotient  $\mathbb{C}^3/G$  une variété algébrique quasi-projective  $X_G$  n'ayant que des singularités toriques simpliciales, et un morphisme propre et birationnel  $f : X_G \rightarrow \mathbb{C}^3/G$  qui soit un isomorphisme au-dessus du lieu des points lisses de  $\mathbb{C}^3/G$  (théorème de la section 2). On dit qu'une variété a une singularité torique simpliciale en un point lorsque son germe analytique en ce point est isomorphe au germe à l'origine d'une variété torique affine dont le cône des sous-groupes à un paramètre (ou le cône des caractères) est engendré par un simplexe de dimension maximale. L'intérêt d'un tel modèle réside dans la simplicité de telles singularités, qui ont une description combinatoire bien connue, et dont on sait explicitement calculer des modèles à singularités canoniques ou terminales [R] et par désingularisations (par exemple [KKMS] ou [D]).

La méthode employée est la suivante. Dans le cas général (celui des groupes dont les orbites dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ont toutes au moins quatre points), on éclate d'abord l'origine de  $\mathbb{C}^3$ , puis les transformées strictes des droites de  $\mathbb{C}^3$  dont les groupes d'isotropie ne sont pas abéliens. Le quotient de la variété quasi-projective ainsi obtenue par l'action induite du groupe répond au problème.

La section 1 rassemble des résultats connus et fréquemment utilisés ici concernant l'action d'un groupe fini d'automorphismes sur une variété quasi-projective lisse. La section 2 établit le modèle  $(X_G, f)$  tandis que la section 3 indique comment calculer ses singularités. Enfin, en s'appuyant sur une classification des sous-groupes finis de  $PGL(3, \mathbb{C})$  par Miller, Blichfeldt et Dickson [MBD], on calcule à la section 4 les sous-groupes d'isotropie de l'action de ces groupes sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , étape indispensable au calcul des singularités du modèle décrit. Dans un appendice autonome, on montre comment déduire les singularités-quotient terminales de dimension trois de l'étude des variétés toriques simpliciales.

Dans tout ce texte, une *singularité-quotient* de dimension  $n$  est un germe analytique à l'origine de l'espace  $V/G$  des orbites d'un espace vectoriel complexe  $V$  de dimension  $n$  sous l'action naturelle d'un sous-groupe fini de  $GL(n, \mathbb{C})$ .

## 1. Action d'un groupe fini d'automorphismes sur une variété quasi-projective lisse

### 1.1. Variété quotient

Les propositions suivantes sont bien connues.

**PROPOSITION 1.** — *Soient  $X$  une variété algébrique quasi-projective lisse et  $G$  un groupe fini d'automorphismes de  $X$ . L'espace des orbites  $X/G$  est muni d'une structure de variété algébrique quasi-projective, et le morphisme canonique  $X \rightarrow X/G$  est fini.*

Dans la situation de cette proposition, on notera  $\bar{x}$  l'image dans  $X/G$  de tout élément  $x$  de  $X$ , et  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$ . On notera aussi  $G_x$  le groupe d'isotropie  $\{g \in G \mid gx = x\}$  de  $x$ .

**PROPOSITION 2.** — *Pour tout point (fermé)  $x$  de  $X$ , l'action de  $G_x$  sur  $X$  induit une action de  $G_x$  sur  $T_x X$ , et les germes analytiques  $(X/G, \bar{x})$  et  $(T_x X/G_x, \bar{0})$  sont isomorphes.*

*Élément de preuve.* — La conclusion étant locale, on peut supposer que  $X$  est affine ( $G$  est fini). Alors, l'action de  $G_x$  sur  $X$  permet de définir un  $G_x$ -morphisme  $X \rightarrow T_x X$  et le  $G_x$ -diagramme commutatif ci-dessous, dans lequel les flèches horizontales sont des morphismes étales en  $x$  et  $\bar{x}$  respectivement, envoyant  $x$  sur  $0$  et  $\bar{x}$  sur  $\bar{0}$  respectivement.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & T_x X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \longrightarrow & T_x X/G_x \end{array}$$

Pour plus de précisions, voir [S1].

*Remarque.* — Si un groupe  $G$  agit sur deux variétés algébriques  $X$  et  $Y$ , un morphisme  $G$ -équivariant  $X \rightarrow Y$  sera dit  *$G$ -morphisme*. On parlera de

même de  $G$ -diagramme commutatif et de  $G$ -suite exacte lorsque tous les morphismes seront équivariants.

## 1.2 Lieu singulier d'une singularité-quotient de dimension trois

Soient  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension trois,  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(V)$  et  $\pi : V \rightarrow V/G$  la surjection canonique. On appelle origine de  $V/G$  l'image par  $\pi$  de l'origine de  $V$ .

Le théorème de Chevalley [Ch] affirme que  $V/G$  est lisse si et seulement si  $G$  est engendré par ses pseudo-réflexions (une pseudo-réflexion est un élément de  $GL(V)$  admettant 1 pour valeur propre de multiplicité deux). Un tel groupe sera dit *de réflexions*. On en déduit à l'aide de la proposition 2, ci-dessus, que les points singuliers de  $V/G$  sont les images par  $\pi$  des points de  $V$  dont les groupes d'isotropie ne sont pas des groupes de réflexions. Le lieu singulier de  $V/G$  — s'il n'est pas réduit à l'origine — est donc une réunion de courbes rationnelles passant par l'origine de  $V/G$ , lisses (car normales) et disjointes hors de celle-ci. En outre, si  $x \in V \setminus \{0\}$ , le germe analytique  $(V/G, \bar{x})$  est isomorphe à un produit local  $(\mathbb{C} \times W/\Gamma, (0, \bar{0}))$  où  $W$  est un plan complexe et  $\Gamma$  un sous-groupe fini (isomorphe à  $G_x$ ) de  $GL(\Gamma)$ . La singularité que l'on cherche à mieux comprendre est celle de l'origine de  $V/G$ .

*Remarque.* — Un sous-groupe de  $GL(V)$  est dit *petit* lorsqu'il ne contient aucune pseudo-réflexion. Le germe analytique de  $V/G$  à l'origine est isomorphe au germe analytique à l'origine d'un quotient  $V'/G'$ , où  $V'$  est un espace vectoriel complexe de dimension trois et  $G'$  un petit sous-groupe fini de  $GL(V')$  isomorphe au quotient de  $G$  par le sous-groupe  $H$  engendré par ses pseudo-réflexions [Pr]. En effet,  $V/G$  est (algébriquement) isomorphe à  $(V/H)/(G/H)$  — le sous-groupe  $H$  de  $G$  est distingué — et  $V/H$  est lisse (Chevalley).

## 1.3 Isotropie abélienne et variété torique simpliciale

On appelle *variété torique affine* toute variété affine  $X_\sigma = \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma \cap M]$ , où  $M$  est un réseau et  $\sigma$  un cône polyédral de  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Lorsque  $\sigma$  est engendré par un simplexe de  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  de dimension maximale,  $X_\sigma$  est dite *variété torique simpliciale*. On dit qu'une variété algébrique quasi-projective a en un point (fermé)  $x$  une *singularité torique* (resp. une *singularité torique simpliciale*) si son germe analytique en  $x$  est isomorphe au germe analytique à l'origine d'une variété torique affine (resp. simpliciale).

Il est bien connu (cf. par exemple [KKMS] ou l'appendice) qu'une variété algébrique affine est une variété torique simpliciale si et seulement si c'est une variété quotient  $V/G$ , où  $V$  est un espace vectoriel complexe, et  $G$  un sous-groupe abélien fini de  $GL(V)$ . D'autre part, il est prouvé dans [Pr] que deux petits sous-groupes finis de  $GL(V)$  définissent des singularités-quotient isomorphes si et seulement s'ils sont conjugués. D'après la proposition 2 ci-dessus, on en déduit le lemme suivant.

**LEMME .** — Soit  $X$  une variété algébrique quasi-projective complexe lisse,  $x$  un point (fermé) de  $X$ , et  $G$  un groupe fini d'automorphismes de  $X$ . Alors,  $X/G$  a en  $\bar{x}$  une singularité torique simpliciale si et seulement si le quotient du groupe d'isotropie  $G_x$  par le sous-groupe engendré par ses pseudo-réflexions (dans  $T_x X$ ) est abélien.

*Remarque.* — Soit  $X = \text{Spec}(A)$  une variété torique affine non simpliciale. Alors, le germe analytique à l'origine de  $X$  n'est pas isomorphe à une singularité-quotient.

En effet, le groupe des classes de diviseurs  $C(A)$  contient des éléments d'ordre infini (il est de torsion si et seulement si  $X$  est une variété torique simpliciale) et, en notant  $\widehat{A}$  le complété de  $A$  à l'origine, l'homomorphisme canonique  $i : C(A) \rightarrow C(\widehat{A})$  est injectif [Bk, p. 215].

D'autre part, si  $G$  est un sous-groupe fini de  $GL(n, \mathbb{C})$ , si  $\widehat{S}$  est le complété de  $S = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$  et  $\widehat{S}^G$  l'algèbre des invariants de  $\widehat{S}$  sous l'action de  $G$ , le groupe  $C(\widehat{S}^G)$  est de torsion (si  $I$  est un idéal premier de hauteur un de  $\widehat{S}^G$  et, si  $f$  est un générateur de l'idéal principal  $I \cdot \widehat{S}$  de  $\widehat{S}$ , alors  $I^{|G|}$  est engendré par  $\prod_{g \in G} g \cdot f$ ).

## 2. Construction du modèle à singularités toriques

Dans toute cette section,  $V$  désigne un espace vectoriel complexe de dimension trois,  $G$  un petit sous-groupe fini de  $GL(V)$ ,  $\overline{V}$  la variété-quotient  $V/G$  et  $\pi : V \rightarrow \overline{V}$  la surjection canonique.

### 2.1 Action sur l'éclaté de l'origine de $V$

Soit  $\sigma_0 : B_0 \rightarrow V$  l'éclatement de l'origine de  $V$ . On note  $E$  sa fibre exceptionnelle ( $E \cong \mathbb{P}(V)$ ) et  $\varpi : B_0 \rightarrow E$  la projection faisant de  $B_0$  un fibré en droites sur  $E$  (c'est le fibré  $\mathcal{O}_E(-1)$ ).

L'action de  $G$  sur  $V$  induit une action de  $G$  sur  $B_0$  et définit la variété quasi-projective  $\overline{B_0} = B_0/G$ . On note  $\pi_0 : B_0 \rightarrow \overline{B_0}$  la surjection canonique,  $\overline{E}$  l'image de  $E$  par  $\pi_0$  et  $\overline{\sigma_0} : \overline{B_0} \rightarrow \overline{V}$  le morphisme propre et birationnel induit. La situation est résumée dans le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 E & \hookrightarrow & B_0 & \xrightarrow{\pi_0} & \overline{B_0} & \hookleftarrow & \overline{E} \\
 \downarrow & & \downarrow \sigma_0 & & \downarrow \overline{\sigma_0} & & \downarrow \\
 \{0\} & \hookrightarrow & V & \xrightarrow{\pi} & \overline{V} & \hookleftarrow & \{0\}
 \end{array}$$

La restriction de  $\overline{\sigma_0}$  à  $\overline{B_0} \setminus \overline{E}$  est un isomorphisme sur  $\overline{V} \setminus \{0\}$ .

DÉFINITION . — Un sous-groupe de  $GL(V)$  est dit réductible lorsqu'il stabilise un sous-espace propre de  $V$ . Sinon, il est dit irréductible.

PROPOSITION 1. — Le germe analytique en tout point de  $\overline{B_0}$  est isomorphe à une singularité-quotient par un sous-groupe réductible de  $GL(V)$ .

Preuve. — Soit  $x \in B_0$ . L'application tangente de  $\varpi : B_0 \rightarrow E$  induit la  $G_x$ -suite exacte d'espaces vectoriels complexes

$$0 \rightarrow d_x \rightarrow T_x B_0 \rightarrow T_{\varpi(x)} E \rightarrow 0 :$$

$d_x$  est une droite de  $T_x B_0$ , stable sous l'action de  $G_x$ . On conclut à l'aide de la proposition 2 du paragraphe 1.1.

LEMME . — Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points de  $E$  dont l'image par  $\pi_0$  est sur la transformée stricte d'une courbe de points singuliers de  $\overline{V}$ . Alors, pour tout  $x \in E \setminus \mathcal{E}$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  est cyclique.

Preuve. — L'homomorphisme de groupes  $G_x \rightarrow GL(d_x) \cong \mathbf{C}^*$ , qui à tout élément de  $G_x$  associe sa restriction à la droite  $G_x$ -stable  $d_x$ , est injectif si  $x \in E \setminus \mathcal{E}$  (on note que  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points de  $E$  sur la transformée stricte par  $\sigma_0$  des droites de  $V$  dont les points ont une isotropie non triviale).

PROPOSITION 2. — Les points de  $\overline{E}$  en lesquels  $\overline{B_0}$  a une singularité qui n'est pas torique sont en nombre fini. Ce sont les images par  $\pi_0$  des points de  $E$  dont le groupe d'isotropie n'est pas abélien.

Preuve. — L'ensemble  $\mathcal{E}$  du lemme est fini; la première partie de l'assertion en résulte grâce au lemme du paragraphe 1.3. Si  $x \in E$ , les pseudo-réflexions de l'action de  $G_x$  sur  $T_x B_0$  sont les homothéties de l'action de

$G$  sur  $V$  (regarder l'action de  $G_x$  sur  $T_{\mathcal{W}(x)}E$ ; si l'on doute encore, lire le court paragraphe 3.1). Elles engendrent donc un sous-groupe central de  $G_x$ . Ainsi,  $G_x$  est abélien si et seulement si son quotient par le sous-groupe engendré par ses pseudo-réflexions l'est. On conclut à l'aide de la remarque du paragraphe 1.2.

La fibre exceptionnelle de  $\bar{\sigma}_0$  est le quotient de  $E \cong \mathbb{P}(V)$  par l'action induite de  $G$ . C'est une surface normale rationnelle, en général singulière.

*Remarques*

1. Si  $\bar{V}$  a une singularité isolée, le lemme montre que les singularités de  $\bar{B}_0$  sont toutes des quotients par des groupes cycliques. La variété  $X_G = \bar{B}_0$  et le morphisme birationnel  $f = \bar{\sigma}_0 : \bar{B}_0 \rightarrow \bar{V}$  répondent au problème posé.
2. Il se peut que, même si  $\bar{V}$  n'a pas de singularité isolée,  $\bar{B}_0$  soit un modèle conforme à nos attentes. C'est le cas, par exemple, pour les sous-groupes imprimitifs<sup>(\*)</sup> finis de  $GL(V)$ , dont l'action sur une orbite à trois points dans  $\mathbb{P}(V)$  induit un homomorphisme *surjectif* de  $G$  sur le groupe des permutations paires de ces trois points. En effet, on vérifie qu'alors les groupes d'isotropie sont abéliens.  $G$  est conjugué à un produit semi-direct interne entre un groupe fini de matrices diagonales et le groupe engendré par

$$T = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soit  $e_3 = \exp(2i\pi/3)$ . Soit  $G$  le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \mathbb{C}^3 \quad \text{et} \quad x = (1 : 0 : 0) \in E.$$

Le groupe d'isotropie de  $x$  est  $G$  tout entier et  $\bar{B}_0$  a en  $\pi_0(x)$  un germe analytique isomorphe à celui de  $\bar{V}$  à l'origine (la section 3 présente une méthode de calcul des singularités de  $\bar{B}_0$ ).

---

<sup>(\*)</sup> Un sous-groupe fini de  $GL(V)$  est dit *imprimitif* lorsqu'il admet dans  $\mathbb{P}(V)$  une orbite à trois points, et que toutes ses orbites y ont au moins trois points.



Cet exemple montre que le passage au quotient de l'éclaté de l'origine par l'action induite n'améliore pas nécessairement les singularités de  $\overline{V}$  dans le cas où  $G$  est réductible.

## 2.2 Action d'un groupe réductible sur l'éclaté d'une droite stable

On suppose que  $G$  est réductible, c'est-à-dire qu'il stabilise une droite  $d$  de  $V$  et (donc) un supplémentaire  $W$  de  $d$  dans  $V$ . Soit  $\sigma_d : B_d \rightarrow V$  l'éclatement de la droite  $d$ . L'action de  $G$  sur  $V$  induit une action sur  $B_d$  et permet de définir la variété quasi-projective  $\overline{B}_d = B_d/G$ ; on note  $\pi_d : B_d \rightarrow \overline{B}_d$  la surjection canonique. Cela fournit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} B_d & \xrightarrow{\pi_d} & \overline{B}_d \\ \downarrow \sigma_d & & \downarrow \overline{\sigma}_d \\ V & \xrightarrow{\pi} & \overline{V} \end{array}$$

Le morphisme  $\overline{\sigma}_d$  est propre et birationnel. Sa restriction à  $\overline{B}_d \setminus \overline{\sigma}_d^{-1}(\pi(d))$  est un isomorphisme sur  $\overline{V} \setminus \pi(d)$ .

PROPOSITION . — *Les singularités de  $\overline{B}_d$  sont toriques simpliciales.*

*Preuve.* — Si  $x \in \sigma_d^{-1}(0)$ , il est sur la transformée stricte par  $\sigma_d$  d'une unique droite de  $W$  passant par l'origine de  $W$ . Alors,  $G_x$  stabilise le plan  $W$  et la dite droite de  $W$  : il est abélien.

D'autre part,  $B_d$  est  $G$ -isomorphe au produit de  $d$  par l'éclaté de l'origine de  $W$ . On note  $\varpi_2$  la composée de la deuxième projection de ce produit et de la projection sur la fibre exceptionnelle de ce dernier éclatement.

$$\varpi_2 : B_d \rightarrow \sigma_d^{-1}(0) \cong \mathbf{P}(W)$$

Pour tout  $x \in B_d$ , le groupe d'isotropie  $G_x$  est abélien comme sous-groupe du groupe abélien  $G_{\varpi_2(x)}$ . On conclut à l'aide du lemme du paragraphe 1.3.

*Remarques*

1. Le diviseur exceptionnel  $\overline{\sigma}_d^{-1}(\pi(d))$  est le quotient de  $d \times \mathbf{P}(W)$  par l'action induite de  $G$ . C'est une surface normale et rationnelle, en général singulière.

2. Soient  $e_3 = \exp(2i\pi/3)$ ,  $G$  le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} e_3 & & \\ & e_3^2 & \\ & & e_3 \end{pmatrix},$$

$V = \mathbb{C}^3$ ,  $d$  la droite  $\mathbb{C} \cdot (1, 0, 0)$  et  $x$  le point de  $\sigma_d^{-1}(0)$  sur la transformée stricte de la droite  $\mathbb{C} \cdot (0, 1, 0)$ . Le groupe d'isotropie de  $x$  est  $G$  tout entier et  $\overline{B_d}$  a en  $\pi_d(x)$  un germe analytique isomorphe à celui de  $\overline{V}$  à l'origine (la section 3 présente une méthode de calcul des singularités de  $\overline{B_d}$ ).

Cet exemple montre que le passage au quotient de l'éclaté d'une droite stable par l'action induite n'améliore pas nécessairement les singularités de  $\overline{V}$  dans le cas où  $G$  est abélien.

3. Selon le vocabulaire de [KKMS] et de [D],  $\overline{B_d}$  est quasi-lisse et sans auto-intersection (l'ouvert de Zariski définissant un plongement toroïdal dans  $\overline{B_d}$  est en général, c'est-à-dire si  $G$  est petit et non abélien, le complémentaire dans  $\overline{B_d}$  de cinq surfaces rationnelles normales irréductibles).

### 2.3 Construction dans le cas général

On ne suppose plus  $G$  réductible. Comme dans le paragraphe 2.1, soit  $\sigma_0 : B_0 \rightarrow V$  l'éclatement de l'origine de  $V$ ,  $E$  sa fibre exceptionnelle, et  $\varpi : B_0 \rightarrow E$  la projection du fibré en droites  $B_0$ .

Soit  $\Omega$  l'ensemble (fini) des points de  $E$  dont le groupe d'isotropie n'est pas abélien. Soit  $\tau : Y \rightarrow E$  l'éclatement de centre  $\Omega$ , et  $T : X \rightarrow B_0$  le relevé de cet éclatement le long du fibré  $\varpi$ , selon le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & B_0 \\ \downarrow \varpi' & & \downarrow \varpi \\ Y & \xrightarrow{\tau} & E \end{array}$$

L'éclatement  $\tau$  étant centré en une réunion d'orbites, il induit une action de  $G$  sur  $X$ , qui définit la variété quasi-projective  $\overline{X} = X/G$ . On note  $\pi_1 : X \rightarrow \overline{X}$  la surjection canonique,  $\overline{T} : \overline{X} \rightarrow \overline{B_0}$  le morphisme propre et birationnel induit,  $\varphi = \sigma_0 \circ T$  la composée des éclatements  $\sigma_0$  et  $T$ , et

$\bar{\varphi} = \bar{\sigma}_0 \circ \bar{T}$ . On obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_1} & \bar{X} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \bar{\varphi} \\ V & \xrightarrow{\pi} & \bar{V} \end{array}$$

$\bar{\varphi}$ , propre et birationnel, est un isomorphisme au-dessus du lieu lisse de  $\bar{V}$ .

DÉFINITIONS . — Soient  $X$  (resp.  $X'$ ) une variété algébrique complexe,  $F$  (resp.  $F'$ ) un fermé de Zariski de  $X$  (resp.  $X'$ ). On appelle morphisme local analytique  $(X, F) \rightarrow (X', F')$  la donnée :

- i) d'un ouvert analytique  $U$  (resp.  $U'$ ) de  $X$  (resp.  $X'$ ) contenant  $F$  (resp.  $F'$ );
- ii) d'une application holomorphe  $f : U \rightarrow U'$  telle que  $f(F) = F'$ .

Si  $f$  est biholomorphe, on parle d'isomorphisme local analytique. On dit que les ouverts  $U$  et  $U'$  réalisent le morphisme local analytique.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_1} & \bar{X} \\ \downarrow T & & \downarrow \bar{T} \\ B_0 & \xrightarrow{\pi_0} & \bar{B}_0 \end{array}$$

En chaque point du diviseur exceptionnel de  $T$ , la situation locale est celle du paragraphe 2.2 en le sens suivant.

PROPOSITION . — Soit  $\omega \in \Omega$ ; soit  $d_\omega = \varpi^{-1}(\omega)$  la fibre de  $B_0$  au-dessus de  $\omega$ , et  $D_\omega = T^{-1}d_\omega$  la composante irréductible du diviseur exceptionnel de  $T$  dont l'image par  $T$  passe par  $\omega$ . Soit  $R_\omega$  l'unique (à conjugaison près) sous-groupe réductible et petit de  $GL(V)$  tel que les germes analytiques  $(\bar{B}_0; \bar{\omega})$  et  $(V/R_\omega, \bar{0})$  soient isomorphes; on note  $d$  la droite  $R_\omega$ -stable de  $V$ , et  $D$  diviseur exceptionnel de  $\sigma_d : B_d \rightarrow V$  (notations du paragraphe 2.2). On note  $\bar{A}$  l'image de tout sous-ensemble  $A$  de  $B_0$  (resp. de  $X$ ) dans  $\bar{B}_0$  (resp.  $\bar{X}$ ).

Alors,  $(\bar{X}, \bar{D}_\omega)$  est localement analytiquement isomorphe à  $(B_d/R_\omega, \bar{D})$ , et on a le diagramme commutatif entre morphisme locaux analytiques

$$\begin{array}{ccc} (B_d/R_\omega, \bar{D}) & \xrightarrow{\sim} & (\bar{X}, \bar{D}_\omega) \\ \downarrow \bar{\sigma}_d & & \downarrow \bar{T} \\ (V/R_\omega, \bar{d}) & \xrightarrow{\sim} & (\bar{B}_0, \bar{d}_\omega) \end{array}$$

*Preuve*

i) Soit  $l_\omega$  l'image inverse de  $\omega$  par l'éclatement  $\tau : Y \rightarrow E$ ; soient  $W$  le supplémentaire  $R_\omega$ -stable de  $d$  dans  $V$ , et  $l$  la fibre exceptionnelle de l'éclatement  $\widehat{W} \rightarrow W$  de l'origine de  $W$ . On a le diagramme commutatif entre morphismes locaux analytiques suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{W}, l) & \xrightarrow{\sim} & (Y, l_\omega) \\ \downarrow & & \downarrow \tau \\ (W, 0) & \xrightarrow{\sim} & (E, \omega) \end{array}$$

ii) Les variétés  $V \cong d \times W$ ,  $B_0, B_d \cong d \times \widehat{W}$  et  $X$  sont des fibrés en droites de bases respectives  $W, E, \widehat{W}$  et  $Y$ . Les projections de ces fibrés induisent le diagramme commutatif entre morphismes locaux analytiques ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc} (B_d, D) & \xrightarrow{\sim} & (X, D_\omega) \\ \downarrow \sigma_d & & \downarrow T \\ (V, d) & \xrightarrow{\sim} & (B_0, d_\omega) \end{array}$$

iii) La droite  $d$  étant  $R_\omega$ -stable, on peut trouver des ouverts réalisant les quatre morphismes de ce dernier diagramme, qui respectent les actions respectives de  $R_\omega$  et  $G_\omega$ . On en déduit le diagramme commutatif entre morphismes locaux analytiques suivant :

$$\begin{array}{ccc} (B_d/R_\omega, \overline{D}) & \xrightarrow{\sim} & (X/G_\omega, \overline{D_\omega}) \\ \downarrow \overline{\sigma}_d & & \downarrow \\ (V/R_\omega, \overline{d}) & \xrightarrow{\sim} & (B_0/G_\omega, \overline{D_\omega}) \end{array}$$

iv) Enfin, l'action propre et discontinue de  $G$  sur  $E$  permet d'assurer l'existence d'un isomorphisme local analytique entre  $(\overline{X}, \overline{D_\omega})$  et  $(X/G_\omega, \overline{D_\omega})$ .

**COROLLAIRE .** — *Les singularités de  $\overline{X}$  sont toriques simpliciales.*

*Preuve.* — En les points du diviseur exceptionnel de  $\overline{T}$ , la proposition ci-dessus le prouve. Les groupes d'isotropie des points de  $X$  hors du diviseur exceptionnel de  $T$  sont abéliens; on conclut à l'aide du lemme du paragraphe 1.3.

*Remarques*

1. On peut montrer directement que les groupes d'isotropie des points de  $X$  sur le diviseur exceptionnel de  $T$  sont abéliens, ce qui suffit à prouver le corollaire. La proposition fournit en plus le calcul explicite des singularités de  $\overline{X}$ .
2. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , soit  $F_\omega = \bigcup_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} D_{\omega'}$ . L'éclatement  $T : X \rightarrow B_0$  induit un morphisme algébrique  $(X \setminus F_\omega)/G_\omega \rightarrow \overline{X}$ , étale en tous les points de l'image inverse de  $\overline{D_\omega}$ .
3. Les composantes irréductibles  $\overline{D_\omega}$  du diviseur exceptionnel de  $\overline{\varphi} : \overline{X} \rightarrow \overline{V}$  sont des surfaces normales rationnelles, en général singulières.

**2.4 Conclusion; obtention du modèle**

Un petit sous-groupe fini  $G$  de  $GL(V)$  étant donné, ce qui suit est la description d'un modèle birationnel,  $f : X_G \rightarrow \overline{V}$  de  $\overline{V}$ , dont les singularités soient toriques simpliciales.

- Si  $G$  est abélien,  $\overline{V}$  est une variété torique simpliciale; on pose  $X_G = \overline{V}$  et  $f = id$ .
- Si  $G$  est réductible et non abélien, on éclate l'unique droite  $G$ -stable  $d$ ; on pose alors  $X_G = \overline{B_d}$  et  $f = \overline{\sigma_d}$  (notations du paragraphe 2.2).
- Enfin si  $G$  est irréductible, on éclate l'origine  $V$ . On note encore  $\Omega$  l'ensemble des points de la fibre exceptionnelle de cet éclatement dont le groupe d'isotropie n'est pas abélien :
  - \* si  $\overline{B_0}$  a des singularités toriques simpliciales (*i.e.* si  $\Omega = \emptyset$ ), on pose  $X_G = \overline{B_0}$  et  $f = \overline{\sigma_0}$  (notations du paragraphe 2.1);
  - \* sinon, soit  $X \rightarrow B_0$  l'éclatement des fibres du fibré  $B_0$  au-dessus des points de  $\Omega$ ; on pose alors  $X_G = \overline{X}$  et  $f = \overline{\varphi}$  (notations du paragraphe 2.3).

**THÉORÈME .** —  *$f$  et  $X_G$  étant ainsi définis, les singularités de  $X_G$  sont toriques simpliciales et  $f$ , propre et birationnel, est un isomorphisme au-dessus du lieu singulier de  $\overline{V}$ .*

### 3. Calcul des singularités du modèle toroïdal

Soient  $V = \mathbb{C}^3$  et  $G$  un sous-groupe fini de matrices *unitaires* de  $GL(3, \mathbb{C})$  (tout sous-groupe fini de  $GL(V)$  est conjugué à un tel  $G$ , et deux groupes conjugués définissent des variétés-quotient isomorphes). Là encore, lorsqu'il n'y a guère d'ambiguïté, on note  $\overline{X}$  le quotient de toute  $G$ -variété  $X$  par l'action de  $G$ .

#### 3.1 Singularités du quotient de l'éclaté de l'origine

Soient encore  $\sigma_0 : B_0 \rightarrow V$  l'éclatement de l'origine de  $V$ , et  $E$  sa fibre exceptionnelle.

- Les singularités du quotient  $\overline{B_0}$  hors de la fibre de  $\overline{\sigma_0} : \overline{B_0} \rightarrow \overline{V}$  sont celles de  $\overline{V}$  hors de l'origine. Elles sont décrites à la section 1 : ce sont les singularités-quotient par les groupes d'isotropie de l'action de  $G$  sur  $V$ .
- Pour tout point  $x$  de  $E$ , la singularité de  $\overline{B_0}$  en  $\overline{x}$  est décrite par l'action de  $G_x$  sur l'espace tangent  $T_x B_0$ , c'est-à-dire par la  $G_x$ -suite exacte  $0 \rightarrow d_x \rightarrow T_x B_0 \rightarrow T_x E \rightarrow 0$ . Quitte à conjuguer  $G$ , on peut supposer que  $x$  est sur la transformée stricte de la droite  $\mathbb{C} \cdot (1, 0, 0)$  de  $V$ . Alors, le groupe d'isotropie  $G_x$  est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

de  $G$ , et la singularité de  $\overline{B_0}$  en  $\overline{x}$  est la singularité-quotient de  $V$  par le groupe

$$G_x^0 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a/\lambda & c/\lambda \\ 0 & b/\lambda & d/\lambda \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \in G_x \right) \right\}.$$

*Remarque.* — La fibre exceptionnelle  $\overline{E}$  de  $\overline{\sigma_0}$  est isomorphe au quotient de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  par l'action induite de  $G$ . Son germe analytique en le point  $\overline{x}$  ci-dessus est isomorphe à la singularité-quotient de  $\mathbb{C}^2$  par le groupe

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} a/\lambda & c/\lambda \\ b/\lambda & d/\lambda \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \in G_x \right) \right\}.$$

### 3.2 Singularités du quotient de l'éclaté d'une droite stable

On suppose que  $G$  est réductible et *petit*. Quitte à le conjuguer à nouveau, on suppose qu'il stabilise la droite  $d = \mathbb{C} \cdot (1, 0, 0)$  de  $V$  et son supplémentaire orthogonal  $W$ . Soient encore  $\sigma_d : B_d \rightarrow V$  l'éclatement de la droite  $d$ , et  $D \cong \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  son diviseur exceptionnel.

- Les singularités de  $\overline{B_d}$  hors du diviseur exceptionnel  $\overline{D}$  de  $\overline{\sigma_d} : B_d \rightarrow V$  sont celles de  $\overline{V}$  hors de l'image de  $d$  dans  $\overline{V}$  (notations du paragraphe 2.2).
- On note  $p : D \rightarrow \gamma$  la deuxième projection de  $D$  vu comme produit de  $d$  par  $\gamma = \sigma_d^{-1}(0) \cong \mathbb{P}(W)$ . Soit  $x \in D$ . Quitte à conjuguer  $G$  encore une fois, on suppose que  $x$  est sur la transformée stricte par  $\sigma_d$  de la droite  $\mathbb{C} \cdot (0, 1, 0)$  de  $V$ . Dans ces conditions, le groupe d'isotropie  $G_{p(x)}$  est le sous-groupe des matrices diagonales de  $G$ ; si  $x \notin \gamma$ , l'isotropie  $G_x$  est le sous-groupe des matrices de  $G_{p(x)}$  dont le premier élément diagonal est 1. Les actions respectives de  $G_x$  sur  $d$  et sur la transformée stricte  $\sigma_d^*(W)$  montrent que le germe analytique de  $\overline{B_d}$  en  $\overline{x}$  est isomorphe à la singularité-quotient par le groupe

$$G_x^d = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} a & & \\ & b & \\ & & c/b \end{array} \right) \middle| \left( \begin{array}{ccc} a & & \\ & b & \\ & & c \end{array} \right) \in G_x \right\}$$

(on a un  $G_x$ -isomorphisme  $d \times \sigma_d^*(W) \xrightarrow{\sim} B_d$  et une  $G_x$ -suite exacte  $0 \rightarrow I_x \rightarrow T_x(\sigma_d^*(W)) \rightarrow T_{p(x)}\gamma \rightarrow 0$ ).

*Notations.* — On note  $\Gamma$  le sous-groupe des éléments de  $G$  dont la restriction à  $W$  est une homothétie et  $G_1$  le sous-groupe des éléments de  $G$  dont la restriction à  $d$  est triviale. Enfin si  $c$  est une courbe de  $B_d$ , on note  $\overline{c}$  son image par  $\pi_d$ .

LEMME . — Pour tout  $x \in D$ , le groupe  $G_x^d$  est engendré par ses pseudo-réflexions si, et seulement si,  $G_x = \Gamma \cap G_1$ .

*Preuve.* —  $G$  étant petit, seuls les éléments de  $\Gamma \cap G_1$  fournissent des pseudo-réflexions de  $G_x^d$ .

On suppose jusqu'à la fin du paragraphe 3.2 que  $G$  n'est pas abélien (c'est le cas qui nous intéresse ici).

$G$ , comme groupe fini non abélien d'automorphismes de  $\gamma \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  détermine trois orbites exceptionnelles sur  $\gamma$ . L'image d'une telle orbite dans  $\overline{B_d}$  sera appelée *point exceptionnel*. Pour tout  $x$  de  $\gamma$ , on note  $d_x$  et  $w_x$  les courbes (isomorphes à  $\mathbb{C}$ ) de  $D$  et  $\sigma_d^*(W)$  respectivement définies par :

$$d_x = p^{-1}(x) ;$$

$w_x$  est la courbe irréductible de  $B_d$  passant par  $x$  dont l'image par  $\sigma_d$  est une droite de  $W$ .

PROPOSITION

- i) Hors des sept courbes  $\overline{\gamma}$ ,  $\overline{d_x}$ ,  $\overline{w_x}$  où  $\overline{x}$  est un point exceptionnel,  $\overline{B_d}$  est lisse.
- ii) Les points exceptionnels sont des points singuliers de  $\overline{B_d}$ .
- iii) Les points non exceptionnels de  $\overline{\gamma}$  sont des points non singuliers de  $\overline{B_d}$  si, et seulement si,  $\Gamma \subseteq G_1$ . Leur réunion est un lieu d'équi-singularité de  $\overline{B_d}$ .
- iv) Soit  $\overline{x}$  un point exceptionnel de  $\overline{B_d}$ . Les courbes  $\overline{d_x} \setminus \{\overline{x}\}$  et  $\overline{w_x} \setminus \{\overline{x}\}$  sont des lieux d'équi-singularité de  $\overline{B_d}$ . En outre,  $\overline{d_x} \subseteq \text{Sing}(\overline{B_d})$  si et seulement si  $G_1 \cap G_x \not\subseteq \Gamma$ ;  $\overline{w_x} \subseteq \text{Sing}(\overline{B_d})$  si et seulement si 1 est une racine de  $x$  pour un élément non trivial de  $G$ .

Preuve

i)  $\overline{B_d} \setminus \overline{D}$  est isomorphe à  $\overline{V} \setminus \overline{d}$ , donc lisse hors des  $\overline{w_x}$ , où  $\overline{x}$  est un point exceptionnel (toute courbe de points singuliers de  $\overline{V} \setminus \overline{d}$  a pour transformée stricte par  $\overline{\sigma_d}$  une  $\overline{w_x}$ , où  $\overline{x}$  est exceptionnel).

Si  $x \in D \setminus \gamma$ , alors  $G_x = G_1 \cap G_{p(x)}$ . D'autre part,  $\overline{p(x)}$  est exceptionnel si et seulement si  $G_{p(x)} \neq \Gamma$ . On conclut à l'aide du lemme.

ii) Si  $\overline{x}$  est exceptionnel,  $\Gamma$  est strictement inclus dans  $G_x$ . Donc  $G_x \neq \Gamma \cap G_1$  et le résultat se déduit du lemme.

iii) Soit  $\overline{x} \in \overline{\gamma}$  non exceptionnel. Alors  $G_x = \Gamma$ . Là encore, c'est le lemme qui intervient.

iv)  $\forall y \in d_x \setminus \{x\}$ ,  $G_y = G_1 \cap G_x$ . D'où la première équivalence grâce au lemme. La seconde se lit déjà en termes de l'action de  $G$  sur  $V$ .



*Remarques*

1.  $\Gamma$  est un groupe cyclique (l'homomorphisme de groupes

$$\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^* , \left( \begin{array}{cc} \lambda & \\ & \mu \\ & & \mu \end{array} \right) \longmapsto \mu$$

est injectif puisque  $G$  est petit).

2. Les courbes  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{d}_x$ ,  $\bar{w}_x$ , où  $\bar{x}$  est exceptionnel, sont lisses et rationnelles (seule  $\bar{\gamma}$  est projective). Leurs intersections deux à deux sont transverses et résumées dans le graphe ci-dessous.

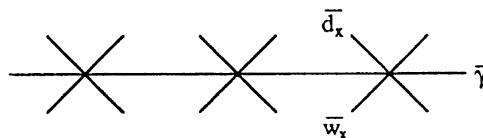


Fig. 1

3. Le diviseur exceptionnel  $\bar{D}$  de  $\bar{\sigma}_d$  est isomorphe au quotient de  $d \times \mathbb{P}(W)$  par l'action induite de  $G$ . Il est lisse hors des trois points exceptionnels et présente en le point  $\bar{x}$  ci-dessus une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $\mathbb{C}^2$  par le groupe

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} a & \\ & b/c \end{array} \right) \mid \left( \begin{array}{cc} a & \\ & b \\ & & c \end{array} \right) \in G_x \right\} .$$

### 3.3 Singularités du modèle $X_G$

Il reste à traiter le cas où  $G$  est irréductible et où  $\bar{B}_0$  n'a pas que des singularités toriques. La proposition du paragraphe 2.3 montre que ce calcul se ramène au paragraphe 3.2 ci-dessus en chaque point de  $\bar{\sigma}_0^{-1}(\bar{0})$  où  $\bar{B}_0$  a une singularité non torique.

### 3.4 Un exemple

Dans tout ce paragraphe, on notera  $[a, b, c]$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $a, b$  et  $c$ . Soit  $G$  le sous-groupe des rotations qui préservent un icosaèdre régulier de  $\mathbb{R}^3$ , vu comme sous-groupe de  $SU(3, \mathbb{C})$ .

- L'action naturelle de  $G$  sur  $\mathbb{R}^3$  détermine trois orbites exceptionnelles  $a, f, s$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  correspondant aux milieux des arêtes, centres des faces et sommets de l'icosaèdre. Cela est encore vrai sur  $V$ , et les groupes d'isotropie correspondants sont cycliques, conjugués aux groupes engendrés par  $[1, e_n, e_n^{n-1}]$ , où  $e_n = \exp(2i\pi/n)$  et où  $n$  vaut 2, 3 et 5 respectivement. On en déduit que  $\overline{V}$  a trois courbes de points singuliers  $c_a, c_f$  et  $c_s$  dont on trouvera un résumé de la position ensembliste dans la figure 3 (ces courbes étant séparées par l'éclatement  $\overline{\sigma_0}$ , on les représente se coupant transversalement). En n'importe quel point de  $c_a \setminus \{\overline{0}\}$  (resp.  $c_f \setminus \{\overline{0}\}, c_s \setminus \{\overline{0}\}$ ),  $\overline{V}$  a donc une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe cyclique engendré par  $[1, e_n, e_n^{n-1}]$ , où  $n = 2$  (resp.  $n = 3, n = 5$ ).
- On appelle *homologie* tout élément de  $GL(V)$  ayant une valeur propre de multiplicité deux, et *pôle* de  $G$  toute image dans  $\mathbb{P}(V)$  d'un vecteur propre d'un élément non trivial de  $G$ . Les homologies de  $G$  sont exactement ses éléments d'ordre deux, et sont donc toutes conjuguées ( $G$  est isomorphe au groupe des permutations paires à cinq éléments). Leurs droites de pôles doubles ont pour image dans  $\overline{E}$  une courbe  $c$  de points singuliers de  $\overline{B_0}$ . De plus, tout point de l'orbite  $a$  est fixé par deux homologies dont les droites de pôles doubles sont distinctes. Le point  $x_a$  de  $\overline{E}$  correspondant à l'image de  $a$  dans  $\overline{B_0}$  est donc un point double de  $c$ . D'autre part, les points des orbites  $f$  et  $s$  sont des pôles doubles d'homologies de  $G$ , rotations d'ordre deux et d'axes *ad hoc* orthogonaux aux droites associées : les images  $x_f$  et  $x_s$  de  $f$  et  $s$  dans  $\overline{B_0}$  sont aussi deux points de  $c$ .

En plus des orbites  $a, f$  et  $s$  "réelles",  $G$  détermine deux orbites exceptionnelles : les pôles non réels des rotations d'ordre trois et cinq. Les ordres de leurs groupes d'isotropie sont impairs : leurs images  $x_3$  et  $x_5$  dans  $\overline{E}$  sont hors de  $c$ .

On trouvera dans la figure 3 un résumé des positions ensemblistes des composantes irréductibles du lieu singulier de  $\overline{B_0}$  et de la fibre exceptionnelle  $\overline{E}$ .

En tout point de  $c$  hors de  $x_a, x_f$  et  $x_s$ ,  $\overline{B_0}$  a une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe cyclique engendré par  $[1, -1, -1]$ . En  $x_a$ ,  $\overline{B_0}$  a une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe abélien (isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ) engendré par  $[1, -1, -1]$  et  $[-1, -1, 1]$ . En  $x_3$  (resp.  $x_5$ ),  $\overline{B_0}$  a une

singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe cyclique engendré par  $[e_n, e_n^2, e_n^{n-2}]$ , où  $n = 3$  (resp.  $n = 5$ ).

Toutes les singularités ci-dessus sont toriques simpliciales. En revanche, ce n'est pas le cas des singularités de  $\overline{B_0}$  en  $x_f$  et  $x_s$  : en  $x_f$ ,  $\overline{B_0}$  a une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe  $G_f$  (isomorphe au groupe des permutations à trois éléments) engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} ;$$

en  $x_s$ ,  $\overline{B_0}$  a une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe  $G_s$  (isomorphe au groupe diédral d'ordre dix) engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_5 & \\ & & e_5^4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} .$$

- Il reste donc à étudier les singularités du quotient de l'éclaté de la droite stable par ces deux derniers groupes.

\* Cas de l'orbite  $f$ . En conservant les notations du paragraphe 2.3,  $G_1$  est le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}$$

et  $\Gamma$  est trivial. On calcule aisément les trois orbites exceptionnelles de l'action sur  $\gamma$ . On résume dans la figure 2 les positions ensemblistes du diviseur exceptionnel  $\overline{D}$  de  $\overline{\sigma_d}$  de la transformée stricte de  $\overline{W}$  et des composantes irréductibles du lieu singulier de  $B_d/G_f$ .

En tout point de  $\overline{d_{x_1}}$  (resp. en tout point de  $\overline{w_{x_3}}$ ; en  $\overline{x_2}$ ),  $B_d/G_f$  a une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe cyclique engendré par

$$[1, e_3, e_3] \text{ (resp. } [1, -1, -1]; [-1, -1, -1]).$$

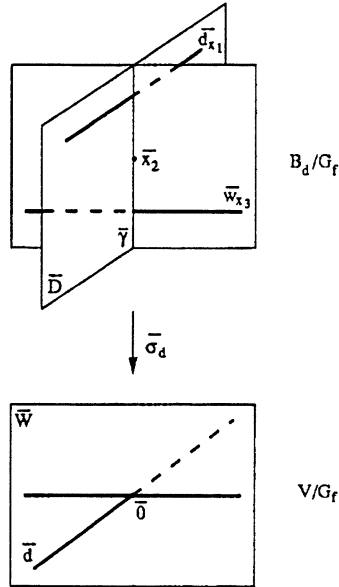


Fig. 2

\* Cas de l'orbite  $s$ . On obtient un résultat analogue : même figure, avec les singularités suivantes.

En tout point de  $\overline{d_{x_1}}$  (resp. en tout point de  $\overline{w_{x_3}}$ ; en  $\overline{x_2}$ ),  $B_d/G_s$  a une singularité isomorphe à la singularité-quotient de  $V$  par le groupe cyclique engendré par

$$[1, e_5, e_5^2] \quad (\text{resp. } [1, -1, -1]; [-1, -1, -1]).$$

On résume dans la figure 3 les positions ensemblistes des composantes irréductibles des diviseurs exceptionnels de  $\overline{\sigma_0}$  et de  $f$ , ainsi que du lieu singulier des modèles  $\overline{B_0}$  et  $X_G$ .

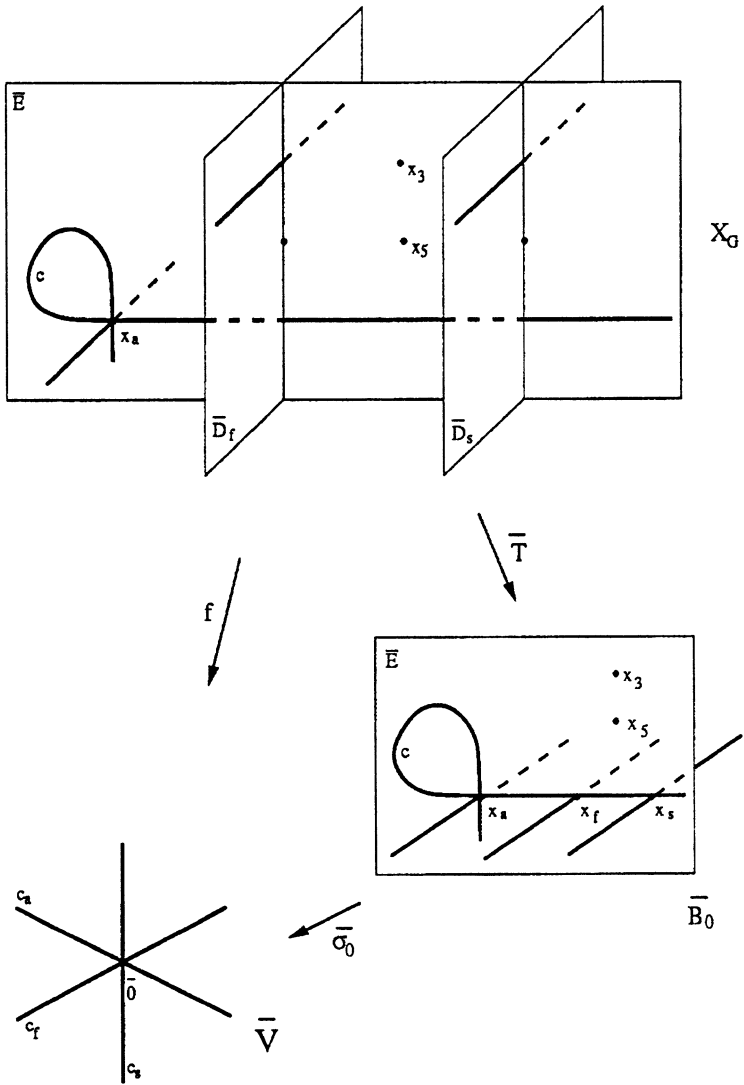


Fig. 3

#### 4. Configuration dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ des sous-groupes finis primitifs de $PGL(3; \mathbb{C})$

##### 4.1 Sous-groupes finis primitifs de $PGL(3; \mathbb{C})$

Un sous-groupe fini irréductible de  $PGL(3; \mathbb{C})$  (ou de  $GL(3; \mathbb{C})$ ) est dit *primitif* si toutes les orbites de son action sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ont au moins quatre points. Sinon, il est dit *imprimitif*.

Tout sous-groupe fini imprimitif  $G$  de  $GL(3; \mathbb{C})$  est produit semi-direct entre un groupe abélien et un sous-groupe transitif du groupe symétrique  $S_3$  (une orbite à trois points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  étant donnée, l'extension est fournie par l'homomorphisme de groupe  $G \rightarrow S_3$  de l'action de  $G$  sur cette orbite).

Miller, Blichfeldt et Dickson ont dressé dans [MBD] la liste des classes de conjugaison de sous-groupes primitifs finis de  $PGL(3; \mathbb{C})$ . Elles sont au nombre de six. Ne sachant établir une telle liste en des termes plus géométriques — et ce travail reste à faire, à l'image de la classification des sous-groupes finis de  $SU(2; \mathbb{C})$  à partir (Klein) du revêtement double  $SU(2; \mathbb{C}) \rightarrow SO(3; \mathbb{R})$  —, on la reproduit ci-dessous en donnant, pour chaque classe, un système de générateurs d'un représentant dans  $SU(3; \mathbb{C})$ . Le nom de ces groupes et de la plupart des générateurs exposés sont empruntés à [MBD].

*Notations*

$$e_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right), \quad \rho = e_3^{-1}(1 - e_3)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{-3}},$$

$\mu$  et  $\bar{\mu}$  sont les racines de  $X^2 + X - 1$ ,

$$\begin{aligned} a &= e_7^4 - e_7^3, & b &= e_7^2 - e_7^5 \\ c &= e_7 - e_7^6, & h &= \frac{a + b + c}{7} = \frac{1}{\sqrt{-7}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, & S_2 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \\
 S_3 &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}, & S_7 &= \begin{pmatrix} e_7 & & \\ & e_7^2 & \\ & & e_7^4 \end{pmatrix}, \\
 T &= \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, & V &= \rho \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e_3 & e_3^2 \\ 1 & e_3^2 & e_3 \end{pmatrix}, \\
 U &= \begin{pmatrix} e_9^2 & & \\ & e_9^2 & \\ & & e_9^5 \end{pmatrix}, & M &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \bar{\mu} & \mu \\ \bar{\mu} & \mu & -1 \\ \mu & -1 & \bar{\mu} \end{pmatrix}, \\
 R &= h \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, & N &= \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & -e_3^2 \\ & -e_3 & \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'image de ces éléments de  $SL(3; \mathbb{C})$  dans  $PGL(3; \mathbb{C})$  sera notée par la même lettre minuscule. L'image dans  $PGL(3; \mathbb{C})$  d'un sous-groupe  $G$  de  $GL(3; \mathbb{C})$  sera notée  $PG$ . On note enfin  $D_n$  le groupe diédral d'ordre  $2n$ ,  $S_3$  le groupe symétrique d'ordre 6,  $H_8$  le groupe quaternionique d'ordre 8, et  $N : H$  toute extension scindée du groupe  $H$  par le groupe  $N$ .

*Liste des groupes finis imprimitifs*

Nom du groupe linéaire $G$	Système de générateurs de $G$	Ordre de $G$	Ordre de $PG$
<b>E</b>	$S_3, T, V$	108	36
<b>F</b>	$S_3, T, V, UVU^{-1}$	216	72
<b>G</b>	$S_3, T, V, U$	648	216
<b>H</b>	$S_2, T, M$	60	60
<b>I</b>	$S_2, T, M, N$	1080	360
<b>J</b>	$S_7, T, R$	168	168

On a la chaîne  $\mathbf{E} \triangleleft \mathbf{F} \triangleleft \mathbf{G}$ , et  $\mathbf{G}$  est le groupe dit *Hessien*. Les groupes  $\mathbf{PH}$ ,  $\mathbf{PI}$ ,  $\mathbf{PJ}$  sont simples, respectivement isomorphes à  $\mathbf{A}_5$ ,  $\mathbf{A}_6$  et  $PSL(2; \mathbf{F}_7)$ .

Le groupe  $\mathbf{H}$  est bien sûr le groupe de l'icosaèdre de l'exemple 3.4.

## 4.2 Configurations de ces groupes

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $PGL(3; \mathbb{C})$  (ou de  $GL(3; \mathbb{C})$ ). Un pôle de  $G$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est dit *pôle simple* s'il est pôle simple d'au moins un élément de  $G$ . Sinon, il est dit *pôle double* de  $G$ . Une orbite de pôle simples (resp. doubles) est dite *exceptionnelle* (resp. *semi-exceptionnelle*). La configuration de  $G$  est la donnée de ses pôles dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

Un sous-groupe fini de  $GL(3; \mathbb{C})$  étant donné, c'est sa configuration qui détermine le lieu singulier du quotient de l'éclaté de l'origine de  $\mathbb{C}^3$  sur sa fibre exceptionnelle. L'objet de ce paragraphe est, pour " les six " sous-groupes primitifs de  $PGL(3; \mathbb{C})$ , de dresser la liste des orbites exceptionnelles ou semi-exceptionnelles, et de calculer les groupes d'isotropie qui leur correspondent. Les techniques que j'ai employées pour obtenir les résultats que j'expose ici bruts utilisent pour l'essentiel les théorèmes de Sylow, les propriétés de la conjugaison dans un groupe et des formules combinatoires du type " formule des classe " (\*)

On appelle *forme réduite* du groupe d'isotropie d'un vecteur non nul  $v$  de  $\mathbb{C}^3$  tout système de générateurs de ce groupe écrit dans une base (ordonnée) de  $\mathbb{C}^3$  dont le premier vecteur est  $v$ . Cela concerne la dernière colonne des tableaux des pages suivantes, et permet de calculer immédiatement les singularités en les points de la fibre exceptionnelle du quotient de l'éclaté de l'origine de  $\mathbb{C}^3$  (paragraphe 3.1), ce qui constitue la première étape dans la connaissance des singularités du modèle  $X_G$ .

---

(\*) Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $PGL(3; \mathbb{C})$ . On considère l'action naturelle de  $G$  sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Soient  $c$  l'ordre de  $G$  et  $r - 1$  le nombre d'homologie de  $G$ . Soit  $\{p_1, \dots, p_d\}$  un système de représentants des orbites exceptionnelles. Pour chaque  $i$ , on note  $c_i$  l'ordre de  $G_{p_i}$  et  $r_i - 1$  le nombre d'homologies de  $G_{p_i}$ . En calculant de deux manières le cardinal de l'ensemble

$$\{(g, p) \in G \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid g \cdot p = p \text{ et } g \text{ n'est ni } 1 \text{ ni une homologie}\},$$

on obtient la " formule des classes "

$$3(c - r) = \sum_{i=1}^d \frac{c}{c_i} (c_i - r_i).$$



*Groupe E*

- Classes de conjugaison dans **PE** : une classe de neuf éléments d'ordre 2; deux classes de quatre éléments d'ordre 3 (celles de  $s_3$  et  $s_3t$ ); deux classes de neuf éléments d'ordre 4 (celles de  $v$  et  $v^3$ ).
- Orbites semi-exceptionnelles : elles sont fournies par l'unique orbite des droites des pôles doubles des homologies (qui sont les éléments d'ordre 2). Le groupe d'isotropie d'une orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

- Orbites exceptionnelles.

Représentant de l'orbite	Cardinal de l'orbite	Groupe projectif d'isotropie du représentant	Forme réduite du groupe linéaire d'isotropie
$(1, 0, 0)$	6	$(s_3, v^2) \cong S_3$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$
$(1, 1, e_3)$	6	$(s_3t, tv^2) \cong S_3$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$
$(0, 1, -1)$	9	$(v) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_4 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$(1 + \sqrt{3}, 1, 1)$	9	$(v) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$(1 - \sqrt{3}, 1, 1)$	9	$(v) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} e_4^3 & & \\ & 1 & \\ & & e_4 \end{pmatrix}$

**Groupe F**

- Classes de conjugaison dans **PF** : une classe de neuf éléments d'ordre 2; une classe de huit éléments d'ordre 3; trois classes de dix-huit éléments d'ordre 4 (celles de  $v, \tilde{v}, v\tilde{v}$ , où  $\tilde{v} = uvu^{-1}$ ).
- Orbites semi-exceptionnelles : elles sont fournies par l'unique orbite des droites des pôles doubles des homologies (qui sont les éléments d'ordre 2). Le groupe d'isotropie d'une orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

- Orbites exceptionnelles.

Représentant de l'orbite	Cardinal de l'orbite	Groupe projectif d'isotropie du représentant	Forme réduite du groupe linéaire d'isotropie
$(1, 0, 0)$	12	$(s_3, v^2) \cong S_3$	$e_3 I_3; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(0, 1, -1)$	9	$(v, s_3 t^2 \tilde{v}) \cong H_8$	$e_3 I_3; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_4 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_4 & \\ & & e_4 \end{pmatrix}$
$(1 + \sqrt{3}, 1, 1)$	18	$(v) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3; \begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$U(1 + \sqrt{3}, 1, 1)$	18	$(\tilde{v}) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3; \begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$U^{-1}(1 + \sqrt{3}, 1, 1)$	18	$(v\tilde{v}) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3; \begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$

**Groupe G**

- Classes de conjugaison dans **PG** : une classe de neuf éléments d'ordre 2; une classe de huit éléments d'ordre 3 (celle de  $s_3$ ); deux classes de douze éléments d'ordre 4 (celles de  $u$  et  $u^2$ ); deux classes de vingt-quatre éléments d'ordre 3 (celles de  $tu$  et  $tu^2$ ); une classe de cinquante-quatre éléments d'ordre 4; deux classes de trente-six éléments d'ordre 6 (celles de  $tv^2u, tv^2u^2$ ).

- Orbites semi-exceptionnelles. Une orbite de neuf droites : les droites des pôles doubles des homologies d'ordre 2. Le groupe d'isotropie d'une telle orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Une orbite de douze droites : les droites des pôles doubles des homologies d'ordre 3. Le groupe d'isotropie d'une telle orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} e_9 & & \\ & e_9 & \\ & & e_9^7 \end{pmatrix}.$$

- Orbites exceptionnelles.

Représentant de l'orbite	Cardinal de l'orbite	Groupe projectif d'isotropie du représentant	Forme réduite du groupe linéaire d'isotropie
$(1, 0, 0)$	12	$(u, s_3, v^2) \cong (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2 : \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} e_9 & & \\ & e_9 & \\ & & e_9^7 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(0, 1, -1)$	9	$(v, s_3 t^2 \tilde{v}, s_3^2 u) \cong D_4 : \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho & 2\rho \\ & \rho & -\rho \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e_9 & & \\ & e_9^7 & \\ & & e_9 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho & 2e_3 \rho \\ & e_3^2 \rho & -\rho \end{pmatrix}$
$(1, e_9^2, e_9^4)$	72	$(tu) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}$
$(1 + \sqrt{3}, 1, 1)$	54	$(tu) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$(1, 1, 0)$	36	$(tv^2u) \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} -e_9 & & \\ & e_9 & \\ & & -e_9^7 \end{pmatrix}$

**Groupe H**

- Classes de conjugaison dans **PH** : une classe de quinze éléments d'ordre 2; une classe de vingt éléments d'ordre 3; deux classes de douze éléments d'ordre 5 (celles de  $ts_2m$  et de son carré).
- Orbites semi-exceptionnelles. Elles sont fournies par l'unique orbite des droites des pôles doubles des homologies (qui sont les éléments d'ordre 2). Le groupe d'isotropie d'une orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

- Orbites exceptionnelles.

Représentant de l'orbite	Cardinal de l'orbite	Groupe projectif d'isotropie du représentant	Forme réduite du groupe linéaire d'isotropie
$(1, 0, 0)$	15	$(s_2, ts_2t^{-1}) \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$
$(1, 1, 1)$	10	$(t, s_3) \cong S_3$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(\mu, 0, 1)$	6	$(ts_2m, ts_2t^{-1}) \cong D_5$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_5 & \\ & & e_5^4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(1, e_3, e_3^2)$	20	$(t) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\begin{pmatrix} e_3 & & \\ & 1 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}$
$(1, e_5^2 - e_5^3, -\mu)$	12	$(ts_2m) \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$	$\begin{pmatrix} e_5 & & \\ & 1 & \\ & & e_5^4 \end{pmatrix}$

*Groupe I*

- Classes de conjugaison dans  $\mathbb{P}I$  : une classe de quarante-cinq éléments d'ordre 2; deux classes de quarante éléments d'ordre 3 (celle de  $t$  et  $tmn$ ); une classe de quatre vingt-dix éléments d'ordre 4 (celle de  $ts_2n$ ); deux classes de soixante-douze éléments d'ordre 5 (celles de  $ts_2m$  et de son carré).
- Orbites semi-exceptionnelles. Elles sont fournies par l'unique orbite des droites des pôles doubles des homologies (qui sont les éléments d'ordre 2). Le groupe d'isotropie d'une orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

- Orbites exceptionnelles.

Représentant de l'orbite	Cardinal de l'orbite	Groupe projectif d'isotropie du représentant	Forme réduite du groupe linéaire d'isotropie
$(1, 0, 0)$	45	$(ts_2t^{-1}, n) \cong D_4$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_4 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(1, 1, 1)$	60	$(t, m) \cong S_3$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$v (*)$	60	$(tm, n) \cong S_3$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(\mu, 0, 1)$	36	$(ts_2m, ts_2t^{-1}) \cong D_5$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_5 & \\ & & e_5^4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$(0, e_4, e_3)$	90	$(ts_2t^{-1}n) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$(1, e_5^2 - e_5^3, -\mu)$	72	$(ts_2m) \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$	$e_3 I_3 ; \begin{pmatrix} e_5 & & \\ & 1 & \\ & & e_5^4 \end{pmatrix}$

(\*)  $v$  est n'importe quel vecteur fixe non nul de  $TMN$ .

Groupe **J**

- Classes de conjugaison dans  $\mathbb{P}\mathbf{J}$  : une classe de vingt et un éléments d'ordre 2; une classe de cinquante-six éléments d'ordre 3; une classe de quarante-deux éléments d'ordre 4 (celle de  $ts_7^3rs_7^4$ ); deux classes de vingt-quatre éléments d'ordre 7 (celles de  $s_7$  et de  $s_7^{-1}$ ).
- Orbites semi-exceptionnelles : elles sont fournies par l'unique orbite des droites des pôles doubles des homologies (qui sont les éléments d'ordre 2). Le groupe d'isotropie d'une orbite semi-exceptionnelle a pour forme réduite le groupe engendré par

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

- Orbites exceptionnelles.

Représentant de l'orbite	Cardinal de l'orbite	Groupe projectif d'isotropie du représentant	Forme réduite du groupe linéaire d'isotropie
$v_1$	21	$(r, ts_7^3rs_7^4n) \cong \mathbf{D}_4$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_4 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$v_2$	28	$(t, r) \cong \mathbf{S}_3$	$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_3 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
$v_3$	72	$(t) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$\begin{pmatrix} e_3 & & \\ & 1 & \\ & & e_3^2 \end{pmatrix}$
$v_4$	42	$(ts_7^2rs_7^4) \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$\begin{pmatrix} e_4 & & \\ & 1 & \\ & & e_4^3 \end{pmatrix}$
$v_5$	24	$(s_7) \cong \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$	$\begin{pmatrix} e_7 & & \\ & e_7^2 & \\ & & e_7^4 \end{pmatrix}$

## Appendice autonome

### A.1 Variété torique simpliciale

Soient  $M$  un réseau de rang  $d \geq 1$  et  $\sigma$  un cône simplicial (c'est-à-dire engendré par  $d$  vecteurs linéairement indépendants) de  $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes \mathbb{Q}$ .

**DÉFINITIONS .** — On appelle variété torique simpliciale toute variété algébrique affine  $X_{\sigma} = \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma \cap M]$ , où  $\mathbb{C}[\sigma \cap M]$  est l'algèbre sur  $\mathbb{C}$  du monoïde  $\sigma \cap M$ . Un vecteur  $m$  de  $M$  est dit primitif lorsque, parmi les nombres rationnels  $r$ , seuls les entiers vérifient  $rm \in M$ . Enfin, un vecteur de  $M_{\mathbb{Q}}$  est dit vecteur extrémal dans  $M$  de  $\sigma$  lorsqu'il est dans  $M$ , primitif, et qu'il engendre une arête de  $\sigma$ .

*Notations.* — On note successivement :

$N_{\mathbb{Q}}$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel dual de  $M_{\mathbb{Q}}$ ;

$\check{\sigma}$  le cône (simplicial) de  $N_{\mathbb{Q}}$  des formes positives ou nulles sur  $\sigma$ ;

$N$  le réseau (de rang  $d$ ) des formes de  $N_{\mathbb{Q}}$  entières sur  $M$ ;

$N'$  le sous-réseau (de rang  $d$ ) de  $N$  engendré par les vecteurs extrémaux dans  $N$  de  $\check{\sigma}$ ;

$M'$  le sur-réseau (de rang  $d$ ) de  $M$  des vecteurs de  $M_{\mathbb{Q}}$  à valeurs entières sur les formes de  $N'$ .

Bien sûr, les données des couples  $(M, \sigma)$  et  $(N, \check{\sigma})$  sont équivalentes par dualité. Si les  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  sont les vecteurs extrémaux dans  $N$  de  $\check{\sigma}$ , on note :

$$\Delta = N \cap \left\{ \sum_{i=1}^d q_i f_i \mid q_i \in \mathbb{Q}_+, \sum_{i=1}^d q_i < 1 \right\}$$

et

$$\bar{\Delta} = N \cap \left\{ \sum_{i=1}^d q_i f_i \mid q_i \in \mathbb{Q}_+, \sum_{i=1}^d q_i \leq 1 \right\}.$$

Le théorème suivant établit la condition combinatoire dans le réseau  $N$  pour qu'une variété torique simpliciale ait des singularités canoniques ou terminales (cette condition se généralise à n'importe quelle variété torique).

THÉORÈME [R1]. — Avec les notations ci-dessus,  $X_\sigma$  a des singularités canoniques (resp. terminales) si, et seulement si,  $\Delta = \{0\}$  (resp.  $\overline{\Delta} = \{0, e_1, \dots, e_d\}$ ).

*Matrice d'une variété torique simpliciale*

Si  $X_\sigma$  est une variété torique simpliciale, on appelle *matrice* de  $X_\sigma$  toute matrice dont les vecteurs-colonne sont les coordonnées des vecteurs extrémaux dans  $N$  de  $\tilde{\sigma}$  dans une base de  $N$ . Changer de base de  $N$  revient à multiplier à gauche une telle matrice par un élément de  $GL(d, \mathbb{Z})$ .

Inversement, si  $P \in GL(d, \mathbb{Q})$  a des coefficients entiers et des vecteurs-colonne primitifs dans  $\mathbb{Z}^d$ , on associe à  $P$  la variété torique simpliciale définie comme ci-dessus par  $N$  et  $\tilde{\sigma}$ , où  $N = \mathbb{Z}^d$  et où les vecteurs extrémaux dans  $N$  de  $\tilde{\sigma}$  sont les vecteurs-colonne de  $P$ .

Toute variété torique simpliciale admet une matrice triangulaire supérieure (toujours à coefficients entiers, inversible dans  $GL(d, \mathbb{Q})$  et à vecteurs-colonne primitifs). En effet (en dimension trois, mais ceci marche de manière analogue en toute dimension), tout vecteur primitif se complète en une base de réseau; on obtient ainsi une matrice dont la première colonne est  $(1, 0, 0)$ . La multiplication à gauche par un élément de  $GL(d, \mathbb{Z})$  permet en particulier d'ajouter une ligne à une autre, ou de permuter deux lignes. Si la deuxième colonne de cette dernière matrice est  $(a, b, c)$ , il suffit alors d'appliquer l'algorithme d'Euclide au couple  $(b, c)$ .

La détermination des variétés toriques simpliciales, dont les singularités sont canoniques ou terminales, devient avec le théorème ci-dessus un problème combinatoire, résolu en dimension trois par Ishida et Iwashita. Ce résultat s'écrit :

THÉORÈME [II]

i) Les variétés toriques simpliciales de dimension trois ayant des singularités canoniques sont celles qui admettent pour matrice une de celles de la liste suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 0 & 4m \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix},$$

où  $b, d, e \geq 1$ ;  $m, r \geq 2$  et  $a \in \{1, \dots, r-1\}$ .



ii) Parmi les matrices ci-dessus, seules celles du deuxième type pour lesquelles  $a_{\wedge r} = 1$  définissent, avec la matrice triviale, des variétés toriques simpliciales à singularités terminales.

## A.2 Singularités-quotient canoniques ou terminales

On a la proposition bien connue suivante ([KKMS]).

PROPOSITION. — Une variété algébrique affine complexe  $X$  de dimension  $d \geq 1$  est une variété torique simpliciale si, et seulement si,  $X$  est une variété-quotient  $\mathbb{C}^d/G$ , où  $G$  est un sous-groupe abélien fini de  $GL(d, \mathbb{C})$ .

*Élément de preuve*

i) Soit  $G$  un sous-groupe fini de matrices diagonales de  $GL(d, \mathbb{C})$ . Il agit sur les monômes  $\underline{x}^{\underline{m}}$  de  $A = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$ . L'algèbre d'invariants  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]^G$  est égale à l'algèbre du monoïde  $\sigma \cap M$ , où  $M$  est le sous-réseau  $\{\underline{m} \in \mathbb{Z}^d \mid \underline{x}^{\underline{m}} \in A^G\}$  de  $\mathbb{Z}^d$  et  $\sigma$  le cône simplicial  $(\mathbb{Q}_+)^d$  de  $M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^d$ .

ii) Soit  $X_{\sigma}$  une variété torique simpliciale (avec les notations précédentes) et  $\gamma$  l'ordre de  $N/N'$ . La dualité  $N \times M' \rightarrow \mu_{\gamma}$ ,  $(n, m) \mapsto \exp(2i\pi\langle m, n \rangle)$  induit une action linéaire et homogène de  $N/N'$  sur l'algèbre de polynômes  $\mathbb{C}[\sigma \cap M']$ , dont l'algèbre des invariants est  $\mathbb{C}[\sigma \cap M]$ .

Notations. — Si  $n$  est un vecteur de  $\mathbb{Q}^d$ , on note  $g(n)$  la matrice diagonale d'ordre fini dont les éléments diagonaux sont  $(e_D^{a_1}, \dots, e_D^{a_d})$ , où

$$n = \frac{1}{D} (a_1, \dots, a_d), \quad (D, a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}.$$

Si  $g$  est une matrice diagonale d'ordre fini, on note  $n(g)$  le vecteur  $(1/D)(a_1, \dots, a_d)$  de  $\mathbb{Q}^d$ , où  $(e_D^{a_1}, \dots, e_D^{a_d})$  sont les éléments diagonaux de  $g$ ,  $D \geq 1$ ,  $0 \leq a_i \leq D - 1$ .

Si  $G$  est un groupe fini de matrices diagonales de  $GL(d, \mathbb{C})$ , on note  $R(G)$  le sur-réseau (de rang  $d$ ) de  $\mathbb{Z}^d$  engendré par  $\mathbb{Z}^d$  et les  $n(g)$ ,  $g \in G$ . Si  $P \in GL(d, \mathbb{C})$  a des coefficients entiers, on note  $r(P)$  le sous-réseau (de rang  $d$ ) de  $\mathbb{Z}^d$  engendré par les vecteurs-colonne de  $P$ .

La proposition suivante précise le calcul de l'écriture d'une variété torique simpliciale comme variété-quotient, et vice versa.

PROPOSITION

- i) Soit  $G$  un petit sous-groupe fini de matrices diagonales de  $GL(d, \mathbb{C})$ . La matrice dont les vecteurs-colonne sont les coordonnées de la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$  dans n'importe quelle base de  $R(G)$  est une matrice de la variété torique simpliciale  $\mathbb{C}^d/G$ .
- ii) Soit  $P$  une matrice d'une variété torique simpliciale  $X$ . Le quotient de  $\mathbb{C}^d$  par le groupe des  $g(n)$ , où  $n$  parcourt les coordonnées des vecteurs de  $\mathbb{Z}^d$  dans la base de  $r(P)$  formée des vecteurs-colonne de  $P$ , est isomorphe à  $X$ .

Preuve

i) D'après les propositions précédente,  $\mathbb{C}^d/G$  est une variété torique simpliciale. Le choix d'une base de  $N'$  permet de poser  $N' = \mathbb{Z}^d$ . Alors,  $M' = (\mathbb{Z}^d)^*$  et  $M$  est le sous-réseau des formes de  $M'$  entières sur  $R(G)$ . Par conséquent,  $N = R(G)$  (les indices de  $\mathbb{Z}^d$  dans  $N$  et dans  $R(G)$  sont les mêmes, à savoir l'ordre de  $G$ ). Il reste à montrer que les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$  sont les vecteurs extrémaux dans  $N$  de  $\sigma = (\mathbb{Q}_+)^d$ . Il suffit pour cela d'établir qu'ils sont primitifs dans  $N$ . Soit  $\varepsilon$  l'un d'entre eux. Soit  $p \in \mathbb{Q}$  tel que  $p\varepsilon \in N$ . Soient alors  $(\lambda_g)_{g \in G} \in \mathbb{Z}^{|G|}$  et  $n \in N'$  tels que  $p\varepsilon = n + \sum \lambda_g n(g)$ . Le produit  $\prod g^{\lambda_g}$  admet 1 pour valeur propre de multiplicité au moins  $d - 1$ . Comme  $G$  est petit, ce produit est trivial, et  $p$  est entier. Donc  $\varepsilon$  est primitif dans  $N$ .

ii)  $P$  étant donnée, et  $G$  étant le groupe décrit par l'énoncé, le i) montre que  $X$  et  $\mathbb{C}^d/G$  sont algébriquement isomorphes.

COROLLAIRE . — Soient  $X$  une variété torique simpliciale admettant

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

pour matrice, et  $G$  un petit sous-groupe abélien fini de  $GL(3, \mathbb{C})$  tel que  $X$  et  $\mathbb{C}^3/G$  soient isomorphes. Alors, les facteurs invariants de  $G$  sont  $b \wedge d \wedge e$  et  $be / (b \wedge d \wedge e)$ .

On déduit de ces deux propositions le théorème suivant.

THÉORÈME .— Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL(3, \mathbb{C})$ , petit et abélien.

i)  $\mathbb{C}^3/G$  a des singularités canoniques si et seulement si  $G$  est conjugué à l'un des groupes de la liste suivantes :

a) n'importe quel sous-groupe abélien  $SL(3, \mathbb{C})$ ; l'indice de la singularité-quotient est 1;

b) tout groupe cyclique engendré par la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont dans la liste de triplets suivante :

- $(e_r, e_r^{r-1}, e_r^a)$ , avec  $r \geq 2$  et  $a \in \{1, \dots, r-1\}$ ; l'indice de la singularité-quotient est  $r/(r \wedge a)$ ;
- $(e_{4m}, e_{4m}^{-2}, e_{4m}^{1+2m})$ , avec  $m \geq 2$ ; l'indice de la singularité-quotient est 2;
- $(e_9, e_9^4, e_9^7)$ ; l'indice de la singularité-quotient est 3;
- $(e_{14}, e_{14}^9, e_{14}^{11})$ ; l'indice de la singularité-quotient est 2;

ii) parmi ces groupes, seuls ceux du premier alinéa de la classe b), pour lesquels  $a \wedge r = 1$ , définissent, avec le groupe trivial, des variétés-quotient à singularités terminales.

Remarque. — Cet énoncé améliore le théorème 4.1 de [II] en ce sens qu'il ajoute qu'un quotient abélien canonique est cyclique.

On déduit enfin du *main theorem* de [R2] la liste de toutes les singularités-quotient terminales en dimension trois.

THÉORÈME .— Soit  $G$  un petit sous-groupe fini de  $GL(3, \mathbb{C})$ .

$G$  définit une singularité-quotient terminale si et seulement s'il est conjugué à un groupe cyclique engendré par une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont

$$(e_r, e_r^{r-1}, e_r^a), \quad \text{où } r \geq 1 \text{ et } a \wedge r = 1.$$

*Preuve.* — Si  $\mathbb{C}^3/G$  a des singularités canoniques, l'inclusion  $SG \hookrightarrow G$ , où  $SG = G \cap SL(3, \mathbb{C})$  induit le revêtement ramifié galoisien  $\mathbb{C}^3/SG \rightarrow \mathbb{C}^3/G$ , étale en codimension un, décrit dans ([R1], corollaire 1.9)<sup>(\*)</sup>. Si

(\*) Si  $G$  est un petit sous-groupe fini de  $GL(V)$ , il définit une singularité-quotient d'indice  $[G : SG]$  (le groupe des classes de diviseurs (de Weil) de  $V/G$  est isomorphe au groupe des caractères de  $G$ , et l'image du diviseur canonique par l'un de ces isomorphismes est le déterminant). En particulier, tout sous-groupe de  $SL(V)$  définit une singularité-quotient canonique ([R1]).

$\mathbb{C}^3/G$  a des singularités terminales,  $\mathbb{C}^3/S_G$  est donc une singularité isolée d'hypersurface ([R2], *main theorem*). Le lemme suivant impose à  $S_G$  d'être trivial et ramène la situation au théorème précédent.

LEMME .— *Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $SL(3, \mathbb{C})$ . Si  $\mathbb{C}^3/G$  a une singularité isolée, ce n'est pas une intersection complète.*

*Preuve.* — Il est démontré dans [KW] que si  $\mathbb{C}^3/G$  est une intersection complète,  $G$  est engendré par ses éléments  $g$  tels que  $rg(g-1) \leq 2$ . Les sous-groupes de  $SL(3, \mathbb{C})$  étant petits, cela implique en outre dans les hypothèses du lemme que  $G$  contient un élément  $g$  tel que  $rg(g-1) = 2$ . Mais l'existence d'un tel élément interdit à la singularité d'être isolée.

#### Remarques

1. À l'aide de la classification des sous-groupes finis de  $PSL(3, \mathbb{C})$  de Miller, Blichfeldt et Dickson, on peut montrer que tout sous-groupe fini de  $SL(3, \mathbb{C})$  définissant une singularité isolée est cyclique.
2. La question se pose de savoir si un petit sous-groupe fini de  $GL(3, \mathbb{C})$  qui ne soit ni abélien ni dans  $SL(3, \mathbb{C})$  peut définir une singularité-quotient canonique.

### Références bibliographiques

- [B] BRIESKORN (E.) .— *Rationale Singularitäten komplexer Flächen*, Invent. Math. **4** (1968), pp. 336-358.
- [Bk] BOURBAKI (N.) .— *Algèbre commutative* (chapitres 5 à 7), Ed. Masson, Paris (1985).
- [Ch] CHEVALLEY (C.) .— *Invariants of finite groups generated by reflections*, Am. J. Math **77** (1955), pp. 778-782.
- [D] DANILOV (V. I.) .— *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys **33** II (1978), pp. 97-154.
- [II] ISHIDA (M. N.) et IWASHITA (N.) .— *Canonical cyclic quotient singularities of dimension 3*, Advanced Studies in Pure Math. **8** (1986), Complex analytic singularities, pp. 135-151.
- [KKMS] KEMPF (G.), KNUDSEN (F.), MUMFORD (D.) et SAINT-DONAT (B.) .— *Toroidal embeddings I*, Lecture Notes in Math. Springer **339** (1973).

- [KM] KAC (V.) et WATANABE (K. I.) . — *Finite linear groups whose ring of invariants is a complete intersection*, Bull. A.M.S. **6** (1982).
- [MBD] MILLER (G. A.), BLICHFELDT (H. F.) et DICKSON (L. E.) . — *Theory and applications of finite groups*, Dover publications inc., New-York (1916).
- [Pr] PRILL (D.) . — *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*, Duke Math. J. **34** (1967), pp. 375-386.
- [R1] REID (M.) . — *Canonical 3-folds*, Journées de géométrie algébrique d'Angers, A. Beauville, Ed. Sijthoff en Noordhoff, Aalphen aan den Rijn (1980), pp. 273-310.
- [R2] REID (M.) . — *Minimal models of canonical 3-folds*, Advanced Studies in Pure Math. **1** (1983), Algebraic varieties and analytic varieties, pp. 131-180.
- [S1] SLODOWY (P.) . — *Der Scheibensatz für algebraische Transformationsgruppen*. In: *algebraische Transformationsgruppen und Invarianten Theorie*, Kraft H., Slodowy P., Springer T. A., Birkhäuser, DMV Seminar, band **13** (1989).