

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

L'arithmétique des variétés rationnelles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 1, n^o 3
(1992), p. 295-336

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1992_6_1_3_295_0

© Université Paul Sabatier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'arithmétique des variétés rationnelles^(*)

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Le texte ci-dessous développe l'exposé fait à Toulouse à l'occasion de la remise du prix Fermat le 19 juin 1991. Il s'agit d'un rapport général sur l'arithmétique des variétés rationnelles. Après un rappel historique on décrit les méthodes de fibration et de descente. On dresse ensuite la liste des cas concrets où ces méthodes ont permis d'établir principe de Hasse et approximation faible.

ABSTRACT. — The text elaborates on the address I gave at Toulouse in June 1991. I first review the status of the Hasse principle and of related problems, up to the early seventies. I then describe two basic approaches which enable one to produce new classes of varieties for which the Hasse principle holds : these are the fibration method and the descent method. The text ends up with a systematic survey of all concrete cases where these techniques – or some complementary one – have been successfully applied.

1. De Diophante à Hasse

Étudier une équation diophantienne, c'est chercher les solutions à coordonnées entières, ou à coordonnées rationnelles, d'un système d'équations

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

où les $f_i(x_1, \dots, x_n)$ sont des polynômes à coefficients entiers (ou rationnels). Lorsque les polynômes sont homogènes, il n'y a pas de distinction essentielle entre le problème en entiers et le problème en rationnels.

(*) Reçu le 26 mars 1992

(1) C.N.R.S., Mathématique, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex (France)

Plusieurs types de questions se présentent : décider si oui ou non il y a une solution; finitude ou non de l'ensemble des solutions; lorsqu'il y en a un nombre infini, les "décrire" toutes (trouver une méthode systématique pour les engendrer), dire si elles sont denses (par exemple parmi les solutions réelles). On peut aussi poser des questions quantitatives ([Ba/Ma]) : calculer le nombre $r(N)$ de solutions entières (resp. rationnelles) (x_1, \dots, x_n) de "taille" (maximum des valeurs absolues des coordonnées, respectivement "hauteur") ne dépassant pas N , ou du moins donner des estimations pour $r(N)$ lorsque N tend vers l'infini; estimer la taille de la plus petite solution. Dans cet exposé, je ne considérerai que des problèmes qualitatifs (existence et densité des solutions).

L'archétype de ces problèmes est l'équation homogène en nombres entiers (Babyloniens, 1700 av. J.-C.; Pythagore, 500 av. J.-C., Diophante, 300 ap. J.-C.)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

dont les solutions en nombres entiers premiers entre eux dans leur ensemble sont toutes décrites par

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = u^2 + v^2.$$

En nombres rationnels, ceci peut se réinterpréter comme donnant toutes les solutions de l'équation $x^2 + y^2 = 1$ au moyen de

$$x = \frac{2u}{u^2 + 1}, \quad y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1},$$

et ceci de façon essentiellement unique ($u = x/(1 - y)$). Bien que la démonstration de ce résultat utilise le théorème sur la factorisation unique des entiers, on peut prétendre qu'au moins le résultat rationnel n'est pas un résultat arithmétique, le même énoncé étant valable avec le corps \mathbb{Q} des rationnels remplacé par un corps quelconque — de fait plus généralement, pour a, b non nuls dans un corps donné k , on obtient de façon essentiellement biunivoque (on paramétrise) toutes les solutions de l'équation

$$ax^2 + by^2 = 1$$

dès qu'on en connaît une solution, en considérant le pinceau de droites passant par cette solution.

Diophante a considéré de nombreuses équations polynomiales, pour lesquelles il avait trouvé des solutions paramétriques particulières. Ainsi Diophante ([Dio], Livre V) donna-t-il des solutions paramétriques particulières pour les surfaces cubiques (communiquées par G. Lachaud) :

$$2x^3 + ax^2 + b = y^3 + z^3,$$

$$ax^2 + b = y^3 - z^3.$$

Bien qu'il y ait des traces dans l'antiquité de problèmes vraiment diophantiens (e.g. l'équation dite de Pell), les historiens semblent s'accorder pour trouver chez Fermat les premières méthodes de résolution proprement diophantiennes au sens moderne, c'est-à-dire qui reposent de façon cruciale sur l'arithmétique des entiers (ou des rationnels) : voir à ce sujet les livres de Scharlau/Opolka [Sch/O] et Weil [W2]. Il en est ainsi pour deux thèmes centraux de cet exposé, le principe local-global et la méthode de la descente. Je parlerai plus tard de la descente. Voici des énoncés bien connus de Pierre de Fermat qu'on peut voir comme des ancêtres du principe local-global.

THÉORÈME 1 [Fermat]. — *Tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est une somme de deux carrés d'entiers.*

THÉORÈME 2 [Lagrange]. — *Tout nombre entier positif est une somme de 4 carrés d'entiers.*

PROPOSITION 3 [Fermat]. — *Un entier de la forme $4^n(8m + 7)$ (n, m entiers positifs) n'est pas une somme de 3 carrés d'entiers, ni même de 3 carrés de nombres rationnels.*

THÉORÈME 4 [Gauss]. — *Un entier positif non de la forme $4^n(8m + 7)$ est une somme de 3 carrés d'entiers (énoncé par Fermat sous la forme essentiellement équivalente : tout entier positif est somme de trois nombres "triangulaires").*

La proposition 3 est élémentaire, mais la méthode est importante. C'est celle des congruences. En chassant les dénominateurs, l'énoncé en rationnels se ramène à l'énoncé suivant : pour m entier naturel fixé, il n'y a pas de solutions en entiers x, y, z, t non tous nuls à l'équation

$$(8m + 7)t^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On peut supposer (x, y, z, t) premiers entre eux (on parle alors de solution "primitive"). Observons que tout carré d'entier est congru soit à 0 soit à 1 soit à 4 modulo 8. Si t était pair, on aurait $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \pmod{4}$ et donc x, y, z pairs, ce qui est exclu. Si t est impair, alors $x^2 + y^2 + z^2 = 7 \pmod{8}$, mais ceci est impossible.

La méthode est toute générale. Face à une équation diophantienne en nombres rationnels, on la ramène par une homogénéisation convenable à une équation en entiers, et l'on se demande si toutes les équations aux congruences possibles ont des solutions. Si ce n'est pas le cas, on a fini : il n'y a pas de solutions entières, ni rationnelles (l'ensemble des congruences à considérer est a priori infini, mais des arguments généraux permettent dans la plupart des cas de se limiter aux congruences modulo un nombre fini d'entiers, qu'on peut de surcroît choisir parmi les puissances de nombres premiers). Il y a aussi une autre obstruction possible à l'existence de solutions rationnelles — c'est l'absence de solutions réelles au problème (-1 n'est pas somme de carrés de nombres rationnels...). Ainsi un premier congru à 3 modulo 4 n'est pas une somme de deux carrés. On peut voir par contre que dans les théorèmes 1, 2 et 4, les hypothèses assurent précisément qu'aucune congruence ou condition de réalité ne s'oppose à la résolution en nombres entiers du problème diophantien considéré. Néanmoins, le fait que ces conditions de congruence soient satisfaites n'est qu'une interprétation *a posteriori* de notre part. Le premier énoncé formellement de type local-global est dû à Legendre; en voici une reformulation moderne.

THÉORÈME 5 [Legendre]. — *Soient a, b, c des entiers relatifs, non nuls, non tous de même signe. L'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ a une solution non triviale en nombres entiers si et seulement si toutes les équations aux congruences modulo les puissances de nombres premiers ont des solutions (primitives).*

C'est là un énoncé remarquable : pour les équations considérées, on dispose d'une méthode systématique pour décider de l'existence de solutions en nombres entiers. On aimerait bien disposer d'énoncés de ce genre pour d'autres types d'équations diophantiennes, et c'est là l'un des thèmes centraux de cet exposé.

Revenons au résultat de Legendre. En fait il suffit de considérer le cas où le produit abc est sans facteur carré. Pour établir l'existence d'une solution globale, Legendre utilise uniquement l'existence de solutions primitives de congruences modulo les nombres premiers divisant le produit abc , et le fait que les nombres a, b, c ne sont pas tous de même signe (cette condition

assure l'existence de solutions réelles). Ces hypothèses impliquent en fait automatiquement l'existence de solutions à toutes les congruences modulo une puissance d'un nombre premier impair quelconque. Mais de façon plus surprenante, Legendre n'a pas besoin dans sa démonstration de l'existence de solutions aux congruences modulo une puissance de 2 (cf. [Bo/Sha]).

Ceci peut être vu comme la première apparition d'une loi de réciprocité. De fait, Legendre essaya de s'appuyer sur ce phénomène pour démontrer la loi de réciprocité quadratique (conjecturée par lui et par Euler) pour son symbole de reste quadratique (pour p, q premiers impairs, $(p/q) = \pm 1$, et $(p/q) = +1$ si et seulement si p est un carré modulo q) :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

La "preuve" de Legendre était complète, mais elle s'appuyait sur l'existence de nombres premiers dans une progression arithmétique ... résultat établi par Dirichlet par des méthodes analytiques en 1837. La loi de réciprocité quadratique fut établie par Gauss (1796).

La fin du XIX^e siècle et le début du XX^e virent le développement de généralisations de la loi de réciprocité quadratique et de l'étude de la représentation des nombres premiers par des formes quadratiques binaires. Il s'agit là de la théorie dite du corps de classes (Hilbert, Furtwängler, Takagi, Hasse...). Dans cette théorie, les outils analytiques développés par Dirichlet (fonctions zêta, fonctions L) jouent un rôle très important. Ce sont eux qui permirent à Hilbert (1899) d'établir l'analogue du résultat de Legendre sur un corps de nombres (extension finie de \mathbb{Q}).

Ce fut Hasse qui formula explicitement la notion de principe local-global, et qui l'établit dans de nouveaux cas importants.

Pour énoncer ces résultats en toute généralité, et avec souplesse, il convient ici d'introduire le langage des corps p -adiques, dû à Hensel (fin du XIX^e). Ce langage permet de remplacer la considération des congruences modulo toutes les puissances d'un nombre premier p , avec les ennuis présentés par le fait que l'anneau \mathbb{Z}/p^n a des diviseurs de zéro dès que $n > 1$, par la considération d'un anneau intègre \mathbb{Z}_p (la limite projective, sur $n \in \mathbb{N}$, des \mathbb{Z}/p^n) et de son corps de fractions \mathbb{Q}_p . Une équation polynomiale $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ à coefficients dans \mathbb{Z} a des zéros modulo toutes les puissances de p si et seulement si elle a un zéro à coordonnées dans \mathbb{Z}_p . Lorsqu'on s'intéresse seulement à l'existence de solutions rationnelles (coordonnées dans \mathbb{Q}), les conditions nécessaires de congruence sont remplacées par

la condition d'existence d'une solution (non nulle si le polynôme est homogène) à coordonnées dans le corps \mathbb{Q}_p , dont le maniement est plus aisé. De plus, les différents corps \mathbb{Q}_p peuvent être mis en parallèle avec le corps \mathbb{R} des réels : \mathbb{Q}_p est, tout comme \mathbb{R} , le complété de \mathbb{Q} pour une métrique (mais une métrique non archimédienne). On obtient ainsi toutes les métriques possibles. Le même mécanisme vaut pour un corps de nombres quelconque k . On appelle *place* une classe d'équivalence de métriques non triviales sur le corps k , et on note k_v le complété de k en la place v . Les corps k_v sont dits corps locaux.

Les résultats de Legendre, Minkowski (sur \mathbb{Q}) et Hilbert apparaissent maintenant comme des cas particuliers du théorème suivant.

THÉORÈME 6 [Hasse 1924]. — *Une forme quadratique $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ à coefficients dans un corps de nombres k a un zéro non trivial dans k si et seulement si elle a un zéro non trivial dans chacun des complétés k_v de k .*

Le point original et délicat de la démonstration de Hasse, même sur \mathbb{Q} , est dans le passage du cas de 3 variables au cas de 4 variables, où il fait usage du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans une progression arithmétique. Le passage du cas de 4 variables à 5 variables est simple, et l'argument peut être largement généralisé (méthode des fibrations, section 3 ci-dessous).

Comme application immédiate du théorème, on voit que tout entier positif non de la forme $4^n(8m+7)$ est une somme de trois carrés dans \mathbb{Q} (on peut déduire de ce résultat la représentation comme somme de trois carrés dans \mathbb{Z} , i.e. le théorème 4). Les conditions données expriment en effet que l'entier est somme de trois carrés dans \mathbb{R} et \mathbb{Q}_2 , et la représentation dans les autres complétés est automatique.

Au cours du développement de la théorie du corps de classes, le principe local-global fut établi par Hasse dans d'autres cas. Le théorème de Legendre-Hilbert est le cas $n = 2$ du théorème suivant.

THÉORÈME 7 [Hasse 1924]. — *Soit K/k une extension de corps de nombres de degré n et ω_i ($i = 1, \dots, n$) une base de K sur k . Si K/k est cyclique, pour tout a dans k , le principe local-global vaut pour les équations normales $a = N_{K/k}(\sum_{i=1}^n x_i \omega_i)$: si l'élément a de k est une norme partout localement, c'en est une globalement.*

En fait, Hasse établit plus; il obtint pour K/k cyclique, une suite exacte (où N désigne la norme de l'extension K/k) :

$$0 \rightarrow k^*/NK^* \rightarrow \sum_v k_v^*/NK_v^* \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Lorsque $n = 2$, le fait que l'application composée

$$k^*/NK^* \rightarrow \sum_v k_v^*/NK_v^* \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

soit nulle a comme corollaire la loi de réciprocité quadratique.

Hasse eut recours au groupe de Brauer d'un corps pour généraliser encore ce résultat. Le groupe de Brauer d'un corps k est un invariant qu'on voit de nos jours comme un invariant cohomologique : $\text{Br}(k) = H^2(\text{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^*)$, où \bar{k} est une clôture algébrique de k , et \bar{k}^* le groupe multiplicatif de \bar{k} , vu comme module sous l'action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Un des résultats finaux de la théorie du corps de classes, qui englobe le résultat précédent, dit que pour v place de k corps de nombres, il y a une injection inv_v de $\text{Br}(k_v)$ dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} — c'est un isomorphisme pour v place non archimédienne — et qu'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \sum_v \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (2)$$

la dernière flèche étant la somme des inv_v .

2. De Hasse à Manin

Il me sera maintenant nécessaire d'employer le langage de la géométrie algébrique, et je parlerai de k -variétés algébriques, plutôt que de "systèmes d'équations à coefficients dans k ". Les variétés projectives sont celles définies par un système d'équations homogènes. On prendra garde que deux systèmes d'équations d'apparence différente peuvent définir deux k -variétés k -isomorphes. Une k -variété est dite lisse, ou non singulière, si elle satisfait (localement) le critère jacobien de régularité. Une k -variété est dite intègre si elle est irréductible (elle n'est pas union de deux sous-variétés fermées propres) et réduite (il n'y a pas de nilpotents dans son faisceau

structural — le faisceau des fonctions). Notons \bar{k} une clôture algébrique de k . Une k -variété est dite géométriquement intègre si la variété “géométrique” $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, c’est-à-dire la variété X vue sur la clôture algébrique \bar{k} , est intègre. On note $X(k)$ l’ensemble des points k -rationnels (qu’on appelle encore k -points, ou simplement points rationnels) d’une telle k -variété; pour une variété définie par un système d’équations affines comme au début de l’exposé, ce n’est autre que l’ensemble des solutions à coordonnées dans k . Plus généralement, pour F un corps contenant k , on note $X(F)$ l’ensemble des points F -rationnels de X . Deux k -variétés algébriques intègres (c’est-à-dire irréductibles et réduites) sont dites k -birationnellement équivalentes, ou k -birationnelles l’une à l’autre, si elles possèdent des ouverts non vides k -isomorphes, c’est-à-dire si leurs corps de fonctions rationnelles $k(X)$ et $k(Y)$ sont k -isomorphes. On peut montrer que si les k -variétés X et Y sont projectives, non singulières et k -birationnellement équivalentes, $X(k)$ est non vide si et seulement si $Y(k)$ est non vide.

On ne peut ici que regretter, puis entériner, l’utilisation du mot *rationnel* dans un certain nombre d’acceptations :

- le corps \mathbb{Q} des rationnels;
- les points k -rationnels (à coordonnées dans le corps de base k);
- les applications rationnelles d’une variété irréductible X dans une variété Y : morphismes d’un ouvert non vide de X dans Y , ne s’étendant pas nécessairement à tout X ;
- les fonctions rationnelles sur une variété (applications rationnelles de cette variété dans la droite);
- enfin une k -variété irréductible est dite k -rationnelle si elle est k -birationnelle à l’espace affine \mathbf{A}_k^n (ou à l’espace projectif \mathbf{P}_k^n), et elle est dite rationnelle si elle devient birationnelle à un espace affine après extension du corps de base k .

Lorsque k est un corps de nombres, on dit qu’une k -variété X satisfait le *principe de Hasse* (le principe local-global) si de l’hypothèse $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k on peut déduire $X(k) \neq \emptyset$ (cette terminologie étant justifiée par le théorème 6). On dit qu’une k -variété X satisfait l’*approximation faible* si pour tout ensemble fini S de places v de k , l’image de $X(k)$ par l’application diagonale de $X(k)$ dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$ est dense dans ce produit topologique (chaque $X(k_v)$ étant muni de la topologie induite par celle de k_v).

L'expérience montre d'une part qu'il n'est raisonnable d'étudier ces propriétés que pour des variétés lisses géométriquement intègres, d'autre part que ces deux propriétés sont presque inextricablement liées. L'espace affine \mathbf{A}_k^n satisfait l'approximation faible; on en déduit que toute k -variété lisse k -rationnelle satisfait aussi l'approximation faible.

Les concepts de la géométrie algébrique permettent de mettre de l'ordre dans tous les systèmes d'équations possibles, et donc dans les problèmes diophantiens, ordre bien meilleur que celui donné par exemple par le "degré" des équations. Ainsi une cubique projective plane avec un point singulier est essentiellement équivalente à la droite projective (on sait bien la paramétrer, même sur son corps de définition), ce qui n'est pas le cas des courbes cubiques planes non singulières. On commence par classer les k -variétés par leur dimension : courbes, surfaces, etc. Puis on les classe géométriquement, c'est-à-dire en étendant le corps de base à un corps algébriquement clos le contenant. On s'attend à des comportements diophantiens très différents suivant cette classification géométrique.

Les courbes (projectives et lisses) sont ainsi d'abord classées par leur genre g , entier naturel. Sur un corps algébriquement clos, une courbe (projective et lisse) est de genre zéro si et seulement si elle est rationnelle, plus précisément, si elle est isomorphe (sans exception) à la droite projective \mathbf{P}^1 . Toute k -courbe rationnelle projective et lisse C est k -isomorphe à une conique plane non singulière définie sur k (Hilbert et Hurwitz). Ainsi :

- Une k -courbe rationnelle projective et lisse C avec $C(k)$ non vide est k -isomorphe à la droite projective sur k (on paramètre les k -points). En particulier, l'approximation faible vaut pour C .
- Sur un corps de nombres k , une k -courbe rationnelle C , projective et lisse, satisfait le principe de Hasse.

Les courbes de genre 1 avec un k -point sont les courbes elliptiques (cubiques planes non singulières). Pour une telle courbe C définie sur le corps k , l'ensemble $C(k)$ peut être muni d'une loi de groupe. Si k est un corps de nombres, ce groupe admet un nombre fini de générateurs : c'est le théorème de Mordell-Weil (1922-1928), dont la démonstration repose sur la descente infinie à la Fermat. Les courbes de genre ≥ 2 sur un corps de nombres n'ont qu'un nombre fini de points rationnels (Faltings 1983).

En dimension plus grande que 1, un analogue naturel des courbes de genre zéro consiste en les variétés rationnelles (birationnelles, sur une extension du corps de base, à un espace projectif), et une question naturelle est la

validité des énoncés ci-dessus (“paramétrage” des points rationnels, principe de Hasse, approximation faible) pour les variétés de cette classe.

Déjà en dimension 2, la classification à équivalence k -birationnelle près des k -variétés rationnelles est fort subtile (pour un résumé des résultats et des références précises à la littérature, voir [Ma/Ts], [CT3], [K/S/T]). Cette classification fut faite par F. Enriques en 1897, modernisée par Manin et Iskovskih à la fin des années 60, complétée par Iskovskih en 1979 ([I]). Toute k -surface rationnelle est k -birationnelle à une k -surface projective et non singulière de l’un des types standards suivants :

- surface de Del Pezzo ($1 \leq d \leq 9$);
- surface fibrée en coniques au-dessus d’une conique ($-\infty \leq d \leq 8$).

Ici d désigne le “degré” $d = (\omega, \omega)$ auto-intersection du faisceau canonique (c’est un entier relatif). Pour une surface fibrée en coniques, cet entier est lié au nombre r de fibres géométriques dégénérées (celles qui sont union de deux droites se coupant transversalement) par la relation $d = 8 - r$. Les surfaces de Del Pezzo de degré 3 sont les surfaces cubiques non singulières, celles de degré 4 les intersections non singulières de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 (voir [K/S/T]).

Des techniques de systèmes linéaires à points bases peuvent permettre (B. Segre 1951, Manin et Iskovskih 1967-72) de distinguer ces classes entre elles du point de vue k -birational. En particulier, comme l’observa sans doute le premier B. Segre, l’existence d’un point k -rationnel est loin d’assurer la k -rationalité d’une k -surface rationnelle (un autre invariant permettant de détecter la non k -rationalité sera décrit ci-dessous). Pour d petit ($d \leq 1$), on ne sait même pas si l’existence d’un k -point assure que les k -points sont Zariski-denses (i.e. non tous situés sur une sous-variété propre).

La théorie du corps de classes et des manœuvres algébriques permirent par la suite d’établir le principe de Hasse et l’approximation faible pour de nouvelles classes de variétés algébriques, pour la plupart rationnelles. Ainsi, en 1945, F. Châtelet établit le principe de Hasse pour les variétés dites de Severi-Brauer, variétés qui après extension des scalaires sont isomorphes *sans exception* à un espace projectif. En fait Châtelet associe de façon purement algébrique à une telle k -variété une classe dans $\text{Br}(k)$, classe dont la nullité équivaut à l’existence d’un k -point. Il établit que toute telle k -variété avec un k -point est k -isomorphe à un espace projectif \mathbf{P}_k^n . La suite (2) donne alors le principe de Hasse (voir [CT4]).

Une variété de Severi-Brauer est une variété homogène sous un groupe algébrique linéaire. L'étude des espaces homogènes (principaux ou non) sous des groupes algébriques linéaires, combinée avec les versions modernes de la théorie du corps de classes (Tate-Nakayama), fournit de nombreuses classes de variétés (rationnelles ou proches de l'être) pour lesquelles on peut établir le principe de Hasse et l'approximation faible (Landherr, Eichler, Kneser, Harder, Voskresenskiĭ, Platonov, Sansuc, Rapinchuk, Borovoi, voir [Bo1], [Bo2], [Kn] [Pl/Ra], [S1], [V]).

Skolem, Segre, Selmer, Châtelet, Swinnerton-Dyer établirent le principe de Hasse pour des surfaces cubiques possédant des propriétés algébrico-géométriques diverses (voir [CT4], [S2], [Co/Ts]). Ainsi, le principe de Hasse vaut pour les surfaces cubiques singulières (Skolem 1955, voir Coray et Tsfasman [Co/Ts] pour une analyse systématique et moderne du cas des surfaces de Del Pezzo singulières). Le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour les surfaces cubiques lisses contenant un doublet, un triplet ou un sextuplet de droites globalement définies sur le corps de base, et gauches deux à deux (Châtelet, Swinnerton-Dyer).

Dans essentiellement tous les cas considérés par ces auteurs, il y a une transformation k -birationnelle qui ramène la surface donnée à une k -surface rationnelle standard avec $d \geq 5$, et pour laquelle le corps de classes donne le principe de Hasse et d'ailleurs aussi l'approximation faible (variété de Severi-Brauer, équation norme d'une extension de degré 3, etc.).

De façon générale, comme le montra Manin en 1966 ([Ma1], complété pour le cas $d = 5$ par Swinnerton-Dyer, voir aussi [Ma/Ts]), les surfaces rationnelles de type standard (classification ci-dessus), pour $d \geq 5$, ont les deux propriétés :

- l'existence d'un k -point, automatique pour $d = 5$ et $d = 7$, implique que la surface est k -rationnelle ;
- sur un corps de nombres, le principe de Hasse vaut.

On peut en particulier déduire de ces résultats que le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour les intersections lisses de deux quadriques dans l'espace projectif \mathbf{P}^4 contenant un doublet de droites gauches globalement définies sur le corps de base (une telle surface est de degré 4, mais la contraction simultanée des deux droites la ramène à une surface de Del Pezzo de degré 6).

Mais le "principe de Hasse" et l'approximation faible peuvent être mis en défaut! Hasse lui-même s'en était aperçu en ce qui concerne le principe de

Hasse, avec une équation norme $a = N_{K/\mathbb{Q}}(\sum_{i=1}^n x_i \omega_i)$ pour une extension K/\mathbb{Q} non cyclique (de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$). Pour les courbes de genre 1, des contre-exemples au principe de Hasse furent donnés par Reichardt et Lindt vers 1940 (intersections de deux quadriques dans \mathbb{P}^3).

Il fallut attendre plus longtemps pour voir apparaître des contre-exemples parmi les surfaces rationnelles. Des contre-exemples au principe de Hasse, sur le corps \mathbb{Q} , furent trouvés parmi les surfaces cubiques non singulières par Swinnerton-Dyer (1962) et Cassels et Guy (1966) :

$$5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0.$$

Iskovskih (1970) en trouva parmi les surfaces fibrées en coniques :

$$y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2)$$

et Birch et Swinnerton-Dyer (1975) parmi les surfaces de Del Pezzo de degré 4. Swinnerton-Dyer (1962) donna aussi le premier contre-exemple à l'approximation faible (une surface X fibrée en coniques définie sur \mathbb{Q} telle que $X(\mathbb{Q})$ soit non vide mais non dense dans $X(\mathbb{R})$).

Dans ces divers exemples, les arguments sont tous fondés sur la finitude des "factorisations" possibles, et sur des lois de réciprocité plus ou moins "explicites". En 1970, au congrès international de Nice, Manin proposa un mécanisme général pour décrire les contre-exemples au principe de Hasse ([Ma2], [Ma3]). L'obstruction de Manin met en jeu le groupe de Brauer $\text{Br}(X)$ d'une variété X , qui est par définition le deuxième groupe de cohomologie étale de X à valeurs dans le groupe multiplicatif G_m (c'est la généralisation "naturelle" du groupe de Brauer d'un corps). Étant donné un élément \mathcal{A} du groupe de Brauer d'une k -variété X , F un corps contenant k , et $P \in X(F)$, on peut "évaluer" \mathcal{A} en P . On obtient ainsi un élément $\mathcal{A}(P) \in \text{Br}(F)$.

PROPOSITION 8 [Manin]. — *Soit X une variété projective et lisse sur un corps de nombres. Si pour tout élément (P_v) du produit des $X(k_v)$ il existe un élément \mathcal{A} du groupe de Brauer-Grothendieck $\text{Br}(X)$ tel que $\sum_v \text{inv}_v(\mathcal{A}(P_v)) \neq 0$, alors $X(k)$ est vide.*

Cet énoncé (où la finitude de la somme résulte de l'hypothèse de projectivité faite sur X) est une conséquence de la suite de Hasse (2) — à noter qu'on utilise seulement que cette suite est un complexe (i.e. que le composé des flèches est nul). Cette obstruction permit à l'époque d'expliquer tous les

contre-exemples connus, sauf celui de Cassels-Guy, d'équation simple mais de justification assez complexe. En 1977, Sansuc et moi-même ([CT/S1]) remarquâmes que l'on peut définir de façon analogue, en termes du groupe de Brauer global, une obstruction à l'approximation faible, qui explique le contre-exemple de Swinnerton-Dyer (1962), et invite à en fabriquer de nombreux autres. Dans la suite, on appellera "de Brauer-Manin" l'une ou l'autre de ces obstructions.

Notons ici que l'expérience montre qu'il est bien plus facile de fabriquer des contre-exemples à l'approximation faible que des contre-exemples au principe de Hasse. Il serait intéressant, pour des familles spécifiques d'équations, de donner une forme quantitative à cette impression générale.

Passons aux contre-exemples à la "paramétrisation" (essentiellement) biunivoque des points k -rationnels, c'est-à-dire à la question de savoir si une k -variété lisse rationnelle X avec un k -point est k -rationnelle. Pour une k -surface rationnelle standard avec $d \leq 4$, l'existence d'un point k -rationnel n'assure pas la trivialité k -birationnelle. On a des contre-exemples déjà sur les réels (nombre de composantes connexes réelles supérieur à 2). De façon plus algébrique, on dispose d'au moins deux techniques pour établir qu'une k -surface rationnelle X n'est pas k -rationnelle : la technique des systèmes linéaires à points bases, déjà évoquée, et la technique générale de l'invariant $\text{Pic}(\overline{X})$.

Disons quelques mots sur ce dernier invariant, développé par Shafarevich, Manin ([Ma1], [Ma3]) et Voskresenskiï ([V]). Il s'agit du groupe de Picard $\text{Pic}(\overline{X})$ des classes de faisceaux inversibles à isomorphisme près, ou encore des classes de diviseurs modulo l'équivalence rationnelle, sur la variété (lisse) \overline{X} , groupe que l'on voit comme module galoisien, c'est-à-dire comme groupe abélien équipé d'une action du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{k}/k)$. Pour une variété rationnelle projective et lisse, ce groupe abélien est libre de type fini. Un module galoisien est dit de permutation s'il admet une base (sur \mathbb{Z}) laissée globalement stable par l'action du groupe de Galois. Le module est dit stablement de permutation si après somme directe avec un module de permutation il devient de permutation.

Le résultat de base, observé par les auteurs ci-dessus (voir aussi [CT/S6]) est que si la k -variété projective et lisse X est k -rationnelle, alors le module galoisien $\text{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation. Ceci est encore vrai sous l'hypothèse a priori plus faible que X est stablement k -rationnelle, c'est-à-dire que pour n, m entiers convenables le produit $X \times_k \mathbb{P}_k^n$ est k -birationnel à \mathbb{P}_k^m .

En particulier, pour des raisons algébriques simples, le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(\bar{X}))$ est alors nul. On peut bien sûr se poser la question : si pour une k -variété rationnelle (projective et lisse) X , le module galoisien $\text{Pic}(\bar{X})$ est stablement de permutation, et si X possède un point k -rationnel, la variété X est-elle au moins stablement k -rationnelle? Ceci fut établi par V. E. Voskresenskii pour les compactifications non singulières de tores algébriques ([V], [CT/S2]). Il n'en est pas ainsi en général, mais le cas des surfaces rationnelles est ouvert.

L'invariant $\text{Pic}(\bar{X})$ est lié au groupe de Brauer, dont nous avons parlé plus haut : pour une k -variété rationnelle projective et lisse, le groupe $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ est un sous-groupe du groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}(\bar{X}))$ (et est en fait égal à ce dernier groupe dans de nombreux cas, e.g. si k est un corps de nombres). En particulier, le groupe de Brauer est trivial (tout élément de $\text{Br}(X)$ provient de $\text{Br}(k)$) si $\text{Pic}(\bar{X})$ est un module de permutation.

Tant la méthode des systèmes linéaires à points bases que la méthode du module galoisien $\text{Pic}(\bar{X})$ assurent qu'aucune des surfaces d'équation affine :

$$(M) \quad x^3 + y^3 + z^3 + a = 0, \quad a \notin k^{*3},$$

$$(C) \quad y^2 - az^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad a \notin k^{*2}, \quad e_i \neq e_j \text{ pour } i \neq j,$$

n'est k -rationnelle.

Ceci exclut donc une paramétrisation à la Diophante de tous les points rationnels de ces surfaces. Le même problème se pose pour les équations de Diophante mentionnées au début de l'exposé.

Cependant, en 1958, F. Châtelet [Ch] réussit, sur un corps de nombres, à paramétrer les points rationnels de la surface C au moyen d'un nombre fini de paramétrisations — *multivoques*. La technique employée par Châtelet est fort semblable à celle utilisée dans la démonstration du théorème de Mordell-Weil, pour la courbe elliptique E d'équation

$$(E) \quad y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad a \notin k^{*2}, \quad e_i \neq e_j \text{ pour } i \neq j.$$

Pour E , sur un corps de nombres, un argument de factorisation, lointain descendant de ceux utilisés par Fermat pour établir que la courbe elliptique d'équation

$$y^2 = x(x - 1)(x + 1)$$

n'a à distance finie que les trois solutions \mathbb{Q} -rationnelles évidentes, montre qu'il existe un nombre fini d'éléments c_α et d_α de k^* tels que tout point k -rationnel de E provienne, par la projection sur la première équation, d'un point k -rationnel d'une des variétés E_α donnée par le système d'équations

$$\begin{aligned} y^2 &= (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \\ x - e_1 &= c_\alpha u_1^2 \\ x - e_2 &= d_\alpha u_2^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, il se trouve que pour $c_\alpha = 1$ et $d_\alpha = 1$, la courbe E_α est k -isomorphe à E , la projection s'identifiant à la multiplication par 2. Ceci permet de réinterpréter la finitude comme celle de $E(k)/2E(k)$: c'est le théorème de Mordell-Weil faible ([W1]).

Pour la surface de Châtelet C , sur un corps de nombres, un argument de factorisation tout similaire, mais à base de normes (pour l'extension quadratique $k(\sqrt{a})/k$) plutôt que de carrés, montre qu'il existe un nombre fini d'éléments c_α et d_α de k^* tels que tout point k -rationnel de C provienne, par la projection sur la première équation, d'un point k -rationnel sur l'une des variétés W_α donnée par le système d'équations

$$\begin{aligned} y^2 - az^2 &= (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \\ x - e_1 &= c_\alpha(u_1^2 - av_1^2) \\ x - e_2 &= d_\alpha(u_2^2 - av_2^2). \end{aligned}$$

Comme les variétés W_α sont de dimension 4, aucune ne saurait être k -birationnelle à la variété C . Mais Châtelet réussit à montrer que les variétés W_α possédant un k -point sont k -rationnelles : d'où le résultat sur le nombre fini de paramétrisations (multivoques).

Manin vers 1970 ([Ma3]) reformula quelque peu les résultats de Châtelet, en introduisant des relations d'équivalence sur l'ensemble $X(k)$ des points k -rationnels, en particulier la notion de " R -équivalence", sur les points k -rationnels d'une k -variété X . Deux k -points sont dits élémentairement liés s'il existe une courbe de genre zéro passant par l'un et l'autre, plus précisément s'il existe un k -morphisme d'un ouvert U de la droite affine \mathbb{A}_k^1 dans X tel que les deux k -points soient dans l'image de $U(k)$. Cette relation engendre la R -équivalence. Manin définit aussi l'équivalence de Brauer, par accouplement de $X(k)$ avec le groupe de Brauer $\text{Br}(X)$. On obtient ainsi deux quotients : $X(k)/R$ et $X(k)/\text{Br}$. Pour une variété projective, l'équivalence de Brauer est plus grossière que la R -équivalence. Le quotient $X(k)/R$

est une approximation de la répartition en classes de paramétrages. Pour k un corps de nombres, et X une k -variété rationnelle projective et lisse, le quotient $X(k)/\text{Br}$ est fini. Manin pose la question de la finitude de $X(k)/R$ pour X une surface cubique définie sur un corps de nombres; il réinterprète le résultat de Châtelet comme établissant la finitude de $X(k)/R$ pour des surfaces cubiques particulières (un accident fait que pour ces surfaces, R -équivalence et équivalence de Brauer coïncident).

Vers 1970, et à la suite de travaux de Manin et de Swinnerton-Dyer, il se posait donc les questions :

- Trouver de nouvelles classes de variétés pour lesquelles le principe de Hasse vaut. À défaut, trouver des classes de variétés pour lesquelles l'obstruction de Brauer-Manin est la seule.
- Pour quelles classes de k -variétés rationnelles le module galoisien $\text{Pic}(\overline{X})$ (à addition près d'un module de permutation) contrôle-t-il la k -rationalité, ou du moins la k -rationalité stable?

Les pratiques de factorisation et de descente à la Fermat-Mordell-Weil sur les courbes de genre 1 avaient fait l'objet de travaux systématiques, en particulier de Selmer, Cassels et Tate, qui avaient dégagé le moule commun algébrique-géométrique, et arithmétique, sous-jacent aux diverses factorisations "à la main" (isogénies de courbes elliptiques, " λ -revêtements"). Elles avaient aussi mené à des contre-exemples au principe de Hasse pour les courbes de genre 1 (e.g. $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ (Selmer)), le principe étant que l'on part d'une telle courbe C de genre 1, sans point rationnel évident, et que par des factorisations comme dans l'exemple ci-dessus, on produit un nombre fini de courbes auxiliaires explicites C_α et de morphismes $f_\alpha : C_\alpha \rightarrow C$, tels que $C(k)$ soit la réunion des $f_\alpha(C_\alpha(k))$. Dans certains cas, il se peut très bien que la courbe initiale C ait des points dans tous les complétés k_v , mais que pour chaque courbe C_α , il existe au moins un complété où C_α n'ait pas de points. A fortiori, chacun des ensembles $C_\alpha(k)$ est-il vide, et $C(k)$ est alors vide. La non-validité du principe de Hasse pour les courbes de genre 1 apparaissant dans les descentes sur une courbe elliptique donnée E sur un corps de nombres k est d'ailleurs précisément ce qui empêche de calculer systématiquement le rang du groupe de Mordell-Weil $E(k)$. Se posaient donc les questions :

- Y a-t-il une théorie semblable sous-jacente à l'exemple de Châtelet, et si oui, quel est son domaine d'application?

- Peut-on calculer de manière systématique l'ordre de l'ensemble fini $X(k)/R$ pour une surface de Châtelet sur un corps de nombres? Pour k fixé et X variable, cet ordre est-il borné? (Cette dernière question, posée par Manin, est un analogue d'une question ouverte bien connue sur le rang des courbes elliptiques.)
- Pour X une k -variété rationnelle projective et lisse sur un corps de nombres k , l'ensemble $X(k)/R$ est-il fini? Si oui, comment le calculer?

C'est sur ces questions que, motivé initialement par des suggestions de Swinnerton-Dyer, j'ai apporté quelques lumières. Le cœur de la théorie (la méthode de la descente, section 4 ci-après) a été développé avec Jean-Jacques Sansuc, de nombreux compléments et développements ont été réalisés avec lui, avec d'autres et par d'autres : S. Bloch, D. Coray, D. Kanevsky, B. È. Kunyavskii, P. Salberger, A. N. Skorobogatov, P. Swinnerton-Dyer, M. A. Tsfasman.

Pour limiter cet exposé à une taille raisonnable, je me suis restreint aux thèmes suivants :

- La méthode des fibrations
- La théorie de la descente
- Applications concrètes.

J'ai renoncé à décrire ici les divers travaux de Bloch [Bl], Sansuc, moi-même ([CT/S4], [CT1]) et Salberger ([Sal1], [Sal2], [Sal5]) sur le groupe de Chow des 0-cycles de degré zéro sur les surfaces rationnelles.

Le lecteur désireux d'aller plus loin pourra, dans un premier temps, consulter les articles de synthèse suivants : [Ma/Ts], [S2], [CT3].

3. La méthode des fibrations

Nous conviendrons ici que par principe de Hasse on entend principe de Hasse lisse, c'est-à-dire principe de Hasse pour l'ouvert de lissité des variétés considérées. De même pour la propriété d'approximation faible.

Soient k un corps de nombres et $f : X \rightarrow Y$ une fibration de k -variétés géométriquement intègres; le morphisme f sera toujours supposé fidèlement plat, c'est-à-dire surjectif et plat, et la fibre générique sera supposée géométriquement intègre (une fibre géométrique générale est intègre). La démonstration du théorème de Hasse sur les formes quadratiques à 5 variables à partir du cas à 4 variables amène à poser la question :

Si la base Y de cette fibration satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible, et si les fibres $f^{-1}(P)$ de f au-dessus des k -points P de Y (ce sont des k -variétés algébriques) satisfont le principe de Hasse (et l'approximation faible), l'espace total X satisfait-il le principe de Hasse (et l'approximation faible) ?

Dans la situation ci-dessus, si X possède un k_v -point pour chaque place v de k , il en est de même de Y par projection. Le principe de Hasse sur Y assure alors l'existence d'un point k -rationnel P sur Y . Pour $M_v \in X(k_v)$ lisse dans sa fibre, le théorème des fonctions implicites v -adique assure que si P est suffisamment proche de $f(M_v)$ pour la topologie v -adique, la fibre $f^{-1}(P)$ contient un point k_v -rationnel lisse proche de M_v . Si l'on fixe un ensemble fini S de places de k , l'approximation faible sur Y permet de choisir ce point k -rationnel P proche simultanément de chaque point $f(M_v)$, $v \in S$. On peut donc trouver P k -rationnel tel que sa fibre $f^{-1}(P)$ contienne des points locaux (lisses) dans les k_v pour v dans S . Mais on voudrait trouver P tel que $f^{-1}(P)$ contienne des points dans *tous* les complétés k_v , de façon à pouvoir appliquer le principe de Hasse dans la fibre $f^{-1}(P)$.

Comme le montrent les contre-exemples d'Iskovskih et de Swinnerton-Dyer (fibrations en coniques au-dessus de la droite projective), ceci n'est pas toujours possible, et la réponse à la question générale est non. La méthode esquissée fonctionne néanmoins dans un certain nombre de cas intéressants, que nous allons maintenant décrire.

3.1 Le cas du “noyau” commun

Sous les hypothèses générales ci-dessus, s'il existe une k -variété géométriquement irréductible Z contenue dans chaque fibre, plus précisément si le produit $Z \times_k Y$ se plonge dans X de façon compatible avec la projection sur Y , et sans que l'image de ce plongement soit entièrement contenue dans le lieu singulier de X , alors X satisfait le principe de Hasse (et l'approximation faible).

La démonstration est élémentaire, modulo l'estimation de Lang-Weil sur le nombre de points des variétés géométriquement intègres sur un corps fini, et le lemme de Hensel : en dehors d'un ensemble fini S de places, Z possède des k_v -points, donc toute fibre $f^{-1}(P)$ aussi. L'argument ci-dessus permet de trouver $P \in Y(k)$ tel que la fibre $f^{-1}(P)$ contienne des points locaux (lisses) dans les k_v pour v dans S . Mais l'existence de points dans k_v pour $v \notin S$ est ici automatique. Par le principe de Hasse pour $f^{-1}(P)$,

on conclut à l'existence d'un k -point, et l'argument peut être adapté pour établir l'approximation faible, si les fibres $f^{-1}(P)$ la satisfont.

Par exemple, pour tout polynôme non nul $P(x_1, \dots, x_n)$ et a, b, c non nuls dans k , l'équation

$$P(x_1, \dots, x_n) = au^2 + bv^2 + cw^2 \neq 0$$

satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible (ceci généralise le résultat de Hasse sur les formes quadratiques à au moins 5 variables).

3.2 Le cas d'une fibration propre, à fibres géométriques intègres, au-dessus d'une variété propre

Sous les hypothèses générales ci-dessus, si la variété Y est projective, si le morphisme f est projectif (i.e. "il ne manque rien ni dans la base ni dans les fibres") et si toutes les fibres géométriques de f (i.e. les $f^{-1}(P)$ pour $P \in Y(\bar{k})$) sont intègres, alors le principe de Hasse (et l'approximation faible) valent pour X .

Les premiers exemples de ce principe sont dus à Swinnerton-Dyer. La démonstration utilise un modèle "schématique" de la situation au-dessus d'un ouvert U du spectre $\text{Spec}(A)$ de l'anneau A des entiers de k , ouvert qu'on peut choisir tel que toute fibre géométrique soit intègre. Ceci permet alors d'utiliser les estimations de Lang-Weil, quitte à diminuer un peu l'ouvert pour assurer que les corps finis qui sont les corps résiduels de U sont "assez gros".

Exemple. — L'espace total d'une fibration en quadriques génériquement lisse de dimension relative au moins 3 sur la droite projective satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible. Cet exemple est en fait trivial, car toute quadrique de dimension au moins 3 sur un corps local non archimédien (corps p -adique) a automatiquement un point rationnel. Des exemples moins triviaux sont donnés ci-dessous.

On notera que les contre-exemples d'Iskovskih et Swinnerton-Dyer mentionnés à la section 2 ne rentrent pas dans le cadre ici décrit, une fibration en coniques non triviale ayant automatiquement des fibres géométriques réductibles — ce qu'on vérifie en particulier sur les exemples donnés plus haut. Ainsi la combinaison des deux hypothèses (projectivité de la base de la fibration et irréductibilité des fibres géométriques) est essentielle dans l'énoncé ci-dessus. Lorsque la base Y est l'espace projectif, on peut néanmoins un peu relâcher ces hypothèses.

3.3 Le cas d'une fibration propre, à fibres géométriques intègres, au-dessus d'un espace affine

Le cas le plus simple à énoncer est celui où la base est la droite affine.

Avec les hypothèses générales ci-dessus, supposons $Y = \mathbf{A}_k^1$, supposons le morphisme f projectif et toutes les fibres géométriques de f (i.e. les $f^{-1}(P)$ pour $P \in Y(\bar{k})$) intègres, et supposons enfin que le morphisme f admet une section après extension convenable du corps de base. Alors le principe de Hasse (et l'approximation faible) valent pour X .

Outre les ingrédients précédents, la démonstration utilise l'approximation forte sur les entiers de k (généralisation du théorème du reste chinois) et le théorème de densité de Tchebotarev (qui vient de la théorie du corps de classes et de l'étude des fonctions L).

Cet énoncé peut être encore affiné et généralisé. Ainsi, on peut n'imposer le principe de Hasse pour les fibres $f^{-1}(P)$ que pour les points rationnels P de \mathbf{A}^1 dans un ensemble de Hilbert (on utilise ici le théorème d'irréductibilité de Hilbert). On peut aussi fabriquer des énoncés analogues avec pour base l'espace affine de dimension quelconque, en n'autorisant des fibres géométriques dégénérées qu'en codimension 2 sur la base (pour une présentation systématique de ces variantes, et l'énoncé le plus général obtenu à ce jour, on consultera l'article de Skorobogatov [Sk1]).

Exemple. — L'espace total d'une fibration en quadriques génériquement lisse de dimension relative au moins 2 sur la droite affine satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible, à condition que les fibres géométriques singulières ne soient ni un produit de deux plans ni un plan double. Ainsi le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour l'équation

$$\sum_{i=1}^4 a_i(t)x_i^2 = 0,$$

si les $a_i(t)$ sont des polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux.

3.4 Applications

Cette méthode arithmético-géométrique a permis de fabriquer de nouvelles classes de variétés pour lesquelles le principe de Hasse et l'approximation faible valent. On notera que pour mettre la méthode en œuvre, il faut disposer d'une classe de variétés pour lesquelles on connaît le principe de

Hasse (et l'approximation faible), et qui joueront le rôle de fibres : ce sont les *constituants élémentaires* de la méthode des fibrations.

Le premier exemple d'application subtile de la méthode des fibrations apparut dans l'article [CT/S/SwD] (en collaboration avec Sansuc et Swinnerton-Dyer). C'est celui d'une variété X intersection de deux quadriques (suffisamment non dégénérée, mais non nécessairement non singulière) dans l'espace projectif \mathbf{P}^n , contenant une paire de droites gauches conjuguées sous l'action du groupe de Galois.

Lorsque $n = 4$, une transformation k -birationnelle (évoquée au paragraphe 2) et le corps de classes assure que le principe de Hasse (et l'approximation faible) valent pour une telle X . Comme la paire de droites engendre un hyperplan \mathbf{P}^3 , soit H_0 , pour $n > 4$, on peut fibrer la variété X par la famille (linéaire) des \mathbf{P}^4 qui contiennent H_0 . Chaque fibre est une intersection de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 contenant une paire de droites gauches conjuguées : le principe de Hasse et l'approximation faible valent donc dans les fibres. Pour appliquer la technique ci-dessus, il faut alors, et c'est la partie la plus pénible, donner des conditions assurant que toutes (ou presque toutes) les fibres géométriques sont intègres. Ceci n'est pas toujours vrai, et pour $n = 5$ il y a des contre-exemples au principe de Hasse pour une telle intersection de quadriques (de dimension 3). Mais, pour $n \geq 6$, les mauvais cas (existence de fibres géométriques réductibles) se ramènent (algébriquement) à des variétés plus simples, pour lesquelles des méthodes directes, du type de 3.1, ou du type corps de classes, donnent le principe de Hasse.

Le même genre de technique s'applique aux hypersurfaces cubiques possédant un triplet de points singuliers conjugués (Salberger et l'auteur [CT/Sal]), avec là encore des exceptions (à l'approximation faible) en dimension 3. On fibre ici par la famille des hyperplans contenant le plan fixe passant par les trois points singuliers conjugués. Les constituants élémentaires sont ici les surfaces cubiques avec trois points singuliers conjugués, dont on sait qu'elles satisfont principe de Hasse et approximation faible (Skolem, Coray/Tsfasman [Co/Ts]).

La technique s'applique aussi aux hypersurfaces cubiques possédant un doublet de points singuliers conjugués (Harari [Ha]) avec là encore des exceptions à l'approximation faible, en dimension inférieure ou égale à 4. Une telle hypersurface contient une droite k -rationnelle, si bien que seul le problème de l'approximation faible se pose. Les constituants élémentaires sont

ici les surfaces cubiques avec deux points singuliers conjugués, essentiellement équivalentes à des surfaces de Châtelet. Comme indiqué à la section 2, le principe de Hasse et l'approximation faible ne valent pas toujours pour de telles surfaces. Mais dans de nombreux cas, on peut trouver une bonne fibration au-dessus de l'espace affine, telle que, sur un ensemble de Hilbert de l'espace affine, les fibres soient des surfaces de Châtelet satisfaisant principe de Hasse et approximation faible (voir section 5, théorème 10 ci-dessous). Le recours au théorème d'irréductibilité de Hilbert permet alors d'appliquer la méthode des fibrations.

4. La méthode de la descente

Soient k un corps, G un k -groupe algébrique, et X une k -variété. Un *espace principal homogène*, ou *torseur*, sur X sous le k -groupe algébrique G est une k -variété W équipée d'un k -morphisme plat et surjectif $p : W \rightarrow X$ et d'une action, disons à gauche, de G sur W (action définie sur k), qui est "fidèle et transitive" sur les fibres de p , au sens schématique. On a donc une application $G \times W \rightarrow W$, $(g, x) \rightarrow g \cdot x$, satisfaisant :

- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$;
- $e \cdot x = x$ (e élément neutre de G);
- $p(g \cdot x) = p(x)$;
- $p(x) = p(y)$ implique l'existence d'un $g \in G$, g unique, tel que $x = g \cdot y$.

Le groupe G est dit groupe structural du tosseur. Les relations sont à prendre au sens schématique, disons au moins pour les points à coordonnées dans \bar{k} des variétés considérées. En particulier, $W(k)$ peut très bien être vide. Les espaces principaux homogènes en topologie usuelle sont localement triviaux; il n'en est pas de même en géométrie algébrique. C'est là l'un des points de départ de la topologie étale et de la cohomologie étale.

Exemple de tel tosseur. — Soient k un corps, $a \in k^*$, puis X une k -variété algébrique et f une fonction inversible sur X . Soient y, z des variables. Alors la sous-variété W de $X \times_k \mathbf{A}^2$ d'équation

$$f(x) = y^2 - az^2$$

est un tosseur sous le k -groupe algébrique G , de dimension 1, d'équation :

$$u^2 - av^2 = 1,$$

l'action étant donnée par la formule

$$((u, v), (x, y, z)) \mapsto (x, y_1, z_1)$$

avec y_1, z_1 données par l'identité formelle

$$(y_1 + \sqrt{a}z_1) = (u + \sqrt{a}v)(y + \sqrt{a}z).$$

Ce que la théorie moderne des courbes elliptiques a montré, c'est que les variétés de descente dans cette théorie (les $f_\alpha : C_\alpha \rightarrow C$ rencontrés plus haut) sont des toreseurs sous des k -groupes algébriques G finis commutatifs (dans l'exemple classique E donné au paragraphe précédent, le groupe G est le produit du groupe μ_2 des racines carrées de 1 par lui-même).

Selon la théorie des distributions de Weil, ou de façon plus moderne suivant la théorie des schémas et les théorèmes de finitude classiques sur les anneaux d'entiers de corps de nombres, c'est le fait algébrique que ces toreseurs sont définis au-dessus de toute la courbe projective et lisse de base, en particulier qu'il n'y ait pas de ramification à l'infini (comme ce serait le cas pour le revêtement $x = y^2$ de la droite affine de coordonnée x) qui assure, sur un corps de nombres, l'existence d'un nombre fini de toreseurs $f_\alpha : C_\alpha \rightarrow C$, "formes tordues l'un de l'autre", tels que $C(k)$ soit la réunion des $f_\alpha(C_\alpha(k))$.

Pour les courbes elliptiques, ou pour les courbes C de genre 1, les k -groupes commutatifs finis G possibles comme groupes structuraux de tels toreseurs sont à chercher parmi ceux dont le groupe des caractères $\text{Hom}_{\bar{k}}(\bar{G}, \bar{G}_m)$ (groupe des homomorphismes de \bar{k} -groupes algébriques) est un sous-module galoisien fini du groupe $\text{Pic}(\bar{C})$.

Pour une k -variété rationnelle projective et lisse X , il est vain de chercher un analogue parmi les sous-modules finis de $\text{Pic}(\bar{X})$: ce groupe est libre de type fini (sur \mathbb{Z}). Par contre, et ce fut là notre interprétation du travail de Châtelet ([CT/S1], [CT/S3], [CT/S6]), on peut faire appel pour les groupes G aux k -tores algébriques (k -groupes algébriques qui sur \bar{k} deviennent isomorphes à un produit de groupes multiplicatifs \mathbf{G}_m). On dispose d'une (anti-)dualité :

$$\begin{aligned} k\text{-tores} &\longleftrightarrow \text{modules galoisiens libres de type fini} \\ T &\longleftrightarrow \hat{T}. \end{aligned}$$

Restait à discuter quels tores considérer pour généraliser le résultat de Châtelet. En fait la bonne question est : quel type de toseurs? En effet regarder le produit $X \times_k T$ au-dessus de X ne risque guère d'apporter des renseignements. Si $W \rightarrow X$ est un espace principal homogène sous le k -tore T , tout caractère χ de T dans \mathbf{G}_m , défini sur \bar{k} , associe à $W \rightarrow X$, par changement de groupe structural, un toseur sur \bar{X} sous \mathbf{G}_m , qui a une classe dans $\text{Pic}(\bar{X})$. Ainsi l'espace principal homogène $W \rightarrow X$ sous T définit un élément du groupe $\text{Hom}_g(\widehat{T}, \text{Pic}(\bar{X}))$ (groupe des homomorphismes galoisiens, i.e. respectant l'action du groupe de Galois absolu $g = \text{Gal}(\bar{k}/k)$). Cet élément est appelé le *type* du toseur W . Un produit $X \times_k T$ a un type nul.

On ne peut ici, à la différence du cas des courbes elliptiques, espérer retrouver la variété de départ parmi les variétés W_α , dont la dimension est plus grande que celle de X . Mais dans le cas de Châtelet, les k -variétés W_α avec un k -point avaient la propriété surprenante d'être k -rationnelles : ce qui permettait d'obtenir le nombre fini de paramétrisations pour les points rationnels sur un corps de nombres.

Sur un corps de nombres, étant donné un k -tore T et un espace principal homogène W sous T sur la k -variété *projective* X , on montre qu'il existe un nombre fini d'espaces principaux homogènes W_α sur X sous T de même type que W , tels que $X(k)$ soit la réunion des projections des $W_\alpha(k)$.

Ce que Sansuc et moi découvrîmes en 1976/77 [CT/S1], c'est que les toseurs qui, pour une k -variété rationnelle (projective et lisse) quelconque, doivent jouer le rôle des variétés de descente W_α de Châtelet, ce sont les espaces principaux homogènes sur X les plus tordus possibles, à savoir ceux de groupe structural le k -tore T_0 , de groupe de caractère $\text{Pic}(\bar{X})$ lui-même et de type l'élément *identité* dans $\text{Hom}_g(\widehat{T}_0, \text{Pic}(\bar{X})) = \text{Hom}_g(\text{Pic}(\bar{X}), \text{Pic}(\bar{X}))$ (ou, à l'occasion, des toseurs d'un type proche). Sansuc et moi les baptisâmes *toseurs universels* (les autres se déduisant essentiellement de ceux-là par changement de groupe structural). Nous montrâmes ([CT/S1], [CT/S3], [CT/S6]) :

THÉORÈME 9. — *Soit X une k -variété projective et lisse, rationnelle, et soit W un toseur universel sur X . Soit W^c une k -compactification lisse de W . La variété W^c est rationnelle, et le module galoisien $\text{Pic}(\bar{W}^c)$ est un g -module de permutation. Le quotient $\text{Br}(W^c)/\text{Br}(k)$ est trivial.*

Ainsi, sur les (compactifiés lisses) des toseurs universels, l'obstruction à la k -rationalité liée au module galoisien fourni par le groupe de Picard

s'évanouit, ce qui explique en partie, mais en partie seulement, la k -rationalité des W_α de Châtelet. Par ailleurs l'invariant $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ qui entre dans la définition de l'obstruction de Manin au principe de Hasse s'évanouit sur les W^c , ce qui est une nette amélioration par rapport au cas des courbes elliptiques.

Ce théorème montre aussi qu'à condition de prendre les bons torseurs, la descente sur les variétés rationnelles, à la différence du cas des courbes elliptiques, peut être menée "en un coup" : il ne sert à rien d'itérer l'opération sur les compactifiés lisses des torseurs universels, on n'obtiendrait essentiellement que des produits (car les torseurs de groupe structural un k -tore de groupe de caractères un module de permutation sont k -birationnels au produit de la variété de base par un espace projectif).

Ce théorème, l'exemple de Châtelet et celui des tores (section 5) nous amènent à poser les questions :

- a) Si un torseur universel sur une k -variété rationnelle propre et lisse X possède un point k -rationnel, est-ce une variété k -rationnelle, ou du moins stablement k -rationnelle ?
- b) Sur un corps de nombres, les torseurs universels satisfont-ils le principe de Hasse (et l'approximation faible) ?

Une réponse affirmative à la question a) implique que si l'invariant galoisien $\text{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation, et $X(k)$ non vide, alors X est stablement k -rationnelle (il en est par exemple ainsi, d'après Voskresenskii, si X est une k -compactification lisse d'un k -tore). Cependant, pour $\dim(X) \geq 3$, la question a) n'a pas toujours une réponse affirmative. Elle reste ouverte lorsque X est une *surface* rationnelle.

La question b) mérite d'être érigée au rang de conjecture. Elle aurait pour conséquence :

- c) (Conjecture) L'obstruction de Brauer-Manin ([Ma2]) au principe de Hasse pour les variétés rationnelles est la seule.
- d) (Conjecture) L'obstruction de Brauer-Manin ([CT/S1], [CT/S6]) à l'approximation faible pour les variétés rationnelles est la seule.

En effet, en utilisant la théorie du corps de classes à la Tate-Nakayama, on montre que si X a des points dans tous les complétés k_v de k , et s'il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour X , alors il existe un torseur universel sur X qui possède des points dans tous les complétés k_v (il y a un énoncé analogue pour l'approximation faible). Un point important dans notre argument est l'utilisation de l'exactitude au centre de la suite (2),

suite exacte de Hasse pour le groupe de Brauer (par opposition au fait qu'on a un complexe, seule chose utilisée par Manin pour son obstruction). Le fait que l'obstruction de Manin soit vide permet d'obtenir un élément (α_v) de la somme directe des $\text{Br}(k_v)$ tel que $\sum_v (\text{inv}_v(\alpha_v)) = 0$. La suite exacte (2) assure alors l'existence d'un élément global $\alpha \in \text{Br}(k)$ valant α_v localement. Ce sont de tels éléments globaux qui permettent la construction d'un objet géométrique défini sur k , le toseur universel, ayant partout localement des points rationnels.

Les toseurs universels sont définis par une propriété assez abstraite. Pour essayer de répondre aux questions ci-dessus, au moins pour les variétés X dans certaines classes, il faut, dans l'état actuel de la théorie, savoir, à partir d'équations explicites de X , déterminer des *équations explicites de ces toseurs*, auxquelles on peut ensuite appliquer la méthode des fibrations. Notre théorie, qui repose sur des calculs de cohomologie étale, fournit de telles équations ([CT/S6]). Localement sur X pour la topologie de Zariski, on représente les toseurs universels comme des produits fibrés $U \times_R P$, où R et P sont des k -tores, $U \rightarrow R$ un k -morphisme et $P \rightarrow R$ un k -homomorphisme surjectif de k -tores, de noyau T_0 . Ceci dit, nous n'avions là encore qu'un programme.

5. Applications concrètes

5.1 (Compactifications lisses) de tores

Une (k -compactification lisse X) d'un k -tore T est une k -variété rationnelle non nécessairement k -rationnelle. Sansuc et moi-même ([CT/S2]) étendîmes les résultats de Voskresenskii ([V]), en établissant que l'invariant $\text{Pic}(\overline{X})$ caractérise, à équivalence k -birationnelle stable près, les k -tores. De plus, les équations explicites des toseurs universels sur X révèlent que ceux-ci sont tous des k -variétés k -rationnelles : parmi les descriptions $U \times_R P$ mentionnées plus haut, on trouve toujours $T \times_T P \simeq P$, où $T \rightarrow T$ est une translation par un k -point de T , et où P est le k -tore dual d'un module de permutation, et donc est une variété k -rationnelle. Ainsi tout toseur universel contient-il un ouvert k -isomorphe à P , et en particulier est k -rationnel.

La théorie générale décrite plus haut donne alors pour les tores de dimension quelconque l'exact analogue des résultats de Châtelet ([CT/S1],

[CT/S2]). Sur un corps quelconque, les k -points dans une R -classe peuvent être paramétrés (de façon multivoque) par les k -points d'une seule k -variété k -rationnelle. Sur un corps de nombres, les quotients $T(k)/R$ et $X(k)/R$ sont finis, et un nombre fini de paramétrisations donne tous les points rationnels. Il n'y a pas dans ce cas de problème de principe de Hasse pour les toiseurs universels, qui possèdent tous un point k -rationnel. On a des bijections $T(k)/R \simeq X(k)/R \simeq H^1(g, T_0)$, où T_0 est le k -tore dual de $\text{Pic}(\bar{X})$. (On peut en fait faire l'économie de la théorie générale des toiseurs universels pour arriver à ces résultats; c'est ce qui fut fait dans [CT/S2], mais c'est la théorie des toiseurs universels qui nous avait menés au résultat.)

5.2 Surfaces de Châtelet

Par surface de Châtelet (généralisée), on entend une compactification lisse convenable X d'une k -surface d'équation affine

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

avec $P(x)$ polynôme séparable de degré 3 ou 4 et a non carré dans le corps de base k , surfaces parmi lesquelles on trouve les surfaces de Châtelet initiales, mais aussi le contre-exemple d'Iskovskih au principe de Hasse, et un contre-exemple de Swinnerton-Dyer à l'approximation faible. Les premiers résultats en direction de la conjecture c) pour ces surfaces furent obtenus avec Coray et Sansuc [CT/C/S], par une technique spécifique (voir le paragraphe sur les intersections de deux quadriques ci-dessous). Les résultats généraux, que je vais décrire maintenant, furent obtenus avec Sansuc et Swinnerton-Dyer ([CT/S/SwD]).

Les équations concrètes des toiseurs universels montrent que ceux-ci sont k -birationnels au produit d'une conique par une variété Z intersection complète de deux quadriques dans \mathbf{P}^7 , contenant deux droites gauches conjuguées. Un argument géométrique montre alors que la question a) (k -rationalité) sur les toiseurs universels a ici une réponse affirmative. Le résultat obtenu par la méthode de fibration (§ 3.4) montre par ailleurs que b) a aussi une réponse affirmative (l'approximation faible suit déjà de a)).

Comme précédemment, on en déduit, sur un corps de nombres, l'existence d'un nombre fini de paramétrisations des points k -rationnels sur les surfaces de Châtelet généralisées. Mais la théorie de la descente et la validité de b) impliquent aussi que les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur une telle surface sont les seules (conjectures c) et d)). Dans l'exemple d'Iskovskih, où le polynôme $P(x)$ est produit

de deux facteurs irréductibles de degré 2, le groupe de Brauer est non trivial, et l'obstruction de Brauer-Manin expliquait ce contre-exemple (le résultat ci-dessus dit que c'est général). Un calcul algébrique montre que si le polynôme $P(x)$ est irréductible, alors le groupe de Brauer de X est trivial ($\text{Br}(X)/\text{Br}(k) = 0$). On en déduit ([CT/S/SwD]) le théorème suivant.

THÉORÈME 10. — *Soit k un corps de nombres, a dans k non carré, et $P(x)$ un polynôme irréductible de degré 4. Alors le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour l'équation $y^2 - az^2 = P(x)$. Pour P irréductible de degré 3, on a toujours des points rationnels, et l'approximation faible vaut.*

Un cas très particulier est fourni par les équations $y^2 + z^2 = a - x^4$ sur \mathbb{Q} . Le théorème montre qu'un rationnel a peut s'écrire $b^2 + c^2 + d^4$ avec b, c, d dans \mathbb{Q} si et seulement si il est positif et s'il peut s'écrire ainsi dans le complété 2-adique \mathbb{Q}_2 . En termes de congruences, cela se dit ainsi. Soit n un entier positif. Écrivons-le $n = 2^{4r+i}m$ avec m impair, r et i entiers ≥ 0 , et $0 \leq i \leq 3$. Les seuls cas où n ne peut s'écrire sous la forme $b^2 + c^2 + d^4$ avec b, c, d dans \mathbb{Q} sont les suivants :

- i) $i = 0$ et $m \equiv 7 \pmod{8}$;
- ii) $i = 2$ et $m \equiv 3 \pmod{4}$.

On comparera ce résultat avec celui de Gauss sur les sommes de trois carrés (on a ici exclu le nouveau cas $i = 2, m \equiv 3 \pmod{8}$.) La représentation en entiers n'est pas automatique et semble un problème très difficile.

À titre de comparaison, on notera que la caractérisation des rationnels de la forme $b^2 + c^4$ avec b, c rationnels est un problème très ardu sur les courbes de genre 1, et qu'à l'inverse il est facile de montrer que tout rationnel (resp. entier) positif peut s'écrire $b^2 + c^2 + d^2 + e^4$ avec b, c, d, e rationnels (resp. entiers).

5.3 Surfaces fibrées en coniques de degré 4

Les surfaces de Châtelet généralisées sont des surfaces fibrées en coniques de degré 4 d'un type particulier (la fibration possède une section sur une extension quadratique du corps de base). Les énoncés a) et b) ont maintenant été établis pour toutes les surfaces fibrées en coniques de degré 4. Ceci est l'aboutissement de travaux de Salberger, Sansuc, Skorobogatov, et moi-même.

Les équations des toiseurs universels sur les surfaces fibrées en coniques de degré quelconque ont été dégagées par Sansuc et moi ([CT/S6], des résultats

proches, mais dans le langage de la théorie des ordres, ayant été obtenus antérieurement par Salberger [Sal3].

Pour les surfaces fibrées en coniques de degré 4, l'énoncé a) est établi dans [CT/Sk1]. Pour l'énoncé b) on dispose de deux approches, l'une par la K -théorie algébrique et la méthode de la descente est due à Salberger ([Sal3], [Sal4], [Sal5], [Sal7]), l'autre combine la méthode des fibrations et la méthode de la descente ([CT5]).

5.4 Surfaces fibrées en coniques de degré 3

Ces surfaces, qui ont 5 fibres géométriques dégénérées, ne sont autres que les surfaces cubiques lisses dans \mathbf{P}^3 contenant une droite k -rationnelle. Elles ont donc un point k -rationnel, et la seule question qui se pose concerne l'approximation faible : c'est la conjecture d). Cette conjecture vient, dans ce cas, d'être établie par Salberger et Skorobogatov [Sal/Sk], par une combinaison de la méthode de la descente et des résultats de Salberger ([Sal5]) utilisant la K -théorie algébrique. À l'heure actuelle, la méthode de la descente à elle seule ne suffit pas à établir ce résultat.

5.5 Intersections de deux quadriques dans \mathbf{P}^4

Soit $X \subset \mathbf{P}^4$ une telle intersection, supposée pure (de dimension deux), géométriquement intègre et non conique (i.e. "toutes les variables sont là").

Si l'on sait déjà qu'elle possède un k -point, alors la conjecture d) vaut : ceci est une reformulation du résultat de Salberger et Skorobogatov [Sal/Sk] ci-dessus, l'éclatement d'un point k -rationnel convenable n'étant autre qu'une surface cubique avec une droite rationnelle.

Si X est singulière, les conjectures c) et d) valent : ceci est une reformulation de résultats classiques, exposés et complétés par Coray et Tsfasman dans [Co/Ts], et des résultats de [CT/S/SwD] sur les surfaces de Châtelet.

Si X contient une conique définie sur k , alors les conjectures c) et d) valent : comme l'a noté Salberger, c'est une conséquence facile du résultat général sur les surfaces fibrées en coniques de degré 4. Des exemples concrets de telles surfaces sont donnés dans \mathbf{P}^4 par un système d'équations

$$f(x_0, \dots, x_4) = 0$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 0,$$

où f est une forme quadratique.

Pour une intersection lisse de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 générale (i.e. sans structure de fibration en coniques), la conjecture c) (sur le principe de Hasse) est la grande question ouverte dans ce domaine.

5.6 Intersections de deux quadriques en dimension supérieure

Une fois équipé d'une nouvelle classe de variétés satisfaisant le principe de Hasse, on peut la mettre dans la machine des fibrations discutée au paragraphe précédent. On arrive ainsi à établir le principe de Hasse pour de nombreuses intersections de deux quadriques $X \subset \mathbf{P}^n$ satisfaisant certaines restrictions géométriques (deux points singuliers conjugués; deux droites gauches conjuguées).

Pour $X \subset \mathbf{P}^n$, $n \geq 8$, on obtient le meilleur résultat possible : pourvu que le système soit non dégénéré en un sens très faible, et *sans restriction géométrique* du type évoqué ci-dessus, le principe de Hasse vaut [CT/S/SwD]. À vrai dire, dans ce cas ($n \geq 8$), l'existence de solutions p -adiques est automatique (Demjanov 1956; Birch/Lewis/Murphy 1962) si bien qu'au moins lorsque X est lisse la seule condition locale est aux places réelles de k . Le cas $n \geq 12$ avait été établi par Mordell en 1958, et le cas $n \geq 10$ par Swinnerton-Dyer en 1964.

On arrive en effet dans ce cas, par la méthode des fibrations, à se ramener à des surfaces de Châtelet (suggestion de Heath-Brown).

La même méthode permet d'établir le principe de Hasse pour les intersections de deux quadriques dans \mathbf{P}^7 , définies par un système de deux formes quadratiques telles qu'une forme dans le pinceau qu'elles engendrent (sur le corps de base k) soit de rang 7, par exemple pour un système de deux formes quadratiques *simultanément diagonales* (Debbache [Deb]).

Comme l'a remarqué récemment Salberger, on peut plus généralement utiliser les intersections de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 contenant une conique comme constituant élémentaire dans la méthode des fibrations. Salberger en déduit ainsi le principe de Hasse pour les intersections lisses de deux quadriques $X \subset \mathbf{P}^n$, $n \geq 5$ contenant une conique définie sur k (et pour les intersections suffisamment non dégénérées de deux quadriques dans \mathbf{P}^n , $n \geq 6$, contenant une conique définie sur k).

On pense, en particulier parce que l'obstruction de Brauer s'évanouit (pour des raisons purement algébriques, le groupe de Brauer est ici trivial), que le principe de Hasse devrait valoir pour $n = 6, 7$ et même, lorsque X est lisse, pour $n = 5$, mais cela semble pour l'instant hors de portée.

Notons que de la conjecture c) pour les intersections lisses de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 on sait déduire, par la méthode des fibrations, le principe de Hasse pour les intersections lisses de deux quadriques dans \mathbf{P}^n , $n \geq 5$.

Signalons ici une technique spécifique aux intersections de deux quadriques. Considérons une telle variété, définie par

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0, \quad g(x_0, \dots, x_n) = 0,$$

où $f(x_0, \dots, x_n)$ et $g(x_0, \dots, x_n)$ sont deux formes quadratiques à coefficients dans le corps k . Alors cette variété a un point k -rationnel si et seulement si la forme quadratique

$$f(x_0, \dots, x_n) + tg(x_0, \dots, x_n)$$

à coefficients dans le corps de fractions rationnelles $k(t)$ a un zéro non trivial dans le corps $k(t)$ (théorème d'A. Brumer et M. Amer). On peut donc essayer d'étudier l'arithmétique des intersections de deux quadriques à partir de celle des formes quadratiques sur un corps $k(t)$, k corps de nombres. Quand l'intersection de deux quadriques possède quelques propriétés géométriques particulières, on peut appliquer à la forme quadratique $f(x_0, \dots, x_n) + tg(x_0, \dots, x_n)$ des techniques de formes de Pfister. Cette idée fut développée avec Coray et Sansuc dans [CT/C/S], ce qui donna les premiers résultats sur le principe de Hasse pour les intersections de deux quadriques, puis, via la descente, les premiers résultats positifs sur la conjecture c) pour *certaines* surfaces de Châtelet. La technique fut reprise dans [CT/S/SwD, chap. 14]. Salberger ([Sal6]) montra que la technique s'applique dans un cadre plus général que celui que nous avons envisagé initialement, ce qui lui permet, via la descente, de donner une démonstration plus simple des conjectures c) et d) pour *toutes* les surfaces de Châtelet.

Je n'ai pas parlé ici de l'approximation faible. La raison en est qu'elle vaut presque toujours, et que ceci est facile à établir par la méthode des fibrations ([CT/S/SwD]). Plus précisément, si $X \subset \mathbf{P}^n$ est une intersection de deux quadriques, pure, géométriquement intègre et non conique, et si X possède un point k -rationnel non singulier, alors l'approximation faible vaut si $n \geq 6$, et elle vaut si X est lisse et $n = 5$. Dans le cas $n = 5$, il y a des contre-exemples à l'approximation faible, mais Skorobogatov et moi [CT/Sk2] avons établi que la conjecture d) vaut dans ce cas, par réduction au cas des fibrations en quadriques de dimension relative 2 sur la droite projective (Skorobogatov [Sk2], voir ci-dessous). Le cas $n = 4$ a été discuté au paragraphe précédent.

Skorobogatov [Sk1] a également utilisé une méthode de fibrations, couplée avec les résultats sur le principe de Hasse et l'approximation faible pour les intersections de deux quadriques (qui jouent ici le rôle de constituant élémentaire) pour donner des cas de validité de l'approximation faible pour les intersections de *trois* quadriques possédant un point rationnel lisse. Ainsi, si une telle intersection X de trois quadriques dans \mathbf{P}^n est (pure) lisse et $n \geq 11$, l'approximation faible vaut ; on notera qu'on a besoin aussi bien du principe de Hasse que de l'approximation faible dans les fibres (constituants élémentaires) pour obtenir l'approximation faible sur X .

5.7 Surfaces cubiques diagonales

D. Kanevsky, Sansuc et moi [CT/K/S] étudiâmes l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les surfaces cubiques diagonales données par une équation homogène (a, b, c, d entiers non nuls qu'on peut supposer sans facteur cubique) :

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0.$$

Deux contre-exemples au principe de Hasse pour ces surfaces étaient connus (Cassels-Guy 1966, Bremner 1978). Des expériences numériques sur gros ordinateur réalisées par M. Vallino, la cohomologie des groupes finis bicycliques et un théorème de dualité de Tate-Lichtenbaum pour les courbes elliptiques sur un corps local (entre autres outils) nous permirent de donner un algorithme systématique pour calculer l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour une telle surface. Les contre-exemples de Cassels-Guy et Bremner tombaient ainsi dans le moule de Manin. Mieux, pour toutes les surfaces avec a, b, c, d entiers de valeur absolue < 100 , soit il n'y avait pas de point dans un complété, soit l'obstruction de Manin montrait l'inexistence d'un point rationnel, soit l'ordinateur trouva une solution rationnelle. Ceci nous conforta fortement dans la conjecture qu'au moins pour les surfaces cubiques diagonales, l'obstruction de Brauer-Manin est la seule.

Kanevsky [K] nota que s'il en est bien ainsi, alors une méthode de fibrations montre que le principe de Hasse vaut pour les hypersurfaces cubiques diagonales

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 + ew^3 = 0,$$

ce qui est une conjecture bien connue (qu'on peut formuler, plus généralement, pour toutes les hypersurfaces cubiques non singulières). L'exposé de

Kanevsky contient aussi d'autres applications intéressantes de l'hypothèse que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour les surfaces cubiques. Ainsi, il déduit de cette hypothèse que toute surface cubique sur \mathbb{Q} devrait avoir un point rationnel dans une extension abélienne de \mathbb{Q} .

L'article [CT/K/S] contient des équations très explicites de variétés de descente (substitués des toseurs universels) associées aux surfaces cubiques diagonales, mais à ce jour nous n'avons pas réussi à appliquer à ces variétés une méthode de fibrations qui nous ramènerait en terrain connu.

5.8 Hypersurfaces cubiques avec un ensemble de points singuliers conjugués

J'ai mentionné plus haut l'application de la méthode des fibrations aux hypersurfaces cubiques contenant trois points singuliers conjugués. La méthode échoue en basse dimension dans certains cas, à cause de la présence de fibres géométriques non intègres. Ces fibres ont tendance à faire grandir le groupe $\text{Pic}(\overline{X})$, ce qui laisse une chance de faire des descentes non triviales. De fait, dans le problème considéré, les variétés de descente peuvent toujours se ramener à des hypersurfaces cubiques avec 3 points singuliers conjugués pour lesquelles la méthode des fibrations avait déjà établi la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible! Salberger et moi [CT/Sal] établîmes ainsi, en fin de compte, le principe de Hasse pour toute telle hypersurface cubique (dimension ≥ 2 , le cas de la dimension 2 étant classique (Skolem 1955, Segre 1956, Coray/Tsfasman [Co/Ts])). Supposant de plus les hypersurfaces absolument irréductibles et non coniques, nous montrâmes que l'approximation faible vaut en dimension différente de 3, et qu'en dimension 3 l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule obstruction.

D. Harari ([Ha]) travaille en ce moment sur les hypersurfaces cubiques géométriquement intègres possédant *deux points singuliers conjugués*. Une réduction algébrique ramène de telles hypersurfaces à des variétés fibrées en coniques au-dessus de l'espace affine définies par une équation affine :

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \dots, x_n)$$

avec $P(x_1, \dots, x_n)$ de degré total 4. Sous l'hypothèse que l'équation ci-dessus ne se ramène pas à une équation à moins de variables, il a établi que principe de Hasse et approximation faible valent si $n \geq 4$. Pour $n \leq 3$, il y a des contre-exemples. Pour $n = 3$, les obstructions de Brauer-Manin sont les seules obstructions. Le cas $n = 2$ présente encore quelques difficultés.

5.9 Fibrations en quadriques de dimension relative 2 au-dessus de la droite projective

Skorobogatov ([Sk2]) a appliqué la méthode de la descente aux fibrations en quadriques de dimension relative 2 sur la droite projective, et il a établi que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule lorsqu'il y a au plus deux fibres géométriques dégénérées. Il vient aussi d'analyser ([Sk3]) certains points de géométrie algébrique sous-jacents à des transformations k -birationnelles étonnantes ("lemme d'Abhyankar", voir aussi [CT/S6]) qui permettent de simplifier les équations des toseurs universels pour de telles fibrations, et pour d'autres (fibrations "toriques").

5.10 Espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes

S'appuyant sur la riche structure de ces espaces, et sur les résultats de Kneser et Harder dans le cas semi-simple simplement connexe, Sansuc ([S1]) étudia le cas des espaces principaux homogènes de groupes algébriques linéaires connexes non nécessairement simplement connexes, et établit en toute généralité que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour ces variétés est la seule. Des résultats ont été obtenus sur les espaces homogènes *non principaux* de groupes algébriques semi-simples simplement connexes. Le cas des espaces homogènes qui sont des variétés projectives, généralisation du cas des variétés de Severi-Brauer, fut observé par Harder en 1968. Le cas des espaces symétriques a été établi par Rapinchuk. Borovoi ([Bo1], [Bo2], [Bo3]) fait en ce moment une étude systématique du principe de Hasse et de l'approximation faible pour tous les espaces homogènes. Ses résultats recouvrent déjà ceux de Harder et de Rapinchuk. Il reste cependant du travail à faire dans cette direction pour décider si les conjectures c) et d) valent en toute généralité.

Signalons ici une approche intéressante de l'approximation faible sur les groupes algébriques linéaires, via la méthode des fibrations (Kunyavskiï et Skorobogatov, appendice à [Sk1]).

5.11 Un résultat conditionnel

Pour une k -compactification lisse X de la variété affine d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

avec $P(x)$ irréductible de degré quelconque, on peut encore montrer que le groupe de Brauer est trivial, si bien que sur un corps de nombres, il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse.

En 1978, Sansuc et moi remarquâmes que la validité de la conjecture de Schinzel (si P_i , $i = 1, \dots, r$, sont des polynômes à coefficients entiers et coefficients dominants positifs, irréductibles, et si aucun premier ne divise tous les entiers $\prod_{i=1}^r P_i(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, alors il existe une infinité de valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ avec $P_i(n)$ premier pour chaque $i = 1, \dots, r$ — généralisation hardie du théorème de Dirichlet sur laquelle travaillent en particulier les spécialistes du crible) implique, sur \mathbb{Q} , la validité du principe de Hasse (et de l'approximation faible) pour l'équation ci-dessus. La remarque est simple : il suffit de copier l'utilisation par Hasse du théorème de Dirichlet dans la démonstration du principe local-global pour les formes quadratiques à 4 variables. Toujours sur \mathbb{Q} , lorsque $P(x)$ est réductible, et avec quelques réserves sur le type de décomposition de $P(x)$ en produit d'irréductibles, nous montrâmes que, sous l'hypothèse de Schinzel, les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sont les seules obstructions.

Tout récemment (janvier 1992), Serre a étendu ce résultat conditionnel à toutes les surfaces fibrées en coniques sur la droite projective, autorisant même le corps de base à être un corps de nombres quelconque. Le résultat de Serre concerne plus généralement des variétés fibrées au-dessus de la droite projective, et dont la fibre générique est une variété de Severi-Brauer (ou même un produit de telles variétés). Swinnerton-Dyer [SwD] a aussi des résultats dans cette direction.

5.12 Position par rapport à la méthode du cercle

Il existe une méthode très générale pour établir l'existence de points rationnels sur une intersection complète d'hypersurfaces dans \mathbf{P}^n :

$$F_i(x_0, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

C'est la méthode du cercle de Hardy-Littlewood, considérablement développée par Davenport [Da], Birch [Bi] et d'autres (voir [Sch]). Traditionnellement, cette méthode, plus précisément les difficultés analytiques à majorer la contribution des arcs mineurs, requièrent que le nombre de variables n soit élevé par rapport au (multi-)degré $\sum_{i=1}^m \deg(F_i)$ des équations définissant l'intersection complète, et aussi à la dimension du lieu singulier de cette intersection complète ([Bi], voir aussi [Sch]). La méthode du cercle, quand elle fonctionne, donne formellement des énoncés du type principe de Hasse ([Bi]). Cependant, le nombre de variables requis est presque toujours si grand que l'existence de solutions locales aux places non archimédiennes est automatique (comme c'est le cas pour les quadriques de dimension au

moins trois), si bien que la seule vraie condition est l'existence de solutions réelles, lorsque le degré de certaines des hypersurfaces est pair.

Ainsi, la plupart des résultats sur le principe de Hasse obtenus par nos méthodes (descente et fibrations s'appuyant sur des constituants élémentaires fournis par la théorie du corps de classes) ne peuvent à l'heure actuelle être obtenus par la méthode du cercle : le nombre de variables est "trop petit" pour que l'on puisse appliquer cette méthode (par ailleurs les difficultés techniques inhérentes à la méthode du cercle amènent la plupart des spécialistes à se limiter au cas où le corps de base est le corps \mathbb{Q} des rationnels).

On peut par contre objecter que notre méthode est limitée à des équations d'un type fort particulier (bas degré), faute de disposer de beaucoup de constituants élémentaires, alors que la méthode du cercle s'applique à des intersections complètes de multidegré quelconque — pourvu qu'on exige un grand nombre de variables.

Par ailleurs, la méthode du cercle est essentiellement une méthode pour compter le nombre de solutions d'un système d'équations dans une boîte de taille donnée. Quand la méthode fonctionne bien, elle donne des estimations pour le nombre de ces solutions de hauteur au plus N , pour N tendant vers l'infini, et elle peut dans certains cas donner des estimations pour la taille d'une plus petite solution — ce que nos méthodes, purement qualitatives, ne donnent pas.

En bas degré, la méthode du cercle a récemment connu des progrès considérables (au prix parfois d'une perte sur l'information quantitative). Ainsi on sait maintenant :

- Toute hypersurface cubique *lisse* dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$, $n \geq 9$ a un point rationnel (Heath-Brown [HB]).
- Le principe de Hasse vaut pour les hypersurfaces cubiques *lisses* dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^8$, (Hooley [Hoo1]) et même pour certaines hypersurfaces cubiques $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^8$ possédant des singularités isolées (Hooley [Hoo2]). (Notons que le résultat de [Hoo1] implique aisément, par la méthode des fibrations, que le résultat de Heath-Brown vaut encore pour les hypersurfaces cubiques dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$, $n \geq 9$ avec des singularités isolées).
- Toute hypersurface cubique *diagonale* dans $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^n$, $n \geq 6$ a un point rationnel (R. C. Baker [Bak], qui utilise une méthode de Vaughan).

Selon Heath-Brown, la technique de [HB] peut permettre d'établir le principe de Hasse pour les intersections complètes lisses de deux quadriques

dans $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^n$, pour $n \geq 9$ — alors que notre méthode vaut pour essentiellement toute intersection de deux quadriques sur un corps de nombres, avec $n \geq 8$ (rappelons que pour $n \geq 8$ les seules conditions locales sont aux places réelles). De même, la méthode du cercle a permis à Cook [Coo] d'établir le principe de Hasse pour une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^n$ définie par deux formes quadratiques *simultanément diagonales*, pour $n \geq 8$, alors que notre méthode donne ce résultat sur un corps de nombres quelconque pour $n \geq 7$ ([Deb]).

Les résultats de Hooley sur les hypersurfaces cubiques lisses mentionnés plus haut sont les premiers exemples d'un vrai principe de Hasse établi par la méthode du cercle (l'existence de solutions locales aux places non archimédiennes n'est pas automatique avec 9 variables). On peut se demander si, avec les mêmes restrictions (lissité, corps de base \mathbb{Q}), la méthode du cercle ne pourrait pas maintenant permettre d'attraper les cas des intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^8$.

Il existe un cas classique, dû à Davenport, Birch et Lewis [B/D/L], où la méthode du cercle établit le principe de Hasse pour une équation avec "peu" de variables. Il s'agit d'équations du type

$$a \cdot N_{K/\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i \right) + b \cdot N_{K/\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i y_i \right) + ct^n = 0$$

avec a, b, c non nuls dans \mathbb{Q} , le corps K extension de degré n de \mathbb{Q} , et ω_i , $i = 1, \dots, n$ une base de K sur \mathbb{Q} , les variables étant x_i ($i = 1, \dots, n$), y_i ($i = 1, \dots, n$), t (en fait on pourrait autoriser la deuxième norme à être celle d'une autre extension de \mathbb{Q} de degré n).

Comme l'a observé Salberger (non publié), au moins sur \mathbb{Q} , nous aurions pu avoir recours à ce résultat (pour $n = 3$) pour établir le principe de Hasse sur certaines des variétés de descente (succédanés de toiseurs universels) apparaissant dans [CT/Sal] (au lieu d'appliquer la méthode des fibrations).

On aimerait assister à d'autres telles rencontres de la méthode de la descente et de la méthode du cercle, l'idée générale — et vague — étant que quand on passe d'une variété donnée à une variété de descente, la différence "nombre de variables moins degré" a tendance à croître, et donc à se rapprocher du domaine où la méthode du cercle pourrait s'appliquer. Mais pour l'instant, on ne sait même pas traiter ainsi les surfaces de Châtelet (les variétés de descente sont des intersections de deux quadriques dans \mathbf{P}^7 , possédant 8 points singuliers isolés).

5.13 Un problème de géométrie birationnelle classique : le problème de Zariski

L'étude des surfaces de Châtelet menée par Sansuc, Swinnerton-Dyer et moi-même eut en 1984 un surprenant sous-produit.

Lorsque $P(x)$ est un polynôme irréductible de degré 3, de discriminant a non carré dans le corps de base k , une k -compactification lisse X de la variété affine d'équation

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

a ceci de particulier que le module $\text{Pic}(\overline{X})$ est stablement de permutation. La k -rationalité des toreseurs universels assure alors que X est stablement k -rationnel. Mais la méthode des systèmes linéaires à points bases permet de montrer que X n'est pas k -rationnelle (Iskovskih). Ainsi la surface $y^2 + 3z^2 = x^3 - 2$ sur \mathbb{Q} n'est pas \mathbb{Q} -rationnelle, mais elle est stablement \mathbb{Q} -rationnelle.

Remplaçant \mathbb{Q} par $\mathbb{C}(t)$, et utilisant une technique de jacobiennes intermédiaires développée par Clemens-Griffiths, Mumford et Beauville, nous pûmes, en collaboration avec Beauville, fabriquer des variétés de dimension 3 sur \mathbb{C} , stablement rationnelles mais non rationnelles ([B/CT/S/SwD]), ce qui répondit ainsi négativement à une vieille question de Zariski (1950).

Bibliographie

- [Bak] BAKER (R.C.) . — *Diagonal cubic equations, II*, Acta Arithmetica **53** (1989), pp. 217-250.
- [Ba/Ma] BATYREV (V.V.) et MANIN (YU.I.) . — *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Annalen **286** (1990), pp. 27-43.
- [B/CT/S/SwD] BEAUVILLE (A.), COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SANSUC (J.-J.) et SIR PETER SWINNERTON-DYER . — *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. **121** (1985), pp. 283-318.
- [Bir] BIRCH (B.J.) . — *Forms in many variables*, Proc. R. Soc. Lond. **265 A** (1962), pp. 245-263.
- [B/D/L] BIRCH (B.J.), DAVENPORT (H.) and LEWIS (D.J.) . — *The addition of norm forms*, Mathematika **9** (1962), pp. 75-82.
- [Bl] BLOCH (S.) . — *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **14** (1981), pp. 41-59.
- [Bo/Shaf] BOREVICH (Z.I.) et SHAFAREVICH (I.R.) . — *Théorie des nombres*, Nauka, Moscou 1985 (3ème édition); Gauthier-Villars, Paris (1967).

- [Bo1] BOROVoi (M.V.) . — *On weak approximation in homogeneous spaces of simply connected algebraic groups*, in Proc. Internat. Conf. "Automorphic functions and their applications, Khabarovsk 1988", Khabarovsk 1990.
- [Bo2] BOROVoi (M.V.) . — *The Hasse principle for homogeneous spaces*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **426** (1992), pp. 179-192.
- [Bo3] BOROVoi (M.V.) . — *Abelianization of the second non-abelian Galois cohomology*, Preprint MPI, 91-53.
- [Ch] CHÂTELET (F.) . — *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques*, Ens. Math. **5** (1959), pp. 153-170.
- [CT1] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) . — *Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces*, Inv. Math. **71** (1983), pp. 1-20.
- [CT2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) . — *Surfaces cubiques diagonales*, in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1984-85, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **63** (1986), pp. 51-66.
- [CT3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) . — *Arithmétique des variétés rationnelles et problèmes birationnels*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, California 1986 (1987), Tome I, pp. 641-653.
- [CT4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) . — *Les grands thèmes de François Châtelet* (exposé fait lors de la journée en l'honneur de F. Châtelet, Besançon, 28 Septembre 1987), Ens. Math. (2ème série) **34** (1988), pp. 387-405.
- [CT5] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) . — *Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-89, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91** (1990), pp. 43-55.
- [CT/C/S] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), CORAY (D.) et SANSUC (J.-J.) . — *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. Für die Reine und Ang. Math. (Crelle) **320** (1980), pp. 150-191.
- [CT/K/S] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), KANEVSKY (D.) et SANSUC (J.-J.) . — *Arithmétique des surfaces cubiques diagonales*, in Diophantine Approximation and Transcendence Theory, Springer L.N.M., **1290** (ed. G. Wüstholz) (1987), pp. 1-108.
- [CT/Sal] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) and SALBERGER (P.) . — *Arithmetic on some singular cubic hypersurfaces*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **58** (1989), pp. 519-549.
- [CT/S1] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) . — C. R. Acad. Sc. Paris **282** (1976), pp. 1113-1116; **284**, pp. 967-970; **284** (1977), pp. 1215-1218.
- [CT/S2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) . — *La R -équivalence sur les tores*, Ann. Sc. E.N.S. **10** (1977), pp. 175-229.
- [CT/S3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) . — *La descente sur les variétés rationnelles*, in Journées de géométrie algébrique d'Angers (juillet 1979), édité par A. Beauville, Sijthof et Noordhof (1980), pp. 223-237.
- [CT/S4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) and SANSUC (J.-J.) . — *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), pp. 421-447.
- [CT/S5] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) . — *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arithmetica **41** (1982), pp. 33-53.

- [CT/S6] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.) . — *La descente sur les variétés rationnelles*, II, Duke Math. J. **54** (1987), pp. 375-492.
- [CT/S/SwD] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.), SANSUC (J.-J.) and SIR PETER SWINNERTON-DYER . — *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces*, I, J. für die reine und angew. Math. (Crelle), **373** (1987) pp. 37-107; II, *ibid.* **374** (1987), pp. 72-168.
- [CT/Sk1] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) and SKOROBOGATOV (A.N.) . — *R-equivalence on conic bundles of degree 4*, Duke Math. J. **54** (1987), pp. 671-677.
- [CT/Sk2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) and SKOROBOGATOV (A.N.) . — *Approximation faible pour les intersections de deux quadriques en dimension 3*, C. R. Acad. Sc. Paris **314**, Série I (1992), pp. 127-132.
- [Coo] COOK (R.J.) . — *Simultaneous quadratic equations*, J. London Math. Soc. (2) **4** (1971), pp. 319-326.
- [Co/Ts] CORAY (D.F.) and TSFASMAN (M.A.) . — *Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), pp. 25-87.
- [Da] DAVENPORT (H.) . — *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, Ann Arbor, Ann Arbor Publishers (1962).
- [Deb] DEBBACHE (A.) . — *Principe de Hasse pour certaines intersections de deux quadriques*, prépublication (1990).
- [Des] DESHOUILLERS (J.-M.) . — *L'étude des formes cubiques rationnelles via la méthode du cercle [d'après D. R. Heath-Brown, C. Hooley et R. C. Vaughan]*, Séminaire Bourbaki, 42ème année (1989-90), exposé 720, Astérisque **189-190**, pp. 155-177.
- [Dio] DIOPHANTE . — *Les Arithmétiques*, texte établi par R. Rashed, notes mathématiques par G. Lachaud et R. Rashed, vol. I (Livre IV), vol. II (Livres V-VI-VII), Paris, Les Belles Lettres (1984).
- [Ha] HARARI (D.) . — *Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces*, prépublication, 1992.
- [HB] HEATH-BROWN (D.R.) . — *Cubic forms in ten variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), pp. 225-257.
- [Hoo1] HOOLEY (C.) . — *On nonary cubic forms*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **386** (1988), pp. 32-98.
- [Hoo2] HOOLEY (C.) . — *On nonary cubic forms II*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **415** (1991), pp. 95-165.
- [I] ISKOVSKIĖ (V.A.) . — *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), pp. 19-43; trad. angl. Math. USSR Izv. **14** (1980), pp. 17-39.
- [Kan] KANEVSKY (D.) . — *Application of the conjecture on the Manin obstruction to various diophantine problems*, in Journées arithmétiques de Besançon 1985, Astérisque **147-148** (1987), pp. 307-314.
- [Kn] KNESER (M.) . — *Lectures on Galois cohomology of classical groups*, Tata Institute of Fundamental Research (1969).
- [K/S/T] KUNYAVSKIĖ (B.È.), SKOROBOGATOV (A.N.) and TSFASMAN (M.A.) . — *Del Pezzo surfaces of degree four*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome **117** (1989), Mémoire **37** (nouvelle série).

- [Ma1] MANIN (YU.I.) . — *Surfaces rationnelles sur les corps parfaits (en russe)*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **30** (1966), pp. 55-113.
- [Ma2] MANIN (YU.I.) . — *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, in Actes du Congrès international de mathématiques, Nice 1970. Gauthiers-Villars, Paris 1971, Tome 1, pp. 401-411.
- [Ma3] MANIN (YU.I.) . — *Cubic forms : algebra, geometry, arithmetic*, Second edition, North Holland, 1986.
- [Ma/Ts] MANIN (YU.I.) and TSFASMAN (M.A.) . — *Rational varieties: algebra, geometry, arithmetic*, Uspekhi Mat. Nauk **41** (1986), pp. 43-94 (Russian math. surveys **41** (1986), pp. 51-116).
- [Pl/Ra] PLATONOV (V.P.) et RAPINCHUK (A.S.) . — *Groupes algébriques et théorie des nombres (en russe)*, Nauka, Moscou (1991).
- [Sal1] SALBERGER (P.) . — *K-theory of orders and their Brauer-Severi schemes*, Thèse, Université de Göteborg, 1985.
- [Sal2] SALBERGER (P.) . — *Galois descent and class groups of orders*, in Lecture Notes in Math. **1142**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1985.
- [Sal3] SALBERGER (P.) . — *Sur l'arithmétique de certaines surfaces de Del Pezzo*, C.R. Acad. Sc. Paris **303** (1986), série I, pp. 273-276.
- [Sal4] SALBERGER (P.) . — *On the arithmetic of conic bundle surfaces*, in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1985-86, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **71** (1987), pp. 175-197.
- [Sal5] SALBERGER (P.) . — *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. math. **91** (1988), pp. 505-524.
- [Sal6] SALBERGER (P.) . — *On the arithmetic of certain intersections of two quadrics*, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **394** (1989), pp. 159-167.
- [Sal7] SALBERGER (P.) . — *Some new Hasse principles for conic bundle surfaces*, in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1987-88, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **81** (1989), pp. 283-305.
- [Sal/Sk] SALBERGER (P.) and SKOROBOGATOV (A.N.) . — *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63** (1991), pp. 517-536.
- [S1] SANSUC (J.-J.) . — *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), pp. 12-80.
- [S2] SANSUC (J.-J.) . — *Principe de Hasse, surfaces cubiques et intersections de deux quadriques*, in Journées arithmétiques de Besançon 1985, Astérisque **147-148** (1987), pp. 183-207.
- [Sch] SCHMIDT (W.M.) . — *Analytische Methoden für Diophantische Gleichungen*, D.M.V. Seminar **5** Birkhäuser (1984).
- [Sch/O] SCHARLAU (W.) und OPOLKA (H.) . — *Von Fermat bis Minkowski*, Springer (1980).
- [Sk1] SKOROBOGATOV (A.N.) . — *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-89, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91** (1990), pp. 205-219.
- [Sk2] SKOROBOGATOV (A.N.) . — *Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension two*, I, J. für die reine und angew. Math. (Crelle) **407** (1990), pp. 57-74.

- [Sk3] SKOROBOGATOV (A.N.) . — *Descent on toric fibrations*, preprint 1991.
- [V] VOSKRESENSKIĬ (V.E.) . — *Tores algébriques* (en russe), Nauka, Moscou (1977).
- [SwD] SIR PETER SWINNERTON-DYER . — *Rational points on pencils of conics and on pencils of quadrics*, Preprint 1992.
- [W1] WEIL (A.) . — *Sur un théorème de Mordell*, Bull. Sc. Math. (2) 54 (1928), pp. 182-191.
- [W2] WEIL (A.) . — *Number Theory, an approach through history from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser (1984).