

MARIE-LAURENCE MAZURE

MICHEL VOLLE

**Équations inf-convolutives et conjugaison  
de Moreau-Fenchel**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 12,  
n° 1 (1991), p. 103-126

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1991\\_5\\_12\\_1\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1991_5_12_1_103_0)

© Université Paul Sabatier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Équations inf-convolutives et conjugaison de Moreau-Fenchel

MARIE-LAURENCE MAZURE<sup>(1)</sup> et MICHEL VOLLE<sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On montre comment la conjugaison de Fenchel généralisée par Moreau permet de résoudre les équations liées aux opérateurs d'inf-convolution et de déconvolution.

**ABSTRACT.** — The generalized Moreau-Fenchel's conjugation enables us to solve equations dealing with infimal convolution and deconvolution.

---

## Introduction

La formulation variationnelle de la soustraction parallèle d'opérateurs symétriques semi-définis positifs a conduit de façon naturelle à considérer l'équation

$$\xi \square f = g, \quad (1)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions convexes définies sur un espace vectoriel  $X$  et où le symbole  $\square$  désigne l'opération d'inf-convolution, c'est-à-dire explicitement l'équation

$$\inf\{\xi(x) + f(y - x) \mid x \in X\} = g(y), \quad \forall y \in X.$$

L'étude réalisée dans [8] et [14] établit que, lorsqu'elle est possible, la résolution de (1) se fait au moyen de la déconvolution  $g \boxminus f$  de la fonction  $g$  par la fonction  $f$ .

---

<sup>(1)</sup> LMC-IMAG, Université Joseph-Fourier, BP 53X, 38041 Grenoble, France.

<sup>(2)</sup> Université d'Avignon, Faculté des Sciences, 33 rue Pasteur, 84000 Avignon, France.

Toujours dans le cadre vectoriel, la généralisation de ces résultats en l'absence de toute hypothèse de convexité sur les fonctions  $f$  et  $g$  permet de mettre en évidence, notamment grâce à l'étude conjointe de l'équation  $\xi \boxplus f = g$ , en quel sens l'inf-convolution et la déconvolution sont des opérations inverses l'une de l'autre ([13]).

Par ailleurs, il est possible, même lorsque l'espace  $X$  n'est pas muni d'une structure additive, de rencontrer certains types d'équations généralisant (1) : ainsi les fonctions globalement lipschitziennes de rapport  $r$  sur un espace métrique  $X$  sont-elles caractérisées par la relation

$$\inf\{g(x) + rd(x, y) \mid x \in X\} = g(y), \quad \forall y \in X.$$

Ceci nous conduit naturellement à envisager de façon plus générale des équations du type suivant, où la fonction  $c$  est définie sur un produit cartésien  $X \times Y$  :

$$\inf\{\xi(x) + c(x, y) \mid x \in X\} = g(y), \quad \forall y \in Y,$$

adoptant ainsi le point de vue présenté dans [24]. Dans cette étude, l'outil de base sera la notion de conjugaison généralisée au sens de Moreau-Fenchel dont un exemple intéressant est, dans le cas vectoriel, la déconvolution d'une fonction donnée. Nous constaterons que cette nouvelle approche apporte un éclairage nouveau sur les différentes propriétés de cette dernière opération.

### 1. La conjugaison de Moreau-Fenchel

Sur l'ensemble  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , nous noterons  $\dot{+}$  (resp.  $\dot{-}$ ) l'extension de l'addition des réels avec prédominance en  $+\infty$  (resp. en  $-\infty$ ) suivant la convention de Moreau, c'est-à-dire, pour  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  :

$$\begin{aligned} a \dot{+} b &= +\infty && \text{si et seulement si } a = +\infty \text{ ou } b = +\infty, \\ a \dot{+} b &= -\infty && \text{si et seulement si } a = -\infty \text{ ou } b = -\infty. \end{aligned}$$

On passe de l'une à l'autre de ces deux lois par la relation :

$$-(a \dot{+} b) = (-a) \dot{-} (-b), \quad \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}},$$

soit, en notant respectivement  $\dot{-}$  et  $\dot{+}$  les lois opposées (c'est-à-dire :  $a \dot{-} b = a \dot{+} (-b)$  et  $a \dot{+} b = a \dot{-} (-b)$ ),

$$-(a \dot{-} b) = b \dot{+} a, \quad \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} \tag{2}$$

Lorsque  $X$  et  $Y$  désignent deux espaces vectoriels réels, mis en dualité par une forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on connaît la notion classique de conjugaison de Fenchel, qui, à une fonction  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , associe la fonction  $\phi^* \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  définie, pour  $y \in Y$ , par :

$$\phi^*(y) = \sup \{ \langle x, y \rangle - \phi(x) \mid x \in X \},$$

ainsi que les propriétés de cette opération de conjugaison ([4], [15], [19]).

Dans le cadre beaucoup plus général, on peut étendre cette notion en l'absence de toute structure additive, la forme bilinéaire de dualité étant alors remplacée par une fonction quelconque de deux variables. Soit donc  $X, Y$  deux ensembles et  $c : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une telle fonction, dite *fonction couplage*. Pour toute fonction  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , on considère la fonction  $\phi^c \in \overline{\mathbb{R}}^Y$ , appelée *c-conjuguée* de  $\phi$ , et définie par :

$$\phi^c(y) = \sup \{ c(x, y) - \phi(x) \mid x \in X \}, \quad \forall y \in Y. \quad (3)$$

On définira bien sûr de manière analogue la *c-conjuguée*  $\psi^c$  d'une fonction  $\psi \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  par :

$$\psi^c(x) = \sup \{ c(x, y) - \psi(y) \mid y \in Y \}, \quad \forall x \in X.$$

La *c-conjugaison* établit donc une double correspondance décroissante entre  $\overline{\mathbb{R}}^X$  et  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ . Pour toute fonction  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  (ou  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ ), on peut alors définir la *c-biconjuguée*  $\xi^{cc} = (\xi^c)^c$  de  $\xi$ , dont on montre ([16]) qu'elle est l'enveloppe supérieure des *fonctions c-élémentaires* minorant  $\xi$ , une fonction *c-élémentaire* sur  $X$  étant une fonction de la forme  $c(\cdot, y_0) - \beta$ , où  $y_0 \in Y$  et  $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ . En particulier, quelle que soit la fonction  $\xi$ , on a donc :

$$\xi^{cc} \leq \xi, \quad (4)$$

propriété dont résulte immédiatement l'égalité :

$$\xi^{ccc} = \xi^c. \quad (5)$$

*Exemple 1.* — Considérons  $X = Y$  un espace vectoriel réel et, sur  $X \times Y$ , le couplage suivant, où  $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$  :

$$c(x, y) = f(x + y), \quad (6)$$

couplage symétrique en  $x$  et  $y$ . La relation (3) de définition de la  $c$ -conjuguée d'une fonction  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  s'écrit ici :

$$\xi^c = f \boxminus \xi, \tag{7}$$

où  $f \boxminus \xi$  désigne la déconvolution de  $f$  par  $\xi$  ([8]), c'est-à-dire la fonction définie par :

$$(f \boxminus \xi)(x) = \sup \{ f(x_1) \dot{-} \xi(x_2) \mid x_1 - x_2 = x \}, \quad \forall x \in X. \tag{8}$$

Ainsi, l'opération  $f \boxminus \cdot$ , de déconvolution d'une fonction  $f$  donnée, peut-elle être regardée comme une conjugaison pour le couplage  $c$  défini en (6). De ce point de vue, on remarque notamment que les relations suivantes, énoncées dans ([13]) :

$$f \boxminus (f \boxminus \xi) \leq \xi, \tag{9}$$

$$f \boxminus (f \boxminus (f \boxminus \xi)) = f \boxminus \xi, \tag{10}$$

ne sont autres que les propriétés (4) et (5) de la  $c$ -conjugaison.  $\square$

Dans le cadre général, si  $\Gamma^c(X, Y)$  désigne l'ensemble des fonctions de  $\overline{\mathbb{R}}^X$  qui sont enveloppes supérieures de fonctions  $c$ -élémentaires (de telles fonctions seront dites  $c$ -régulières), on obtient l'équivalence suivante, où  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  :

$$\phi \in \Gamma^c(X, Y) \Leftrightarrow \phi^{cc} = \phi, \tag{11}$$

et une caractérisation analogue de l'ensemble  $\Gamma^c(X, Y)$  des éléments  $c$ -réguliers de  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ . En fait, la  $c$ -conjugaison échange de manière bijective les fonctions  $c$ -régulières de  $\overline{\mathbb{R}}^X$  et  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ . Plus précisément, la résolution de l'équation :

$$\xi^c = g, \tag{E}$$

où  $g \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  (resp.  $\overline{\mathbb{R}}^X$ ) et où les solutions sont à chercher dans  $\overline{\mathbb{R}}^X$  (resp.  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ ), peut s'énoncer comme suit.

**PROPOSITION 1**

*L'équation (E) a une solution si et seulement si  $g$  est  $c$ -régulière. Dans ce cas :*

- (i)  $\xi$  est solution de (E) si et seulement si  $\xi^{cc} = g^c$  ;
- (ii)  $g^c$  est la plus petite solution (E), la seule qui soit  $c$ -régulière.

*Preuve.* — L'existence d'une solution  $\xi_0$  de (E) donne par  $c$ -biconjugaison  $(\xi_0^c)^{cc} = g^{cc}$ , ce qui implique, compte tenu de (5),  $g^{cc} = g$ . Inversement, si cette dernière condition, équivalente à la  $c$ -régularité de  $g$ , est réalisée, il est clair que  $\xi_0 = g^c$  est solution de (E).

Supposons désormais  $g$   $c$ -régulière. De l'égalité  $\xi^c = g^c$ , on déduit successivement, par  $c$ -conjugaison  $\xi^{cc} = g^c$  (donc en particulier  $g^c \leq \xi$  d'après (4)), puis  $\xi^{ccc} = g^{cc}$ , c'est-à-dire  $\xi^c = g$ . De plus, l'égalité  $\xi^{cc} = g^c$  prouve, lorsque  $\xi$  est supposée  $c$ -régulière, que  $\xi = g^c$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Exemple 2.* — Lorsque  $c$  est une forme bilinéaire de dualité séparante entre deux espaces vectoriels  $X$  et  $Y$ , l'ensemble  $\Gamma^c(X, Y)$  n'est autre que  $\Gamma(X)$ , sous-ensemble de  $\overline{\mathbb{R}}^X$  formé, d'une part, des deux fonctions constantes égales à  $\pm\infty$  et, d'autre part, des fonctions qui sont convexes, propres (i.e., à valeur dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ) et non identiquement égales à  $+\infty$ ), et semi-continues inférieurement (s.c.i.) pour toute topologie localement convexe compatible avec la dualité. Les solutions de l'équation  $\xi^* = g$  sont, lorsque  $g \in \Gamma(Y)$  est propre, les fonctions  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  de régularisée s.c.i. la fonction  $g^*$ ; cette dernière est la plus petite d'entre-elles et la seule qui soit convexe s.c.i.  $\square$

*Exemple 3.* — Reprenons la situation de l'exemple 1. La  $c$ -régularité d'une fonction  $\xi$  s'énonce dans ce cas, d'après ([1]) :

$$f \boxminus (f \boxminus \xi) = \xi. \quad (12)$$

La proposition ci-dessus contient, comme cas particulier, les résultats concernant l'équation :

$$f \boxminus \xi = g \quad (13)$$

obtenus dans [13].

#### COROLLAIRE 2

Soit  $X$  un espace vectoriel et  $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ . L'équation (13) a une solution si et seulement si  $f \boxminus (f \boxminus g) = g$ . Dans ce cas :

- (i)  $\xi$  est solution de (13) si et seulement si  $f \boxminus (f \boxminus g) = f \boxminus g$ ;
- (ii)  $f \boxminus g$  est la plus petite solution de (13), la seule qui satisfasse  $f \boxminus (f \boxminus g) = g$ .

Par analogie, et bien que, contrairement au symbole de déconvolution  $\boxminus$ , il ne s'agisse plus dans le cas général d'une opération interne, nous noterons

la  $c$ -conjuguée  $\xi^c$  d'une fonction  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  (ou  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ ) sous la forme :

$$\xi^c = c \nabla \xi . \quad (14)$$

Les formules (4) et (5) s'écrivent alors, pour toute fonction  $\xi$  :

$$c \nabla (c \nabla \xi) \leq \xi , \quad (4)$$

$$c \nabla (c \nabla (c \nabla \xi)) = c \nabla \xi , \quad (5)$$

généralisant les formules obtenues dans [13] pour la déconvolution. De plus, la résolution de l'équation (E), qui se présente maintenant sous la forme :

$$c \nabla \xi = g , \quad (E')$$

peut également s'énoncer sous une forme en tous points calquée sur celle du corollaire 2.

#### PROPOSITION 1'

Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles quelconques,  $c : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  un couplage entre  $X$  et  $Y$  et  $g \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  (ou  $\overline{\mathbb{R}}^X$ ). L'équation (E') a une solution si et seulement si  $c \nabla (c \nabla g) = g$ . Dans ce cas :

(i)  $\xi$  est solution de (E) si et seulement si  $c \nabla (c \nabla \xi) = c \nabla g$  ;

(ii)  $c \nabla g$  est la plus petite solution (E), la seule qui satisfasse

$$c \nabla (c \nabla \xi) = \xi .$$

## 2. Applications

Les résultats ci-dessus peuvent s'utiliser notamment pour la résolution des problèmes suivants, où  $g \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  :

Trouver  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  satisfaisant

$$\sup\{\xi(x) - c(x, y) \mid x \in X\} = g(y), \quad \forall y \in Y . \quad (E_1)$$

Trouver  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  satisfaisant

$$\inf\{\xi(x) + c(x, y) \mid x \in X\} = g(y), \quad \forall y \in Y . \quad (E_2)$$

L'énoncé de l'équation (E<sub>1</sub>) peut, de manière évidente, se mettre sous la forme :

$$(-\xi)^d = g, \quad (\text{E}_1)$$

où  $d$  est le couplage opposé à  $c$ . Quant à l'équation (E<sub>2</sub>), compte tenu de la relation (2) et de l'égalité :

$$\inf\{a_i, i \in I\} = -\sup\{-a_i, i \in I\},$$

vraie pour toute famille  $(a_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ , elle peut s'écrire sous la forme équivalente (avec, ici encore,  $d = -c$ ) :

$$\xi^d = -g. \quad (\text{E}_2)$$

Avant d'énoncer les résultats, quelques notations et remarques. Nous introduisons, pour  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  et  $y \in Y$ , la notation :

$$(\xi \nabla c)(y) = \sup\{\xi(x) + c(x, y) \mid x \in X\}, \quad (15)$$

$$(\xi \nabla c)(y) = \inf\{\xi(x) + c(x, y) \mid x \in X\}, \quad (16)$$

ainsi que les définitions similaires pour  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^Y$ , en sorte que chacune des deux opérations  $\cdot \nabla c$  et  $\cdot \nabla c$  réalise à son tour une double correspondance entre  $\overline{\mathbb{R}}^X$  et  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ . Avec ces notations et  $d = -c$ , on obtient, pour toute fonction  $\xi$  :

$$(-\xi)^d = d \nabla (-\xi) = \xi \nabla c, \quad (17)$$

$$\xi^d = d \nabla \xi = -(\xi \nabla c), \quad (18)$$

égalité à rapprocher de (2). Par suite, on constate aisément que :

$$(-\xi)^{dd} = -((\xi \nabla c) \nabla c), \quad \xi^{dd} = (\xi \nabla c) \nabla c, \quad (19)$$

dont on peut en particulier déduire, grâce à (4), les inégalités :

$$(\xi \nabla c) \nabla c \geq \xi, \quad (\xi \nabla c) \nabla c \leq \xi. \quad (20)$$

À partir des formules (17) et (18) et des résultats du paragraphe précédent, on constate que les opérations  $\cdot \nabla c$  et  $\cdot \nabla c$  se présentent comme inverses l'une de l'autre au sens où  $\cdot \nabla c$  réalise une bijection de l'ensemble  $-\Gamma^d(X, Y)$  (resp.  $-\Gamma^d(Y, X)$ ) sur l'ensemble  $\Gamma^d(Y, X)$  (resp.  $\Gamma^d(X, Y)$ ),



dont la bijection inverse est l'opération  $\cdot \nabla c$ . Plus précisément, la résolution des équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$ , en d'autres termes des équations :

$$\xi \nabla c = g, \quad (E_1)$$

$$\xi \nabla c = g, \quad (E_2)$$

s'énonce respectivement comme suit.

PROPOSITION 3

Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles quelconques,  $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$  (ou  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ ),  $c : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction couplage et  $d = -c$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) l'équation  $(E_1)$  admet une solution ;
- (2)  $g$  est  $d$ -régulière ;
- (3)  $(g \nabla c) \nabla c = g$ .

De plus, sous l'une de ces conditions :

- (i)  $\xi$  est solution de  $(E_1)$  si et seulement si  $(\xi \nabla c) \nabla c = g \nabla c$  ;
- (ii)  $g \nabla c$  est la plus grande solution de  $(E_1)$ , la seule qui vérifie

$$(\xi \nabla c) \nabla c = \xi$$

(i.e. telle que  $(-\xi)$  soit  $d$ -régulière).

PROPOSITION 4

Sous les mêmes données, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) l'équation  $(E_2)$  admet une solution ;
- (2)  $(-g)$  est  $d$ -régulière ;
- (3)  $(g \nabla c) \nabla c = g$ .

De plus, sous l'une de ces conditions :

- (i)  $\xi$  est solution de  $(E_2)$  si et seulement si  $(\xi \nabla c) \nabla c = g \nabla c$  ;
- (ii)  $g \nabla c$  est la plus petite solution de  $(E_2)$ , la seule qui vérifie

$$(\xi \nabla c) \nabla c = \xi$$

(i.e. telle que  $\xi$  soit  $d$ -régulière).

*Remarque 4.* — Si l'on considère successivement les équations  $\xi \nabla c = g \nabla c$  et  $\xi \nabla c = g \nabla c$ , les propositions ci-dessus conduisent notamment aux relations suivantes, vraies pour toute fonction  $g$  :

$$((g \nabla c) \nabla c) \nabla c = g \nabla c, \quad (g \nabla c) \nabla c = g \nabla c, \quad (21)$$

qui, en fait, sont une autre écriture des égalités  $(-g)^{ddd} = (-g)^d$  et  $g^{ddd} = g^d$  respectivement.  $\square$

*Exemple 5.* — Dans le cas vectoriel, lorsque  $X = Y$  et  $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , considérons le couplage  $c_1$  défini par :

$$c_1(x, y) = f(x - y) \quad (22)$$

couplage non symétrique en  $x$  et  $y$ , d'où la nécessité de bien différencier les rôles de  $X$  et  $Y$  et considérer le couplage  $c_1$  comme une application définie sur  $X \times Y$ , avec  $Y = X$ . On constate que, pour  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ ,  $\xi \nabla c_1 = \xi \boxplus f$ , tandis que, pour  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^Y$ ,  $\xi \nabla c_1 = \xi \boxminus f$ , où  $\xi \boxminus f$  désigne l'inf-convolution des fonctions  $\xi$  et  $f$ , c'est-à-dire :

$$(\xi \boxminus f)(x) = \inf \{ \xi(x_1) \dot{+} f(x_2) \mid x_1 + x_2 = x \}, \quad \forall x \in X. \quad (23)$$

Dans [13], l'étude réalisée sur les équations de convolution  $\xi \boxplus f = g$  et  $\xi \boxminus f = g$  a déjà prouvé que, pour une fonction  $f$  donnée, chacune des opérations  $\cdot \boxminus f$  d'inf-convolution par  $f$  et  $\cdot \boxplus f$  de déconvolution par  $f$  est inverse de l'autre en un sens généralisé. Ces équations apparaissant désormais comme un exemple particulier d'équation du type (E<sub>1</sub>) et (E<sub>2</sub>) respectivement, il n'est nullement surprenant que les différentes propositions et relations énoncées ci-dessus se présentent comme une généralisation des résultats obtenus dans [13]. De plus, on constate désormais que  $\cdot \boxminus f$  et  $\cdot \boxplus f$  sont des opérations inverses l'une de l'autre au sens classique :

$$g \boxminus f = h \quad \Leftrightarrow \quad g = h \boxplus f,$$

si l'on se restreint aux fonctions  $g \in -\Gamma^{d_1}(Y, X)$  et  $h \in \Gamma^{d_1}(X, Y)$ , où  $d_1 = -c_1$ .  $\square$

*Remarque 6.* — Nous terminerons ce paragraphe par la remarque suivante, inspirée des exemples 1 et 4. Soit  $c$  un couplage entre deux ensembles  $X$  et  $Y$ , l'ensemble  $Y$  étant ici supposé muni d'une structure additive. Nous pouvons donc également considérer entre  $X$  et  $Y$  le couplage  $c_1$  défini par :

$$c_1(x, y) = c(x, -y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y. \quad (24)$$

Une vérification élémentaire prouve que la  $c_1$ -conjuguée d'une fonction  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  (resp.  $\overline{\mathbb{R}}^Y$ ) s'écrit alors :

$$\phi^{c_1} = \widehat{(\phi^c)}, \quad (\text{resp. } \psi^{c_1} = \widehat{(\psi)^c}), \quad (25)$$

où, pour  $\psi \in \overline{\mathbb{R}}^Y$ , la fonction  $\widehat{\psi}$  est définie par  $\widehat{\psi}(y) = \psi(-y)$ . Ainsi, pour les  $c_1$ -biconjuguées, on obtient :

$$\phi^{c_1 c_1} = \phi^{cc}, \quad (\text{resp. } \psi^{c_1 c_1} = \widehat{(\widehat{\psi})^{cc}}), \quad (26)$$

Il en résulte en particulier que le passage du couplage  $c$  au couplage  $c_1$  n'affecte pas la régularité des éléments de  $\overline{\mathbb{R}}^X$ , tandis qu'une fonction  $\psi \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  est  $c_1$ -régulière si et seulement si  $\widehat{\psi}$  est  $c$ -régulière.  $\square$

La résolution d'équation du type (E), (E<sub>1</sub>) et (E<sub>2</sub>) ou, problème équivalent, la caractérisation des fonctions régulières associées à un couplage donné est généralement malaisée. Les paragraphes suivants donnent quelques exemples de situations où cette résolution est possible.

### 3. Détermination des fonctions critères

Étant donné deux ensembles  $X$  et  $Y$ , une multiapplication  $\Gamma$  définie sur  $X$  à valeurs dans  $Y$  (définissant, pour chaque  $x \in X$ , l'ensemble  $\Gamma(x)$  des contraintes), et une fonction  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^Y$  (dite *fonction critère*), on considère la famille de problèmes d'optimisation suivante, paramétrée par  $x \in X$  :

$$g(x) = \inf \{ \xi(y) \mid y \in \Gamma(x) \}.$$

Pour un  $x$  donné,  $g(x)$  est le montant du problème et la fonction  $g$  est appelée *fonction de perturbation* ou *fonction valeur*.

Examinons le problème inverse qui consiste à déduire la fonction critère  $\xi$  de la donnée de  $g$  et du graphe  $\Gamma \subset X \times Y$  des contraintes. Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$\inf \{ \xi(y) \mid y \in \Gamma(x) \} = g(x), \quad \forall x \in X. \quad (27)$$

Si  $\psi_\Gamma$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $\Gamma$ , i.e. :

$$\psi_\Gamma(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'équation (27) peut encore s'écrire :

$$\inf\{\xi(y) + \psi_{\Gamma}(x, y)\} = g(x), \quad \forall x \in X$$

et se présente par conséquent comme une équation du type (E<sub>2</sub>), avec, ici,  $c = \psi_{\Gamma}$  : sa résolution obéit donc aux résultats de la proposition 4. Notons tout d'abord que, pour  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  et  $y \in Y$  :

$$(\phi \nabla c)(y) = \inf\{\phi(x) \mid x \in \Gamma^{-1}(y)\}, \quad (28)$$

$$(\phi \nabla c)(y) = \sup\{\phi(x) \mid x \in \Gamma^{-1}(y)\}, \quad (29)$$

$\Gamma^{-1}$  désignant la multiapplication réciproque de  $\Gamma$ . Les formules analogues pour les fonctions de  $\overline{\mathbb{R}}^X$  s'obtenant en échangeant les rôles de  $\Gamma$  et  $\Gamma^{-1}$ , les relations (20) sont les inégalités évidentes suivantes :

$$\sup_{y \in \Gamma(x_0)} \inf_{x \in \Gamma^{-1}(y)} \phi(x) \leq \phi(x_0) \leq \inf_{y \in \Gamma(x_0)} \sup_{x \in \Gamma^{-1}(y)} \phi(x) \quad (30)$$

pour tout  $x_0 \in X$ .

La conjugaison relative au couplage  $c = \psi_{\Gamma}$  a été étudiée dans [9] et relève de la conjugaison par tranches [22]. Pour être complets, nous donnons cependant les preuves des résultats suivants.

PROPOSITION 5

Soit  $\Gamma \subset X \times Y$  le graphe d'une multiapplication et  $c = \psi_{\Gamma}$ . Pour toute fonction  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $(\phi \nabla c) \nabla c = \phi$ ;

(ii) pour tout élément  $x_0 \in X$ , on a :

$$\inf_{y \in \Gamma(x_0)} \sup_{x \in \Gamma^{-1}(y)} \phi(x) = \phi(x_0); \quad (31)$$

(iii) pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la tranche inférieure stricte  $\phi^{<}(\lambda)$  est réunion d'ensembles de la forme  $\Gamma^{-1}(y)$ , où  $y \in Y$ .

*Preuve.* — D'après (28) et (29), l'équivalence de (i) et (ii) est claire. Supposons l'assertion (ii) vérifiée et considérons un élément  $x_0 \in \phi^{<}(\lambda)$ . L'inégalité stricte  $\phi(x_0) < \lambda$  signifie l'existence d'un élément  $y_0 \in \Gamma(x_0)$  tel que :

$$\sup\{\phi(x) \mid x \in \Gamma^{-1}(y_0)\} < \lambda$$

et implique par conséquent la double inclusion :

$$\{x_0\} \subset \Gamma^{-1}(y_0) \subset \phi^{<}(\lambda).$$

L'assertion (iii) en résulte clairement.

Supposons inversement la condition (iii) réalisée. L'égalité (31) étant trivialement vérifiée dès que  $\phi(x_0) = +\infty$ , considérons un élément  $x_0$  de  $X$  tel que  $\phi(x_0) \neq +\infty$  et un nombre réel  $\lambda > \phi(x_0)$ . L'hypothèse (iii) prouve l'existence d'une famille  $(y_i)_{i \in I}$  d'éléments de l'ensemble  $Y$  satisfaisant :

$$\phi^{<}(\lambda) = \bigcup_{i \in I} \Gamma^{-1}(y_i),$$

et, par conséquent, l'existence d'un indice  $i \in I$  tel que :

$$\{x_0\} \subset \Gamma^{-1}(y_i) \subset \phi^{<}(\lambda).$$

Il en résulte successivement les inégalités

$$\sup\{\phi(x) \mid x \in \Gamma^{-1}(y_i)\} \leq \lambda,$$

puis

$$\inf_{y \in \Gamma(x_0)} \sup_{x \in \Gamma^{-1}(y)} \phi(x) \leq \lambda.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout réel  $\lambda > \phi(x_0)$ , l'égalité (31) s'en déduit alors en tenant compte de la relation (30).  $\square$

D'après les propositions 3 et 4, le changement de  $\phi$  en  $-\phi$  donne :

#### COROLLAIRE 6

*Sous les mêmes données, pour  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $(\phi \nabla c) \nabla c = \phi$  ;
- (ii) pour tout élément  $x_0 \in X$ , on a :

$$\sup_{y \in \Gamma(x_0)} \inf_{x \in \Gamma^{-1}(y)} \phi(x) = \phi(x_0) ; \tag{32}$$

- (iii) pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la tranche supérieure stricte  $\phi^{>}(\lambda)$  est réunion d'ensembles de la forme  $\Gamma^{-1}(y)$ , où  $y \in Y$ .

Les conditions ci-dessus caractérisent, pour  $d = -\psi_\Gamma$ , les fonctions  $d$ -régulières de  $\overline{\mathbb{R}}^X$ ; l'échange des rôles de  $\Gamma$  et  $\Gamma^{-1}$  conduit au fait que les fonctions  $d$ -régulières de  $\overline{\mathbb{R}}^Y$  sont les fonctions dont les tranches supérieures strictes sont réunions d'ensembles de la forme  $\Gamma(x)$ , où  $x \in X$ . Finalement, les résultats de la proposition 4 s'appliquent à la résolution de l'équation (27) sous la forme :

**CORROLAIRE 7**

L'équation (27) admet une solution si et seulement si les tranches inférieures strictes de  $g$  sont réunions d'ensembles de la forme  $\Gamma^{-1}(y)$ , où  $y \in Y$ . De plus, dans ce cas, la fonction  $g \nabla c$  définie par  $Y$  par :

$$(g \nabla c)(y) = \sup\{g(x) \mid x \in \Gamma^{-1}(y)\}$$

est la plus petite solution de (27), la seule dont les tranches supérieures strictes soient réunions d'ensembles de la forme  $\Gamma(x)$ , où  $x \in X$ .

Nous sommes également en mesure d'énoncer parallèlement les résultats concernant l'équation :

$$\sup\{\xi(y) \mid y \in \Gamma(x)\} = g(x), \quad \forall x \in X. \quad (33)$$

**COROLLAIRE 8**

L'équation (33) admet une solution si et seulement si les tranches supérieures strictes de  $g$  sont réunions d'ensembles de la forme  $\Gamma^{-1}(y)$ , où  $y \in Y$ . De plus, dans ce cas, la fonction  $g \nabla c$  définie sur  $Y$  par :

$$(g \nabla c)(y) = \inf\{g(x) \mid x \in \Gamma^{-1}(y)\}$$

est la plus grande solution de (33), la seule dont les tranches inférieures strictes soient réunions d'ensembles de la forme  $\Gamma(x)$ , où  $x \in X$ .

*Exemple 7.* — Illustrons l'ensemble de ces résultats d'un cas particulier simple, généralisant le cas considéré dans ([16], pp. 137-138) : celui où  $\Gamma$  définit une relation de préordre (i.e., réflexive et transitive) sur un ensemble  $X$ . La relation  $\Gamma$  n'étant pas symétrique, il sera nécessaire de considérer  $\Gamma$  comme sous-ensemble de  $X \times Y$ , avec  $Y = X$ . Nous noterons ici " $x \leq y$ " au lieu de " $(x, y) \in \Gamma$ ", en sorte que les formules (28) et (29) deviennent, pour toute fonction  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  :

$$(\phi \nabla c)(y) = \inf\{\phi(x) \mid x \leq y\}, \quad (34)$$

$$(\phi \nabla c)(y) = \sup\{\phi(x) \mid x \leq y\}. \quad (35)$$

Quant aux équations (27) et (33), elles s'énoncent, dans ce cas particulier :

$$\inf\{\xi(y) \mid x \leq y\} = g(x), \quad \forall x \in X, \quad (36)$$

$$\sup\{\xi(y) \mid x \leq y\} = g(x), \quad \forall x \in X. \quad (37)$$

Une condition nécessaire immédiate d'existence d'une solution de (37) est la décroissance de la fonction  $g$ ; dans cette éventualité, la formule (34) prouve que la fonction  $g \nabla c$  coïncide avec la fonction  $g$ , elle-même solution évidente de (37). En d'autres termes, les fonctions  $d$ -régulières (avec  $d = -c$ ) de  $\overline{\mathbb{R}}^X$  sont les fonctions décroissantes, ce qui nous permet finalement, pour cet exemple, de traduire chacune des propositions 3 et 4 comme suit : *l'équation (36) admet une solution si et seulement si  $g$  est croissante, auquel cas  $g \nabla c = g$  est la plus petite solution de (36), la seule qui soit croissante (i.e., décroissante pour le préordre défini par  $\Gamma^{-1}$ ). De même, l'équation (37) admet une solution si et seulement si  $g$  est décroissante, auquel cas  $g \nabla c = g$  est la plus grande solution de (37), la seule qui soit décroissante (i.e., croissante pour  $\Gamma^{-1}$ ). □*

*Exemple 8.* — Les différentes notions de composition des multiapplications fournissent également une illustration intéressante des équations (27) et (33). En effet,  $X, Y, Z$  étant trois ensembles quelconques, soit  $A$  et  $B$  deux multiapplications données, définies sur  $X$ , à valeurs respectivement dans  $Y$  et  $Z$ , que nous identifierons à leur graphe  $A \subset X \times Y$  et  $B \subset X \times Z$ . Cherchons alors à déterminer les multiapplications  $\Phi \subset Y \times Z$  qui sont, soit telles que :

$$\Phi \circ A = B, \quad (38)$$

soit telles que

$$\Phi \bullet A = B. \quad (39)$$

Les symboles  $\circ$  et  $\bullet$  désignent respectivement la composition existentielle et la composition universelle des multiapplications, à savoir ([5]) :

$$(x, z) \in \Phi \circ A \Leftrightarrow A(x) \cap \Phi^{-1}(z) \neq \emptyset, \quad (40)$$

$$(x, z) \in \Phi \bullet A \Leftrightarrow A(x) \subset \Phi^{-1}(z). \quad (41)$$

Bien que pouvant également être obtenus directement sans difficulté, les résultats concernant les équations (38) et (39) seront ici écrits comme conséquence des corollaires 7 et 8.

En termes de fonctions indicatrices des graphes, l'égalité (38) se présente sous forme équivalente :

$$\inf \{ \Psi_{\Phi}(y, z) + \Psi_A(x, y) \mid y \in Y \} = \Psi_B(x, z), \quad \forall (x, z) \in X \times Z. \quad (42)$$

Les ensembles  $X$  et  $Y$  sont couplés par la fonction  $c = \Psi_A$ , il s'agit donc, dans un premier temps, de résoudre la famille suivante d'équations du type (27), paramétrée par  $z \in Z$  :

$$\xi_z \nabla c = g_z, \quad (43)$$

où  $g_z$  est définie, pour  $x \in X$ , par  $g_z(x) = \Psi_B(x, z)$ . Pour un  $x$  donné dans  $X$ , suivant la valeur du réel  $\lambda$ , on constate que  $g_z^<(\lambda) = \emptyset$  ou bien  $g_z^<(\lambda) = B^{-1}(z)$ . De sorte que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution de (43) s'énonce (cor. 7) :

$$B^{-1}(z) = \bigcup_{i \in I_z} A^{-1}(y_i). \quad (44)$$

Sous l'hypothèse (44), la fonction  $(g_z \nabla c)$ , plus petite solution de (43), prend, suivant le point  $y \in Y$  considéré, les valeurs :

$$\begin{cases} -\infty & \text{si } A^{-1}(y) = \emptyset, \\ 0 & \text{si } A^{-1}(y) \subset B^{-1}(z), \\ +\infty & \text{si } A^{-1}(y) \not\subset B^{-1}(z). \end{cases}$$

Il est clair que la fonction  $\xi_z$  définie sur  $Y$  par :

$$\xi_z(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } A^{-1}(y) \subset B^{-1}(z), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est encore solution de (43).

Finalement, lorsque la condition (44) est réalisée en tout point  $z \in Z$ , la fonction  $\xi$  définie sur  $Y \times Z$  par :

$$\xi(y, z) = \xi_z(y),$$

est la plus petite fonction indicatrice d'une partie de  $Y \times Z$  satisfaisant (42). C'est l'indicatrice de la multiapplication composée universelle  $B \bullet A^{-1}$ .

#### COROLLAIRE 9

*L'équation (38) admet une solution si et seulement si la formule (44) est vérifiée pour tout  $z \in Z$ . Dans ce cas,  $B \bullet A^{-1}$  est la plus grande (au sens de l'inclusion des graphes) multiapplication solution de (38).*



D'une manière tout à fait analogue à ce qui précède, on peut exploiter le corollaire 8 pour la résolution de l'équation (39), puisque celle-ci se traduit, lorsque  $A$  est à valeurs non vides, par :

$$\sup\{\Psi_{\Phi}(y, z) - \Psi_A(x, y) \mid y \in Y\} = \Psi_B(x, z), \quad \forall (x, z) \in X \times Z. \quad (45)$$

On constate alors notamment que la composée existentielle  $B \circ A^{-1}$  est la plus petite solution éventuelle de (39).

#### 4. Le cas des fonctions hölderiennes

Les données sont ici les suivantes :  $(X, d)$  est un espace métrique,  $r$  un réel strictement positif,  $\alpha \in ]0, 1]$ . Nous nous intéresserons aux équations  $\xi \nabla c = g$  et  $\xi \nabla c = g$ , où  $c$  est le couplage symétrique défini, pour  $(x, y) \in X \times X$ , par

$$c(x, y) = rd^\alpha(x, y). \quad (46)$$

Il s'agit donc explicitement des équations :

$$\inf\{\xi(y) + rd^\alpha(x, y) \mid y \in X\} = g(x), \quad \forall x \in X, \quad (47)$$

$$\sup\{\xi(x) + rd^\alpha(x, y) \mid y \in X\} = g(x), \quad \forall x \in X. \quad (48)$$

Par ailleurs, une fonction  $g \in \mathbb{R}^X$  est dite  $(\alpha, r)$ -hölderienne si elle satisfait la propriété :

$$g(x) - g(y) \leq rd^\alpha(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (49)$$

Le résultat suivant généralise ([10], prop. 2.2. ; voir aussi [7] et [18]).

##### PROPOSITION 10

Pour toute fonction  $g \in \mathbb{R}^X$ , les conditions suivantes sont équivalentes, où  $d = -c$  :

- (i)  $g$  est  $d$ -régulière ;
- (ii)  $g \nabla c = g$  ;
- (iii)  $g \nabla c = g$  ;
- (iv)  $g$  est  $(\alpha, r)$ -hölderienne.

*Preuve.* — Il est clair que l'hypothèse (iv) est équivalente à l'une ou l'autre des inégalités  $g \leq g \nabla c$  et  $g \geq g \nabla c$ .

Par ailleurs, on constate aisément que les relations :

$$\xi \geq \xi \nabla c, \quad \xi \leq \xi \nabla c, \quad (50)$$

sont automatiquement réalisées par toute fonction  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , où  $X$  est un ensemble quelconque, dès que la fonction couplage  $c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  s'annule sur la diagonale de  $X \times X$ , ce qui est le cas du couplage  $c$  défini en (46). L'équivalence entre les conditions (ii), (iii) et (iv) en résulte.

D'autre part, lorsque la condition (ii) est réalisée (donc aussi (iii)), la fonction  $g$  vérifie :

$$(g \nabla c) \nabla c = g \nabla c = g,$$

et cette égalité caractérise la  $d$ -régularité de  $g$  (voir prop. 3).

Supposons maintenant la  $d$ -régularité de  $g$ . La fonction  $g$  étant alors enveloppe supérieure de fonctions  $d$ -élémentaires à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , il suffit en fait de montrer que toute fonction  $\varepsilon$  de ce type, c'est-à-dire de la forme :

$$\varepsilon = -rd^\alpha(\cdot, a) - \beta,$$

où  $a \in X$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , est  $(\alpha, r)$ -höldérienne. Or, quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $X$ , à partir de l'inégalité triangulaire :

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$

et sachant que  $\alpha \in ]0, 1]$ , on obtient :

$$d^\alpha(x, a) \leq d^\alpha(x, y) + d^\alpha(y, a),$$

d'où l'inégalité cherchée :

$$\varepsilon(y) - \varepsilon(x) \leq rd^\alpha(x, y).$$

L'opposée d'une fonction  $(\alpha, r)$ -höldérienne étant elle-même  $(\alpha, r)$ -höldérienne, il en est donc ainsi de toute fonction  $d$ -élémentaire.  $\square$

Grâce aux résultats ci-dessus, on obtient à partir des propositions 3 et 4 :

**PROPOSITION 11**

*Pour toute fonction  $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ , les conditions suivantes sont équivalentes,*

*(i) l'équation (47) admet une solution;*

(ii) l'équation (48) admet une solution ;

(iii)  $g$  est  $(\alpha, r)$ -hölderienne.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée,  $g$  est la plus petite solution de (47) (resp. la plus grande solution de (48)), la seule qui soit  $(\alpha, r)$ -hölderienne.

### 5. Le cas des formes quadratiques

Dans ce paragraphe,  $X$  désignera un espace hilbertien. Pour tout opérateur linéaire symétrique  $A$  de  $X$ , nous noterons  $q_A$  la forme quadratique continue associée, i.e., la fonction définie par :

$$q_A(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle, \quad \forall x \in X.$$

L'étude des équations

$$q_A \boxminus \xi = g, \quad \xi \boxminus q_A = g, \quad \xi \square q_A = g, \quad (51)$$

ayant déjà été détaillée dans [13], nous nous contenterons, dans le cas général, de décrire la classe des fonctions  $c$ -régulières, pour le couplage du type :

$$c(x, y) = q_A(x + y), \quad (52)$$

la connaissance de cette classe conduisant à la résolution des équations (51) par application des propositions 1, 3, 4.

#### PROPOSITION 12

Soit  $A$  un opérateur linéaire symétrique de  $X$ ,  $c$  le couplage défini en (52) et  $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i)  $g$  est  $c$ -régulière ;

(ii) il existe une fonction  $k \in \Gamma(X)$  telle que  $g - q_A = k \circ A$  ;

(iii)  $g - q_A = ((g - q_A)^* + \Psi_{\text{Im } A})^*$ .

*Preuve.* — La  $c$ -régularité de  $g$  signifiant l'existence d'une fonction  $\xi$  telle que  $q_A \boxminus \xi = g$ , l'équivalence entre (i) et (ii) découle de la suivante, vraie quels que soient les éléments  $\phi$  et  $\xi$  de  $\overline{\mathbb{R}}^X$  :

$$\phi = q_A \boxminus \xi \quad \Leftrightarrow \quad \phi - q_A = (\xi - q_A)^* \circ A. \quad (53)$$

D'autre part, par double utilisation de la relation (53) dans l'égalité  $q_A \boxminus (q_A \boxminus g) = g$  (également caractéristique de (i)), on constate l'équivalence de (i) et (iii) (voir [13], prop. II-4).  $\square$

*Exemple 9.* — Plaçons-nous dans le cas où l'opérateur  $A$  est *inversible*. La proposition ci-dessus montre alors que  $g$  est  $c$ -régulière si et seulement si  $(g - q_A) \in \Gamma(X)$ . Cette condition signifie, lorsque la fonction  $g$  ne prend pas la valeur  $(-\infty)$ , que celle-ci est s.c.i. et  $A$ -convexe, au sens suivant :

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - t(1-t)q_A(x-y),$$

quels que soient les points  $x$  et  $y$  de  $X$  et  $t \in ]0, 1[$ .

Cette notion générale de  $A$ -convexité contient notamment la notion de fonction  $r$ -fortement convexe ( $r > 0$ ), qui correspond au cas particulier  $A = r \text{Id}_X$  ([21]), tandis que les fonctions  $r$ -paraconvexes ( $r > 0$ ) sont obtenues en prenant  $A = -r \text{Id}_X$  ([20]).

Enfin, nous dirons qu'une fonction  $\phi \in \overline{\mathbb{R}}^X$  est  $A$ -concave si  $(-\phi)$  est  $A$ -convexe. On obtient alors la proposition suivante qui généralise ([18], th. 5).

PROPOSITION 13

Soit  $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$  et  $A$  un opérateur linéaire symétrique inversible de  $X$ .

- (1) Lorsque la fonction  $g$  est propre, l'équation  $q_A \boxminus \xi = g$  admet une solution si et seulement si  $g$  est  $A$ -convexe s.c.i., auquel cas  $(q_A \boxminus g)$  en est la plus petite solution, la seule qui soit  $A$ -convexe s.c.i.
- (2) Lorsque la fonction  $g$  est propre, l'équation  $\xi \boxminus q_A = g$  admet une solution si et seulement si  $g$  est  $(-A)$ -convexe s.c.i., auquel cas  $(g \boxminus q_A)$  en est la plus grande solution, la seule qui soit  $(-A)$ -concave s.c.s.
- (3) Lorsque la fonction  $(-g)$  est propre, l'équation  $\xi \boxplus q_A = g$  admet une solution si et seulement si  $g$  est  $(-A)$ -concave s.c.s., auquel cas  $(g \boxplus q_A)$  en est la plus petite solution, la seule qui soit  $(-A)$ -convexe s.c.i.

*Preuve.* — La propriété de  $g$  impliquant clairement que la fonction  $q_A \boxminus g$  (et donc, a fortiori, toute autre solution éventuelle de l'équation  $q_A \boxminus \xi = g$ ) ne peut prendre la valeur  $-\infty$ , le premier point traduit les propositions 1 et 12 en tenant compte de l'inversibilité de l'opérateur  $A$ .

Les deux dernières équations correspondent (voir ex. 5) au couplage  $c_1$ , symétrique en  $x$  et  $y$ , défini par :

$$c_1(x, y) = q_A(x - y),$$

et leur résolution fait par conséquent intervenir la  $d_1$ -régularité, où  $d_1 = -c_1$  (voir prop. 3 et 4). Or, la symétrie de  $c_1$  implique, grâce à la remarque 6, que les fonctions  $d_1$ -régulières sont exactement les fonctions  $d$ -régulières, le couplage  $d$  étant donné par

$$d(x, y) = q_{(-A)}(x + y).$$

D'où le résultat annoncé à partir de la proposition 12.  $\square$

Dans [13], lemme II-5, a été montrée, pour tout opérateur symétrique  $B$  de  $X$ , l'équivalence des deux assertions suivantes, où  $\Omega$  est une partie quelconque de  $X$  :

- (i)  $q_B = (q_B^* + \Psi_\Omega)^*$  ;
- (ii)  $B \geq 0$  et l'ensemble  $\{x \in X \mid B^{1/2}x \in \Omega\}$  est dense dans  $X$ .

À partir de la condition (iii) de la proposition 12, ce résultat permet notamment de caractériser la  $c$ -régularité d'une forme quadratique continue sur  $X$ . Lorsqu'un opérateur symétrique  $S$  de  $X$  est semi-défini positif ( $\geq 0$ ), nous noterons  $S^{1/2}$  l'unique opérateur symétrique et  $\geq 0$  satisfaisant  $S^{1/2} \circ S^{1/2} = S$ . On obtient ainsi :

**PROPOSITION 14**

*Pour tout opérateur symétrique  $B$  de  $X$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $q_B$  est  $c$ -régulière, où  $c$  est le couplage défini en (52) ;
- (ii)  $B - A \geq 0$  et l'ensemble  $\{x \in X \mid (B - A)^{1/2}x \in \text{Im } A\}$  est dense dans  $X$ .

Il est possible d'utiliser cette caractérisation pour la résolution des équations (51) dans le cas particulier important où le second membre en est une forme quadratique continue ([13]). Ces résultats ont, sur les opérateurs, une traduction en termes d'addition et de soustraction parallèles ([1], [13], [14], [17]). Rappelons que la *somme parallèle de deux opérateurs symétriques*  $A$  et  $B$  de  $X$  (resp. la *différence parallèle de  $B$  par  $A$* ) désigne l'opérateur symétrique  $A // B$  (resp.  $B \# A$ ) associé à  $q_A \square q_B$  (resp.  $q_B \boxminus q_A$ ), lorsque cette fonction est une forme quadratique sur  $X$ , i.e., lorsque  $A$  et  $B$  vérifient  $A+B \geq 0$  et  $\text{Im } A \subset \text{Im}(A+B)^{1/2}$  (resp.  $A-B \geq 0$  et  $\text{Im } A \subset \text{Im}(A-B)^{1/2}$ ) ([13]). L'étude, dans l'ensemble des opérateurs symétriques de l'espace  $X$ , des équations :

$$A \# Z = B, \quad Z \# A = B, \quad Z // A = B, \tag{54}$$

se déduit alors, à travers la proposition 14, de celle des équations (51). Nous renvoyons à [13] pour l'ensemble des résultats sur ces équations et énoncerons en complément les suivants.

PROPOSITION 15

Soit  $A$ ,  $B$  et  $Z_0$  trois opérateurs symétriques de  $X$ .

(1) Si  $A \# Z_0 = B$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $Z_0 = A \# B$  ;

(ii)  $Z_0 - A \geq 0$  et l'ensemble  $\{x \in X \mid (Z_0 - A)^{1/2}x \in \text{Im } A\}$  est dense dans  $X$ .

(2) Si  $Z_0 \# A = B$ , on obtient de même l'équivalence des conditions :

(i)  $Z_0 = A \# B$  ;

(ii)  $A - Z_0 \geq 0$  et l'ensemble  $\{x \in X \mid (A - Z_0)^{1/2}x \in \text{Im } A\}$  est dense dans  $X$ .

(3) Enfin, si  $Z_0 \# A = B$ , l'équivalence de :

(i)  $Z_0 = B \# A$  ;

(ii)  $A + Z_0 \geq 0$  et l'ensemble  $\{x \in X \mid (A + Z_0)^{1/2}x \in \text{Im } A\}$  est dense dans  $X$ .

*Preuve.* — (1) Considérons ici le couplage  $c$  défini en (52). Sous l'hypothèse  $A \# Z_0 = B$ , l'égalité  $Z_0 = A \# B$ , équivalente à  $q_{Z_0} = q_A \boxplus q_B$ , est donc réalisée si et seulement si  $q_{Z_0}$  est  $c$ -régulière, propriété qui se traduit, d'après la proposition 14, par la condition (ii).

(2) De même, sous l'hypothèse  $Z_0 \# A = B$ , la condition (i), autrement dit l'égalité  $q_{Z_0} = q_A \boxminus q_B$ , signifie (prop. 3) la  $d_1$ -régularité de  $(-q_{Z_0})$ , où  $d_1(x, y) = -c(x, -y)$ , ou encore, si  $d = -c$ , sa  $d$ -régularité, d'où l'équivalence des conditions (i) et (ii) à partir de la proposition 14.

L'équivalence (3) est, de même, conséquence des propositions 4 et 14.  $\square$

## 6. Lien avec l'analyse épigraphique

L'objet géométrique qui représente le mieux la notion d'inf-convolution est l'épigraphe : étant donné un ensemble  $X$ , on appelle épigraphe d'une fonction  $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$  l'ensemble :

$$\text{épi } f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\},$$

et épigraphe strict de  $f$  l'ensemble  $\text{épi}_s f$  obtenu en prenant l'inégalité stricte dans la définition ci-dessus. Lorsque  $X$  est un espace vectoriel, on sait ([15]) que l'épigraphe strict de l'inf-convolution de deux fonctions quelconques  $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$  est la somme vectorielle de leurs épigraphes stricts :

$$\text{épi}_s(f \square g) = \text{épi}_s f + \text{épi}_s g, \quad (55)$$

ce qui justifie la terminologie de *somme épigraphique* de  $f$  et  $g$  parfois utilisée pour désigner l'inf-convolution  $f \square g$  ([3]). En ce qui concerne la déconvolution, sans aucune hypothèse sur les fonctions  $f$  et  $g$ , on a l'égalité ([23], prop. 6; voir aussi [6]) :

$$\text{épi}(f \boxplus g) = \text{épi} f \star \text{épi} g, \quad (56)$$

où l'opérateur  $\star$  désigne la différence étoilée d'ensembles, i.e. :

$$A \star B = \{x \in X \mid x + B \subset A\}.$$

La formule (56) permet d'interpréter, de façon naturelle, la déconvolution comme une notion de *différence épigraphique* de fonctions ([2]).

Ainsi, les équations fonctionnelles  $f \square \xi = g, \xi \boxplus f = g, f \boxplus \xi = g$ , étudiées dans [13], se traduisent-elles, en vertu de (55) et (56), par des équations ensemblistes faisant intervenir la somme vectorielle et la différence étoilée. En fait, ces deux points de vue (fonctionnel et ensembliste) sont équivalents puisque inversement, les équations ensemblistes :

$$A + Z = B, \quad Z \star A = B, \quad A \star Z = B,$$

s'écrivent respectivement, à l'aide des fonctions indicatrices (et pour des ensembles non vides) :

$$\Psi_A \square \Psi_Z = \Psi_B, \quad \Psi_Z \boxplus \Psi_A = \Psi_B, \quad \Psi_A \boxplus \Psi_Z = \Psi_B.$$

Ces différentes remarques admettent une extension au cadre plus large de la présente étude sous la forme suivante. Étant donné un couplage  $c$  entre deux ensembles quelconques  $X$  et  $Y$ , on constate sans difficulté que, pour toute fonction  $f \in \overline{\mathbb{R}}^Y$ , l'épigraphe strict de  $f \nabla c$  s'obtient à partir d'une composition existentielle de multiapplications sous la forme :

$$\text{épi}_s(f \nabla c) = \text{épi}_s \underline{f} \circ \text{épi}_s c, \quad (57)$$

où la fonction  $\underline{f}$  est définie sur  $Y \times \mathbb{R}$  par  $\underline{f}(y, a) = f(y) + a$ . De même, la formule (56) s'étend au moyen d'une composition universelle sous les deux formes :

$$\text{épi}(f \nabla c) = \text{épi } \underline{f} \bullet \text{épi } c, \quad \text{épi}(c \nabla f) = \text{épi } \underline{f} \bullet \text{épi}(-c), \quad (58)$$

la fonction  $\underline{f}$  étant ici respectivement donnée par  $\underline{f}(y, a) = f(y) - a$  et  $\underline{f}(y, a) = -f(y) - a$ . Il résulte de (57) et (58) que, par passage aux épigraphes, les équations (E), (E<sub>1</sub>) et (E<sub>2</sub>) se ramènent toujours à des équations mettant en jeu les lois de composition des multiapplications. Cette constatation, ainsi que l'étude réalisée au cours de l'exemple 8, permettent de conclure que l'équivalence des points de vue ensembliste et fonctionnel subsiste encore dans le cadre le plus général.

## 7. Bibliographie

- [1] ANDERSON JR (W.N.), MORLEY (T.D.) and TRAPP (G.E.) .— *Characterization of parallel subtraction*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, **76** (1979), pp. 3599-3601.
- [2] ATTOUCH (H.), AZÉ (D.) and BEER (G.) .— *On some inverse stability problems for the epigraphical sum*, à paraître.
- [3] ATTOUCH (H.) and WETS (R.J.B.) .— *Epigraphical analysis*, Analyse non linéaire, eds. H. Attouch, J.P. Aubin, F. Clarke, I. Ekeland, 73-100, Gauthier-Villars publisher, Paris (1989).
- [4] FENCHEL (W.) .— *On conjugate convex functions*, Canad. J. Math., **1** (1949), pp. 73-77.
- [5] FOGÈRES (A.) .— *Cours de D.E.A.*, Université de Perpignan (1990).
- [6] GINER (E.) .— *Ensembles et fonctions étoilés*, Manuscrit (1981).
- [7] HIRIART-URRUTY (J.B.) .— *Extension of Lipschitz functions*, J. Math. Anal. Appl., **77** (1980), pp. 539-554.
- [8] HIRIART-URRUTY (J.B.) et MAZURE (M.L.) .— *Formulations variationnelles de l'addition parallèle et de la soustraction parallèle d'opérateurs semi-définis positifs*, C.R.A.S. Paris, t. 302, série 1, n° 15 (1986), pp. 527-530.
- [9] MARTINEZ-LEGAZ (J.E.) .— *Conjugacion asociada a un grafo*, Actas IX Jornadas Matematicas Hispano-Lusas, Universidad de Salamanca, Vol. II (1982), pp. 837-839.
- [10] MARTINEZ-LEGAZ (J.E.) .— *On lower subdifferentiable functions*, Trends in Mathematical Optimization, Proceedings, Internat. Conf. Irsee (1986), Birkhäuser Verlag, Basel (1988), pp. 259-275.



- [11] MAZURE (M.L.) . — *L'addition parallèle d'opérateurs interprétée comme inf-convolution de formes quadratiques convexes*,  
Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 20, n° 3 (1986), pp. 497-515.
- [12] MAZURE (M.L.) . — *La soustraction parallèle d'opérateurs interprétée comme déconvolution de formes quadratiques convexes*,  
Optimization, 18, n° 4 (1987), pp. 465-484.
- [13] MAZURE (M.L.) . — *Équations de convolution et formes quadratiques*,  
Ann. di Mat. pura. Appl. (à paraître).
- [14] MAZURE (M.L.) . — *Analyse variationnelle des formes quadratiques convexes*,  
Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse (1986).
- [15] MOREAU (J.J.) . — *Fonctionnelles convexes*,  
Collège de France, (1966-67).
- [16] MOREAU (J.J.) . — *Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques*,  
J. Math. Pure et Appl., 49 (1970), pp. 109-154.
- [17] PEKAREF (E.L.) and SMUL'JAN (L.) . — *Parallel addition and parallel subtraction of operators*,  
Math. URSS Izvestija, 10 (1976), pp. 351-370.
- [18] PENOT (J.P.) and VOLLE (M.) . — *On strongly convex and paraconvex dualities*,  
Inter. Workshop on Generalized Concavity, Fractional Programming and Economic Applications, Pisa, (May-Juin 1988).
- [19] ROCKAFELLAR (R.T.) . — *Convex Analysis*,  
Princeton University Press (1970).
- [20] ROLEWICZ (S.) . — *On paraconvex multifunctions*  
Proceedings III Symposium über Operations Research, Mannheim (Sept. 1978),  
pp. 539-546.
- [21] VIAL (J.P.) . — *Strong and weak convexity of sets and functions*,  
Math. of Oper. Research, 8, n° 2 (1983), pp. 231-259.
- [22] VOLLE (M.) . — *Conjugaison par tranches*,  
Ann. di Mat. pura Appl., IV, 139 (1985), pp. 279-312.
- [23] VOLLE (M.) . — *Concave duality: application to problems dealing with difference of functions*,  
Math. Progr. 41 (1988), pp. 261-278.
- [24] VOLLE (M.) . — *Équations inf-convolutives*,  
Université Paul Sabatier, Toulouse (janvier 1988).