ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABBAS BAHRI
PAUL-H. RABINOWITZ

Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens du type de celui des trois corps

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 2 (1990), p. 9-21
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_9_0>

© Université Paul Sabatier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Orbites périodiques des systèmes hamiltoniens du type de celui des trois corps

ABBAS BAHRI[1] et PAUL-H. RABINOWITZ[2]

1. Introduction

Considérons le mouvement de n corps, $q_1, \ldots, q_n$, de masse $m_1, \ldots, m_n$ dans $\mathbb{R}^\ell$, soumis au potentiel d'interaction $\mathcal{V}$.

Les lois de la dynamique de Newton donnent les équations du mouvement :

$$m_1 q_1 + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Le potentiel $\mathcal{V}$ peut être *attractif* ou *répulsif*, *singulier* ou *non singulier*, selon les conditions physiques du mouvement.

$\mathcal{V}$ peut aussi être pris égal à $+\infty$ en dehors d'un ensemble d'attraction donné, ou sur un ouvert donné (trou noir).

Nous limiterons la présentation de nos résultats aux *potentiels du type gravitationnel, qui interviennent en Mécanique Céleste.*

Ces potentiels sont singuliers et ont la forme spéciale suivante :

- $\mathcal{V} = \sum\limits_{i \neq j} \mathcal{V}_{ij}\,(t, q_i - q_j)$
- $\mathcal{V}_{ij}$ périodique en t (période T)
- $\mathcal{V}_{ij} \in C^2(S^1 \times \mathbb{R}^\ell - \{0\}, \mathbb{R})$.

Les potentiels de la forme $\mathcal{V}$ donnent les particularités suivantes au système de n corps :

- Invariance par translation
- Comportement singulier de $\mathcal{V}_{ij}$ quand $q_i = q_j$, i.e. lors d'une collision.

(1) Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08905 (USA)
(2) University of Wisconsin-Madison, 480, Lincoln Drive, Madison, WI 53706 (USA)

$\mathcal{V}$ satisfait les hypothèses "naturelles suivantes" :

$(\mathcal{V}_1)$ $\quad \mathcal{V}_{ij} < 0$

$(\mathcal{V}_2)$ $\quad \mathcal{V}_{ij}\,, \dfrac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial q} \underset{|q|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, uniformément en t.

$(\mathcal{V}_3)$ $\quad \mathcal{V}_{ij} \underset{|q|\to 0}{\longrightarrow} -\infty$

$(\mathcal{V}_4)$ $\quad \displaystyle\lim_{|q|\to+\infty} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial q} \cdot q \left| \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial q} \right|^{-1} = +\infty$, uniformément en t.

Il est *commode* d'introduire aussi l'hypothèse supplémentaire suivante, due à W.B. Gordon [3], et qui est habituellement appelée "hypothèse d'interaction forte",

$(\mathcal{V}_5)$ $\quad$ Il existe un potentiel $U_{ij} \in C^2(\mathbb{R}^\ell \setminus \{0\}\,, \mathbb{R})$, $\;U_{ij} \underset{|q|\to 0}{\longrightarrow} +\infty$,

tel que $-\mathcal{V}_{ij} \geq |\nabla U_{ij}|^2$, dans un voisinage épointé de l'origine.

Les potentiels de la famille des *potentiels gravitationnels*,

$$\mathcal{V}_{ij} = -\frac{m_i\, m_j}{|q_i - q_j|^\alpha}\,, \quad \alpha > 0\,, \quad \text{satisfont } (\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_4)\,.$$

Ces potentiels satisfont $(\mathcal{V}_5)$ si et seulement si $\alpha \geq 2$.

Les équations du mouvement (1) préservent des quantités diverses.

L'étude des *invariants intégraux* des problèmes du type de celui des trois corps est une des branches actives de recherche en Systèmes Dynamiques, depuis le travail de H. Poincaré (*Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*).

Si $\mathcal{V}$ est autonome, une quantité préservée du mouvement est l'*énergie* du système.

C'est la quantité (que $\mathcal{V}$ soit, ou ne soit pas, autonome) :

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{q}_i|^2 + \mathcal{V}\,. \tag{2}$$

2. Le(s) problème(s) des trois corps

Le problème des trois corps est en fait un problème multiple et il semble donc plus raisonnable de parler de *plusieurs* problèmes des trois corps.

Nous décrivons, dans ce qui suit, de manière grossière, les différents aspects de ce problème, qui ont tous été considérés par H. Poincaré dans les "*Méthodes Nouvelles*" [1].

Premier problème

Trouver les solutions périodiques (de période T) des équations du mouvement (1).

Notons que, lorsque le potentiel $\mathcal{V}$ est autonome et homogène, ce problème est équivalent au problème à *énergie fixée* : en exploitant l'homogénéité du potentiel, on peut dilater la solution $q(\cdot)$ en $\lambda\, q(\cdot/\mu)$, de sorte que la nouvelle solution évolue sur l'hypersurface d'énergie prescrite.

Deuxième problème

Les orbites homoclines, hétéroclines, et les orbites de capture.

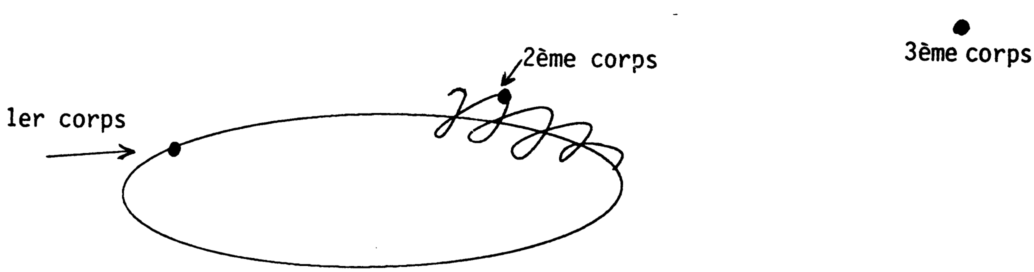
Il s'agit de trouver des solutions de (1) qui ont un comportement prescrit aux temps $t = -\infty$ et $t = +\infty$.

En général, on demande que la solution converge, en $-\infty$ ou en $+\infty$, vers une *solution périodique* ou une *position d'équilibre du système.*

Ces solutions ont été étudiées par H. Poincaré, dans son étude des "*solutions doublement asymptotiques*".

Le cas des orbites de capture est différent.

Soit un système de deux corps suivant une trajectoire Keplerienne :



Le troisième corps est très loin des deux premiers, et décrit un lacet presque constant, au temps $t = -\infty$.

Nous cherchons à démontrer l'existence d'une *orbite de capture* : au temps $t = +\infty$, les trois corps doivent décrire une solution périodique de (1) (de sorte que le troisième corps a été capturé par les deux premiers) ; ou encore, on peut demander que l'un des deux premiers corps soit expulsé et prenne, au temps $t = +\infty$, la place du troisième corps.

Troisième problème

La Dynamique Globale du problème des trois corps.

A la fin du siècle dernier et au début du XX^e siècle, on espérait pouvoir déterminer analytiquement la position de toutes les étoiles dans l'univers.

L'existence de séries formelles, les séries de Lindstedt et les séries de Gylden, solutions de (1), permettaient, dans une certaine mesure, d'envisager cet objectif. Cependant, ces séries ne convergent pas toujours et l'objectif s'est, au fur et à mesure des recherches nouvelles, éloigné (voir encore H. Poincaré dans les *"Méthodes Nouvelles"*).

On peut poser, aujourd'hui, une question similaire, d'une *manière plus qualitative* : Peut-on décrire qualitativement le système dynamique fourni par les équations du mouvement (1); peut-on, en particulier, avoir une idée de son comportement final, en fonction des données initiales? peut-on décrire toutes les orbites homoclines, hétéroclines et périodiques? peut-on réduire l'analyse de (1) au comportement du système dynamique au voisinage de ces orbites particulières?

Les travaux de V.M. Alekseev

Après les travaux de H. Poincaré, une contribution importante aux questions soulevées plus haut et à l'étude du problème des trois corps a été fournie par V.M. Alekseev [2] qui a étudié le *problème restreint des trois corps.*

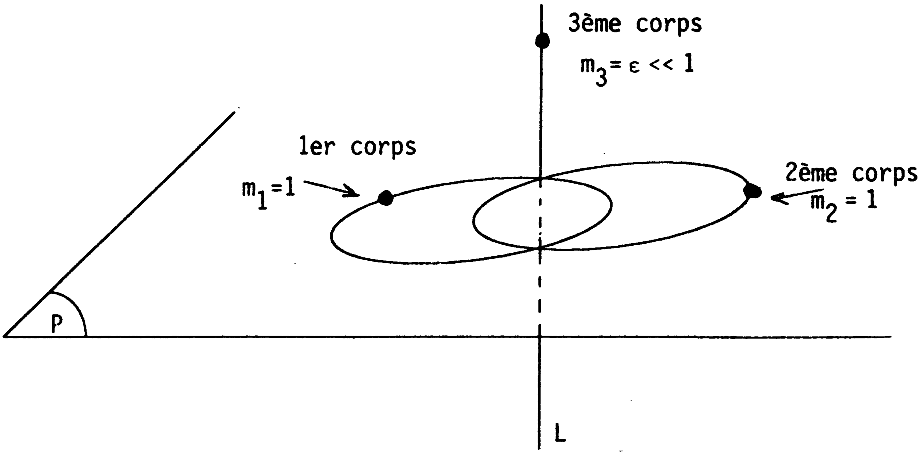
Dans le problème étudié par V.M. Alekseev, deux corps de masse égale $m_1 = m_2 = 1$, sont astreints à se mouvoir (mouvement Képlerien) dans un plan P, tandis que le troisième corps, de masse $\varepsilon \ll 1$, se meut sur une ligne L perpendiculaire au plan P, (figure ci-après).

Sous de telles hypothèses, V.M. Alekseev décrit, en utilisant la dynamique symbolique, le comportement global du système.

Il montre en particulier que (1) admet le *shift sur un nombre infini de symboles comme sous-système.*

Dans ce qui suit, nous considérons le problème des orbites périodiques.

Utilisant une approche variationnelle de ce problème introduite par W.B. Gordon [3] et exploitée par la suite par différents auteurs [4], [5], [6] et [7], nous allons établir l'existence d'une infinité d'orbites périodiques (de période T) de (1).



3. Le problème des orbites périodiques

3. a) Description des résultats

Soit

$$H = W_T^{1,2}(\mathbb{R}, (\mathbb{R}^\ell)^3)$$

l'espace de Hilbert des fonctions T-périodiques, muni de la norme :

$$\|q\| = \left(\int_0^T |\dot{q}|^2 dt + \|[q]\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où, la valeur moyenne $[q]$, de q, est :

$$[q] = \frac{1}{T} \int_0^T q(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

La fonctionnelle associée à (1) est :

$$I(q) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} m_i |\dot{q}_i|^2 - \mathcal{V}(t,q) \right) \mathrm{d}t\,.$$

Soit Λ l'espace des variations pour I :

$$\Lambda = \left\{ q \in E \text{ tels que } q_i(t) \neq q_j(t) \text{ pour tous } i \neq j \text{ et } t \in [0,T] \right\}.$$

On a alors le :

THÉORÈME 1

Sous les hypothèses $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_5)$, I a une infinité de valeurs critiques sur Λ, correspondant à une infinité de solutions classiques, T-périodiques, du problème des trois corps avec potentiel d'interaction $\mathcal{V}$.

Comme le montre le théorème suivant, le nombre des solutions périodiques correspond en fait à une *double infinité.*

Soit $\beta_k(\Lambda)$ *le nombre de Betti de* Λ *d'ordre* k, en homologie rationnelle (($\beta_k(\Lambda)$) est une *suite non bornée, d'après un résultat de M. Vigué-Poirrier et D. Sullivan* [8].

On a alors :

THÉORÈME 2 (mêmes hypothèses que pour le Théorème 1)

Supposons que toutes les orbites périodiques sont non dégénérées. Soit N_k le nombre de solutions périodiques d'indice de Morse k. On a alors :

$$N_k + N_{k-1} \geq \beta_k(\Lambda) - 12 \quad \forall\, k \geq 3\ell + 1\,.$$

Remarque. — Le théorème 1 implique, si $\mathcal{V}$ est autonome et homogène, l'existence d'une solution sur une surface d'énergie donnée. Le théorème 2 implique qu'il y en a en fait *une infinité* (d'orbites périodiques) *sur toute surface d'énergie négative prescrite.*

Les résultats sous l'hypothèse $(\mathcal{V}_5)$

Si on enlève l'hypothèse $(\mathcal{V}_5)$, on ne peut plus s'attendre à obtenir des solutions classiques du mouvement et on ne peut exclure la possibilités de collisions.

On doit donc étendre la notion de solutions et définir une notion de solutions distributionnelles ou généralisées :

Un potentiel *d'interaction faible* peut toujours être approximé par un potentiel *d'interaction forte*, en le modifiant dans un voisinage d'ordre δ de l'origine. On déduit alors des théorèmes 1 et 2, l'existence de solutions classiques (q_δ^k) du problème modifié; il s'agit de passer à la limite quand $\delta \to 0$.

On peut effectuer ce passage à la limite et la solution limite est appelée *solution généralisée.*

Pour une définition précise et l'étude des propriétés de telles solutions, nous renvoyons à P.H. Rabinowitz – A. Bahri [9].

On a alors :

THÉORÈME 3

Si $\mathcal{V}$ est autonome et satisfait $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_4)$, (1) a un nombre infini de solutions généralisées q^k, de période T, telles que $I(q^k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

et on a aussi :

THÉORÈME 4

Si $\mathcal{V}$ satisfait $(\mathcal{V}_1) - (\mathcal{V}_4)$, (1) a au moins une solution périodique généralisée, de période T.

Commentaires :

Sous des hypothèses supplémentaires sur $\mathcal{V}$, les solutions généralisées n'admettent (au plus) qu'un *nombre fini de collisions. L'énergie est préservée et l'action $I(q)$ est finie.* La solution *satisfait* (1) *au sens* C^2, avant et après chaque collision. Les théorèmes 3 et 4 peuvent alors être améliorés et on peut établir l'existence d'une *double infinité* de solutions.

Les résultats décrits plus haut concernent le problème des trois corps. On peut étudier par les mêmes méthodes le cas $n \geq 4$. Cependant, *l'argument topologique final*, que nous décrivons plus loin, est *démontré pour* $n = 3$ et est encore à *l'état de conjecture pour* $n \geq 4$.

3. b) La condition de Palais-Smale

Dans le cas du problème des *deux corps*, le problème variationnel présenté au 3.a) conduit facilement à des résultats d'existence du type théorèmes 1 et 3. Ces résultats sont dus à C. Greco [6], A. Ambrosetti – V. Coti-Zelati [4], P. Rabinowitz – A. Bahri [9] après W.B. Gordon [3].

Avec le problème des *trois corps*, il y a une complication sérieuse dans l'approche variationnelle : une hypothèse essentielle pour cette approche, la condition de Palais-Smale, n'est pas satisfaite.

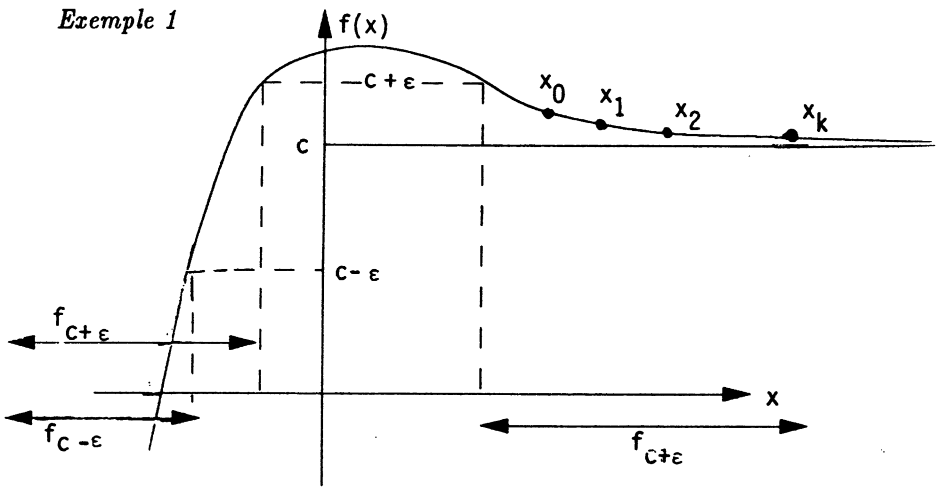
Étant donné un problème variationnel $f : M \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, sur une variété M, la condition de Palais-Smale dit :

Pour toute suite (x_k) de M, telle que $(f(x_k))$ soit bornée et $(f'(x_k))$ tende vers 0, on peut extraire une sous-suite convergente.

Habituellement, on exige cette condition en théorie variationnelle, afin d'établir la convergence des presque solutions, par exemple la convergence d'une suite minimisante.

Comme le montre l'exemple suivant, cette condition est *essentielle* en théorie variationnelle.

Exemple 1



Soit $f_c = \{x \in M \text{ tel que } f(x) \leq c\}$.

Dans l'exemple 1, $f_{c+\epsilon}$ a *deux* composantes connexes, $f_{c-\epsilon}$ a *une* composante connexe; et pourtant il n'y a aucun point critique au niveau c. Il y a, cependant, une suite (x_k) qui *viole précisément cette condition*

Donc, si la condition de Palais-Smale est violée, on ne peut plus déduire, des changements de topologie dans les ensembles de niveau de f (les ensembles f_c), l'existence de points critiques.

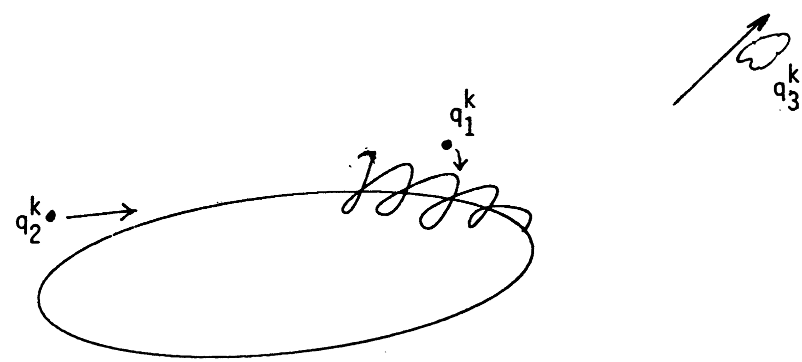
En contraste avec la situation classique, la topologie peut changer, sans qu'il y ait de points critiques. Dans ce cas, on dit que le problème variationnel a des "points critiques à l'infini".

Les années récentes ont vu un travail considérable s'effectuer, dans les *Equations aux Dérivées Partielles et en Géométrie*, sur des problèmes où il y a des *points critiques à l'infini :* problèmes de *courbure scalaire*; problème de *Yamabe* ou du type *Yamabe*, par exemple.

Le problème des trois corps est un problème de la même famille : la condition de Palais-Smale est violée pour des raisons faciles à comprendre.

Supposons, en effet, que les trois corps aient le comportement suivant : les deux premiers corps convergent, après translation à l'origine de leur centre de gravité, *vers une solution périodique du problème des deux corps, avec potentiel d'interaction* $\mathcal{V}_{12}$. Pendant ce temps, supposons que le troisième corps, *s'éloigne indéfiniment des deux premiers, en décrivant un lacet de plus en plus petit.*

Soit (q_1^k, q_2^k, q_3^k) la suite des lacets qui décrit le processus;



Clairement, on a :

- $|\dot{q}_3^k|_{L^2} \to 0$

  $(\mathcal{V}_2)$ implique :

- $\dfrac{\partial \mathcal{V}_{i3}}{\partial q}(t, q^k) \to 0$; $\dfrac{\partial \mathcal{V}_{3i}}{\partial q}(t, q^k) \to 0$.

  Notant

$$I_{12}(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\int_0^T (m_1|\dot{q}_1|^2 + m_2|\dot{q}_2|^2)dt - \int_0^T (\mathcal{V}_{21} + \mathcal{V}_{12})$$

- $I_{12}(q_1^k, q_2^k)$ est borné et $I'_{12}(q_1^k, q_2)^k) \to 0$.

  Pour finir

- $\left\| \left[q_3^k - \dfrac{m_1 q_1^k + m_2 q_2^k}{m_1 + m_2} \right] \right\| \to +\infty.$

On en déduit que $(I'(q^k)) \to 0$, $(I(q^k))$ *est bornée sans que* (q^k) *admette de sous-suite convergente* (même après translation du système, de sorte que son centre de gravité soit à l'origine).

On ne peut donc appliquer la théorie variationnelle classique, puisque ces suites pourraient jouer le rôle de la suite (x_k) de l'exemple 1.

Cependant, on peut prouver que, à la permutation des indices près (1,2 et 3), *c'est la seule façon de violer la condition de Palais-Smale*, du moins si $(I(q^k))$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive.

Signalons ici l'observation suivante due à V. Coti-Zelati [7].

Supposons que $\mathcal{V}_{ij}$ est autonome et $\mathcal{V}_{ij}(x) = \mathcal{V}_{ij}(-x)$.

Soit

$$\widetilde{\Lambda} = \{q \in \Lambda \text{ tel que } q(t + \tfrac{I}{2}) = -q(t)\} \quad \text{(espace des lacets antipériodiques).}$$

Alors, *la condition de Palais-Smale est satisfaite sur* $\widetilde{\Lambda}$. (Observons que $[q_i] = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ si $q \in \widetilde{\Lambda}$).

Sous ces conditions supplémentaires, la preuve de l'existence de solutions à (1) peut être faite directement. Cependant, le théorème 2 semble indiquer qu'il y a un *nombre infini de solutions distinctes des solutions antipériodiques.*

3. c) L'extension de la théorie variationnelle classique : le lemme de Morse à l'infini

En théorie variationnelle classique, si x_0 est un point critique non dégénéré de f sur M ($f''(x_0)$ est inversible), on cherche un choix particulier de coordonnées locales (X, Y) autour de x_0, où f admet la réduction suivante :

$$f \circ \varphi^{-1}(X, Y) = f(x_0) + |Y|^2 - |X|^2 .$$

La coordonnée X est dans E^-, qu'on peut voir comme la *variété instable* de x_0 ; la dimension de E^- est égale à la *négativité de* $f''(x_0)$. La coordonnée Y est dans E^+, qu'on peut voir comme la *variété stable de* x_0 ; la dimension de E^+ est égale à *la positivité de* $f''(x_0)$.

Cette réduction est appelée "Lemme de Morse". C'est un outil essentiel de la théorie variationnelle.

Nous allons *généraliser cette idée à notre contexte.*

Nous cherchons des coordonnées au voisinage des suites violant la condition de Palais-Smale, où I a une forme particulièrement simple.

Vu la description de ces suites que nous avons donnée plus haut, on peut penser à l'idée suivante :

On cherche un nouveau corps (virtuel) Q_3 tel que :

(1) La transformation $(q_1, q_2, q_3) \to (q_1, q_2, Q_3)$ est un difféomorphisme sur son image.

(2) Le nouveau corps Q_3 interagit seulement avec le Centre de Gravité des deux premiers corps et l'interaction a lieu seulement entre les valeurs moyennes.

En pratique, on résout :

$$I(q_1, q_2, q_3) = I_{12}(q_1, q_2) + \frac{1}{2}\int_0^T m_3|\dot{Q}_3|^2 dt + \frac{1}{1 + \left\| \left[Q_3 - \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \right] \right\|^2} \tag{3}$$

où Q_3 est de la forme suivante :

$$Q_3 = Q_3(\lambda) = \left[\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \right] + \frac{1}{\lambda}(q_3 - (q_3)) + \lambda \left(\left[q_3 - \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \right] \right) \tag{4}$$

pour $\lambda > 0$.

Nous obtenons ainsi la proposition suivante.

LEMME DE MORSE À L'INFINI

Pour tout $C > 0$, on peut trouver $\alpha(C) > 0$ tel que si

(i) $$\left\| q_1 - \left[\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \right] \right\|_\infty + \left\| q_2 - \left[\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \right] \right\|_\infty \leq C$$

et si

(ii) $$\frac{1}{2} m_3 \|\dot{q}_3\|_{L^2}^2 + \frac{1}{1 + \left| q_3 - \left[\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2} \right] \right|^2} < \alpha(C)$$

on peut trouver un unique $\lambda(q) > 0$, fonction différentiable de q tel que $(q_1, q_2, Q_3(\lambda(q), q_1, q_2))$ satisfasse (3).

La transformation

$$(q_1, q_2, q_3) \to (q_1, q_2, Q_3)$$

définit un homéomorphisme sur son image, pourvu que $\alpha(C)$ soit choisi suffisamment petit.

4. Idée de la démonstration du Théorème 1

En utilisant la représentation donnée par ce nouveau "corps virtuel" Q_3, le problème variationnel se *scinde*, "à l'infini", en deux problèmes variationnels :

1) Le problème variationnel à deux corps I_{12} sur

$$\Lambda_{12} = \left\{(q_1, q_2) \in W_T^{1,2}(S^1, (\mathbb{R}^\ell)^2) \text{ tel que } q_1(t) \neq q_2(t) \quad \forall\, t \in [0,T]\right\}$$

2) Un problème variationnel portant sur $Q_3 - \left[\dfrac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}\right]$,

où la fonctionnelle est donnée par la formule suivante :

$$\frac{1}{2}\int_0^T m_3 \|\dot{Q}_3\|^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{1 + \left| Q_3 - \left[\dfrac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}\right]\right|^2}\,.$$

La position optimale du corps virtuel consiste à décrire un lacet constant à l'infini

$$\left(\dot{Q}_3 \equiv 0\,;\ \left\|\left[Q_3 - \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}\right]\right\| = +\infty\right).$$

Ce lacet virtuel peut être placé selon une direction quelconque de $\mathbb{R}^\ell$. L'ensemble des positions optimales peut donc être décrit comme une sphère à l'infini $(S^{\ell-1})_\infty$.
Il ne reste donc plus qu'à optimiser le premier problème variationnel.
Les arguments que nous avons avancés montrent que, si (1) n'a pas de solution périodique de période T, alors le problème variationnel I sur Λ pourrait être réduit au problème variationnel I_{12} sur Λ_{12}, multiplié (dans un sens à préciser) par la sphère à l'infini $(S^{\ell-1})_\infty$.

Cet argument heuristique peut être rendu rigoureux, au niveau topologique.

Si (1) n'a pas de solution périodique de période T, alors Λ peut être déformé sur un sous-ensemble, compliqué à décrire (voir [10]), mais qui a la topologie de $\Lambda_{12} \times S^{\ell-1}$.
Rigoureusement, on a (voir [10]) :

$$H_k(\Lambda\,; Q) = \bigoplus_{\substack{i \neq j \\ i<j}} H_k(\Lambda_{ij} \times S^{\ell-1}; Q) \text{ pour } k \geq 3\ell + 1$$

L'argument final est alors le suivant :
soit $\beta_k(\Lambda) = \dim H_k(\Lambda; Q)$. Un théorème de D. Sullivan et M. Vigué-Poirrier [8] implique que la suite $(\beta_k(\Lambda))$ est non bornée. Par ailleurs, $(\dim H_k(\Lambda; Q))$ est une suite bornée et nous avons donc une contradiction. □

Références

[1] POINCARÉ (H.) .— *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste,* Librairie Albert Blanchard, Paris 1987

[2] ALEKSEEV (V.M.) .— *On the capture orbits for the three-body problem for negative energy constant,* Uspekhi Mat. Nauk, **24** (1969) pp. 185-186

ALEKSEEV (V.M.) .— *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps,* Actes du Congrès Int. des Math. 1970, **2**, pp. 893-907, Gauthier-Villars, Paris 1971

[3] GORDON (W.B.) .— *Conservative dynamical systems involving strong forces,* Trans. Amer. Math. Soc., **204** (1975) pp. 113-135

[4] AMBROSETI (A.) and COTI-ZELATI (V.) .— *Critical points with lack of compactness and applications to singular Hamiltonian systems,* to appear

[5] DEGIOVANNI (M.), GIANNONI (F.) and MARINO (A.) .— *Periodic solutions of dynamical systems with Newtonian type potentials,* in "Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics (P.H. Rabinowitz, et al Eds) **29**, pp. 111-115, NATO ASI Series, Reidel, Dordrecht 1987

[6] GRECO (C.) .— *Periodic solutions of a class of singular hamiltonian systems,* Nonlinear Analysis : TMA, **12** (1988) pp. 259-270

[7] COTI-ZELATI (V.) .— *Morse Theory and periodic solutions of Hamiltonian systems,* Preprint, SISSA Trieste

[8] SULLIVAN (D.) and VIGUÉ-POIRRIER (M.) .— *The homology theory of the closed geodesic problem,* J. Diff. Geom., **11** (1976) pp. 633-644

[9] BAHRI (A.) and RABINOWITZ (P.H.) .— *A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials,* J. Funct. Anal., **82** (1983) pp. 412-428

[10] BAHRI (A.) and RABINOWITZ (P.H.) .— *Periodic solutions of Hamiltonian systemsof 3-body type,* to appear