Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Jean-Pierre Dedieu

L’image de la limite supérieure d’une famille d’ensembles est-elle égale à la limite supérieure de la famille des images ?

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 2 (1990), p. 91-103

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_91_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

L'image de la limite supérieure d'une famille d'ensembles est-elle égale à la limite supérieure de la famille des images ?

JEAN-PIERRE DEDIEU[1]

ABSTRACT. — Let X, Y be Hausdorff topological vector spaces. Let I be a set of indices and let $\mathcal{F}$ be a filter in I. With each family $\left(A_i\right)_{i\in I}$ of subsets of X is associated its upper-limit :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{i\in F} A_i} \right).$$

Let $\left(\Gamma_j\right)_{j\in J}$ a family of set-valued maps from X to Y and let $\mathcal{G}$ a filter in J. We give various conditions which ensure the inclusion :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}} \Gamma_j(A_i) \subset \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}} \Gamma_j\right) \left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i\right).$$

Applications are given to optimization and mathematical morphology.

1. Introduction

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques et séparés sur $\mathbb{R}$. Soient I un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. À toute famille $\left(A_i\right)_{i\in I}$ de parties de X nous associons sa limite supérieure :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{i\in F} A_i} \right)$$

[1] Jean-Pierre Dedieu, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier, 31062 Toulouse Cedex (France)

([1] chap. VI, §5). Donnons-nous une famille $(\Gamma_j)_{j\in J}$, J filtré par $\mathcal{G}$, de multiapplications de X dans Y. Quand peut-on affirmer que l'inclusion suivante est satisfaite :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\, \Gamma_j(A_i) \subset \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, \Gamma_j\right)\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, A_i\right) ?$$

Afin de répondre à cette question, nous introduisons une version paramétrique des notions de cône asymptote et d'ensemble asymptotiquement compact tels qu'ils sont décrits dans [2] et [3]. Nous montrons que l'inclusion précédente a lieu chaque fois que la suite (A_i) est asymptotiquement compacte (c'est toujours le cas si X est de dimension finie) et sous la condition qu'il n'existe pas de direction asymptotique commune aux familles $(A_i \times \{O_Y\})_{i\in I}$ et $(\Gamma_j)_{j\in J}$ (théorème 1). Nous étudions aussi (corollaire 3) l'égalité :

$$\overline{\lim}\, A_i + \overline{\lim}\, B_j = \overline{\lim}\, A_i + B_j$$

ainsi que (théorème 2) :

$$\overline{\lim}\, T(A_i) = T(\overline{\lim}\, A_i)$$

lorsque T est un homomorphisme linéaire surjectif dont le noyau est de dimension finie. Ces résultats sont appliqués à l'étude d'un problème d'optimisation ainsi qu'à l'étude de la continuité de certaines applications pour la topologie "en tout ou rien" sur les fermés de $\mathbb{R}^m$.

2. Définitions

Les deux définitions suivantes ont été introduites par l'auteur dans [2] et [3]. Les définitions 3 et 4 sont des versions paramétriques de 1 et 2. Autrement dit 3 et 4 redonnent 1 et 2 pour des familles constantes.

DÉFINITION 1.— *Une partie A de X est asymptotiquement compacte lorsqu'il existe un voisinage V de O_X pour lequel :*

$$(]0\,,\,1]\,A) \cap V$$

est relativement compact.

DÉFINITION 2.— *Le cône asymptote d'une partie A de X est l'ensemble :*

$$A_\infty = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{]0\,,\,\epsilon]\,A}\,.$$

DÉFINITION 3. — *Une famille $(A_i)_{i\in I}$, I filtré par $\mathcal{F}$, est asymptotiquement compacte s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et un voisinage V de O_X pour lesquels :*

$$\Big(]0,1]\bigcup_{i\in F} A_i\Big)\cap V$$

est relativement compact.

DÉFINITION 4. — *Le cône asymptote de (A_i) est l'ensemble :*

$$(A_i)_\infty = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}\Big(\bigcup_{i\in F} A_i\Big)_\infty .$$

Remarques

1. Comme $\overline{\lim}\, A_i \subset \overline{\bigcup_{i\in F} A_i}$, si (A_i) est asymptotiquement compacte au sens de la définition 3, alors $\overline{\lim}\, A_i$ est asymptotiquement compact au sens de de la définition 1. La réciproque est fausse.
2. Il est clair que $(\overline{\lim}\, A_i)_\infty \subset (A_i)_\infty$. Cette inclusion peut être stricte.
3. Nous identifierons une multiapplication à son graphe. Ainsi nous noterons $\Gamma_\infty = (\mathrm{graphe}\,\Gamma)_\infty \ldots$, etc.

3. Énoncé des résultats principaux

La notion de compacité asymtotique joue ici un rôle fondamental. Si un ensemble A possède cette propriété et si (x_i) est une suite de points de A (ou plus généralement un filtre sur A) alors, soit (x_i) possède une valeur d'adhérence $x \in \overline{A}$, soit (x_i) "s'enfuit à l'infini" le long d'une (ou plusieurs) direction(s) asymptotique(s) de A ([3], prop. 3.8). Dans le lemme qui suit nous donnons une version paramétrique de ce résultat.

LEMME 1. — *Soit $(A_i)_{i\in I}$, une famille asymptotiquement compacte de parties de X, I filtré par $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{B}$ un filtre sur X plus fin que le filtre $\mathcal{A}$ de base $\bigcup_{i\in F} A_i$, $F \in \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{B}$ possède un point adhérent $b \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, A_i$, soit le filtre de base $]0,\epsilon]B$, $\epsilon > 0$ et $B \in \mathcal{B}$, possède un point adhérent $b_\infty \in (A_i)_\infty$, $b_\infty \neq O_X$.*

Démonstration. — Si $\mathcal{B}$ possède un point adhérent b, il est clair que $b \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\, A_i$ puisque $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ ne possède pas de point adhérent. La famille (A_i) étant asymptotiquement compacte, il existe $F_0 \in \mathcal{F}$, et un voisinage V de O_X, absorbant, équilibré et fermé pour lesquels :

$$A = \left( ]0,1] \bigcup_{i \in F_0} A_i \right) \cap V$$

soit relativement compact.

Montrons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $n \geq 1$ on a :

$$B \setminus nV \neq \emptyset. \tag{1}$$

Si cela n'est pas le cas, il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ et $n_1 \geq 1$ pour lesquels $B_1 \subset n_1 V$. L'ensemble $B_1 \cap \bigcup_{i \in F_0} A_i$ est contenu dans $\mathcal{B}$ puisque ce filtre est plus fin que $\mathcal{A}$. De plus cet ensemble est relativement compact puisqu'il est contenu dans $n_1 V \cap \bigcup_{i \in F_0} A_i$. Ceci prouve que le filtre $\mathcal{B}$ possède un point adhérent contrairement à l'hypothèse et démontre la relation (1). Cette relation peut aussi s'écrire :

$$(]0,\epsilon]B) \cap V \neq \emptyset,$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $0 < \epsilon \leq 1$, de sorte que :

$$(]0,\epsilon]B) \cap A \neq \emptyset \tag{2}$$

puisque $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$. Notons C l'intersection de A et du complémentaire de l'intérieur de $\frac{1}{2}V$. Cet ensemble est relativement compact et rencontre toute demi-droite issue de l'origine et contenant un point de A. Plus précisément, il existe $\lambda_0 \geq 1$ tel que $\big([1,\lambda_0]a\big) \cap C \neq \emptyset$ pour tout $a \in A$. Ceci résulte du fait que A est relativement compact. La relation (2) devient :

$$(]0,\epsilon]B) \cap C \neq \emptyset$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $0 < \epsilon \leq \lambda_0^{-1}$. Ces ensembles, qui sont relativement compacts, constituent la base d'un filtre qui possède un point adhérent x_∞. Ce point est, bien sûr, adhérent aux ensembles $]0,\epsilon]B$. On a $x_\infty \in (A_i)_\infty$ puisque $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$ et $x_\infty \neq O_X$ puisque $O_X \notin \overline{C}$. □

THÉORÈME 1. — *Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille asymptotiquement compacte de parties de X et $(\Gamma_j)_{j \in J}$ une famille de multiapplications de X dans Y. Si :*

$$(\Gamma_j)_\infty \cap \big((A_i)_\infty \times \{O_Y\}\big) = \{O_{X \times Y}\}$$

alors

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\, \Gamma_j(A_i) \subset \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, \Gamma_j\right)\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, A_i\right).$$

De plus, ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration. — La deuxième assertion résulte des remarques 1 et 2. On a en effet $\overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i$ asymptotiquement compact et :

$$\left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, \Gamma_j\right)_\infty \cap \left(\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, A_i\right)_\infty \times \{O_Y\}\right) = \{O\}.$$

On peut appliquer [2] (théorème 3.1) ou [3] (corollaire 4.3).

Prouvons maintenant la première assertion. Soit $y \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}\, \Gamma_j(A_i)$. Pour $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ et le voisinage W de O_Y, il existe $i \in F$ et $j \in G$ pour lesquels :

$$(y+W) \cap \Gamma_j(A_i) \neq \emptyset.$$

Autrement dit, l'ensemble :

$$B_{F,G,W} = \{x \in X \mid \exists\, i \in F,\ \exists\, j \in G,\ x \in A_i \text{ et } y \in \Gamma_j x - W\}$$

est non vide. Ceci prouve que ces ensembles constituent la base d'un filtre $\mathcal{B}$ sur X plus fin que le filtre $\mathcal{A}$ de base $\bigcup_{i\in F} A_i$, $F \in \mathcal{F}$. Deux cas peuvent alors se présenter.

1^er cas : $\mathcal{B}$ possède un point adhérent x

C'est aussi un point adhérent à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire,

$$x \in \overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, A_i.$$

D'autre part, pour tout voisinage U de O_X, on a :

$$(x+U) \cap B_{F,G,W} \neq \emptyset,$$

de sorte que :

$$((x,y)+U\times W) \cap \left(\bigcup_{j\in G} \Gamma_j\right) \neq \emptyset.$$

Comme U, W et G sont quelconques, on obtient :

$$(x,y) \in \overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, \Gamma_j$$

et ceci prouve que :

$$y \in \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, \Gamma_j\right)\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, A_i\right)$$

et démontre le théorème 1 dans ce cas.

2$^{\text{ième}}$cas : $\mathcal{B}$ ne possède pas de point adhérent

D'après le lemme 1, on peut trouver $x_\infty \in (A_i)_\infty$, $x_\infty \neq O_X$, qui soit adhérent aux ensembles $]0, \epsilon]\, B_{F,G,W}$. Remarquons que pour tout $x \in B_{F,G,W}$ on a :

$$(x,y) \in \left(\bigcup_{j\in G} \Gamma_j\right) - \{O_X\} \times W$$

de sorte que :

$$]0, \epsilon]\,(B_{F,G,W} \times \{y\}) \subset\,]0, \epsilon]\left(\bigcup_{j\in G} \Gamma_j - \{O_X\} \times W\right).$$

Passons aux adhérences et prenons l'intersection pour W voisinage de O_Y, $\epsilon > 0$ et $G \in \mathcal{G}$. Le premier membre contient (x_∞, O_Y) et le second est égal à $(\Gamma_j)_\infty$, ce qui prouve que :

$$(x_\infty, O_Y) \in (\Gamma_j)_\infty .$$

On a donc :

$$(\Gamma_j)_\infty \cap \left((A_i)_\infty \times \{O_Y\}\right) \neq \{O\}$$

contrairement à l'hypothèse. Ce second cas ne se présente donc pas et ceci prouve le théorème 1. □

COROLLAIRE 1.— *S'il existe $F \in \mathcal{F}$ pour lequel $\bigcup_{i\in F} A_i$ soit relativement compact alors les conclusions du théorème 1 sont satisfaites.*

Démonstration.— En effet, la famille (A_i) est alors asymptotiquement compacte et $(A_i)_\infty = \{O_X\} \ldots$ □

COROLLAIRE 2.— *Si Γ est une multiapplication de graphe fermé, (A_i) une famille asymptotiquement compacte de parties de X telle que :*

$$\Gamma_\infty \cap \left((A_i)_\infty \times \{O_Y\}\right) = \{O_{X\times Y}\},$$

alors :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,\Gamma(A_i) \subset \Gamma\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i\right)$$

et ce dernier ensemble est fermé dans Y.

Démonstration. — On applique le théorème 1 à la famille constante égale à Γ. On a $\Gamma = \overline{\lim}_{\mathcal{G}}\,\Gamma$ puisque Γ est de graphe fermé. □

COROLLAIRE 3. — *Si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux familles de parties de X, I et J filtrés par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, supposons l'une d'entre-elles asymptotiquement compacte et :*

$$(A_i)_\infty \cap -(B_j)_\infty = \{O_X\}\,.$$

On a :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i + \overline{\lim_{\mathcal{G}}}\,B_j = \overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\,A_i + B_j\,.$$

Démonstration. — L'inclusion $\supset$ s'obtient à partir du théorème 1 appliqué à la famille (A_i) (asymptotiquement compacte) et aux multiapplications $\Gamma_j x = x + B_j$. Il suffit de remarquer que $(x, O_Y) \in (\Gamma_j)_\infty$ si et seulement si $-x \in (B_j)_\infty$.

Prouvons maintenant l'inclusion $\subset$. Soient U un voisinage de O_X, $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ et $x = a + b \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}}\,A_i + \overline{\lim}_{\mathcal{G}}\,B_j$.

Il existe $i \in F$ et $j \in G$ pour lesquels :

$$(a + U) \cap A_i \neq \emptyset\,,$$
$$(b + U) \cap B_j \neq \emptyset\,,$$

de sorte que :

$$(x + U + U) \cap (A_i + B_j) \neq \emptyset\,.$$

Comme U, F, G sont quelconques, on a :

$$x \in \overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\,A_i + B_j\,. \ □$$

COROLLAIRE 4. — *Soit $(T_j)_{j\in J}$ une famille équicontinue d'applications linéaires de X dans Y (qu'il n'est pas nécessairement de supposer continues).*

Supposons que (T_j) converge vers une application linéaire et continue T. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille asymptotiquement compacte de parties de X et si :

$$\ker T \cap (A_i)_\infty = \{O_X\},$$

alors
$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\, T_j(A_i) = T\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, A_i\right).$$

Démonstration. — L'inclusion $\subset$ résulte du théorème 1. En effet :

$$T = \overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, T_j \text{ et } (x, O_Y) \in (T_j)_\infty \text{ si et seulement si } T(x) = O_Y,$$

c'est-à-dire $x \in \ker T$. Il suffit pour le voir de remarquer que

$$(T_j)_\infty = \overline{\lim_{\mathcal{G}}}\, T_j = \text{graphe}\,(T)$$

puisque ce sont des variétés linéaires.

Prouvons l'inclusion inverse. Soit $y \in T(\overline{\lim}\, A_i)$, $y = Tx$ avec $x \in \overline{\lim}\, A_i$. Donnons-nous $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ et un voisinage W de O_Y. Puisque la famille (T_j) est équicontinue, il existe un voisinage U de O_X tel que pour tout $j \in J$ on ait :

$$T_j(U) \subset W. \tag{3}$$

Puisque $(x, y) \in \overline{\lim}\, T_j$, il existe $u_1 \in U_1$, $w \in W$ et $j \in G$ pour lesquels :

$$(x, y) + (u_1, w) \in T_j. \tag{4}$$

D'autre part, puisque $x \in \overline{\lim}\, A_i$, il existe $u_2 \in U$ et $i \in F$ tels que :

$$x + u_2 \in A_i. \tag{5}$$

Les relations (3), (4) et (5) prouvent que :

$$y + w = T_j(x + u_2) + T_j(u_1 - u_2),$$

d'où, en supposant W symétrique :

$$y \in T_j(A_i) + W + W + W.$$

Comme F, G et W sont quelconques, on en déduit que :

$$y \in \overline{\lim}\, T_j(A_i)$$

et ceci prouve le corollaire 4. □

THÉORÈME 2. — *Soit T une application linéaire ouverte de X sur Y. Si $\ker T$ est de dimension finie et si :*

$$(A_i)_\infty \cap \ker T = \{O_X\},$$

alors :

$$T\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i\right) = \overline{\lim_{\mathcal{F}}}\, T(A_i).$$

Démonstration. — L'inclusion $\subset$ résulte aisément de la continuité de T. Montrons que :

$$Y \setminus T\left(\overline{\lim} A_i\right) \subset Y \setminus \overline{\lim}(T(A_i)) .$$

Soit $y \in Y \setminus T\left(\overline{\lim} A_i\right)$. Puisque T est surjective, on a :

$$y = Tx \quad \text{et} \quad x \notin \left(\overline{\lim} A_i\right) + \ker T .$$

De nos hypothèses, appliquées au corollaire 3, on en déduit que :

$$\left(\overline{\lim} A_i\right) + \ker T = \overline{\lim}(A_i + \ker T),$$

de sorte que :

$$x \notin \overline{\lim}(A_i + \ker T).$$

Il existe donc $F \in \mathcal{F}$ et un voisinage U de O_X pour lesquels :

$$(x + U) \cap \bigcup_{i \in F} (A_i + \ker T) = \emptyset,$$

de sorte que :

$$T(x + U) \cap T\left(\bigcup_{i \in F} A_i + \ker T\right) = \emptyset.$$

Puisque T est ouverte et $Tx = y$, on obtient :

$$y \notin \overline{\bigcup_{i \in F} T(A_i)},$$

c'est-à-dire :

$$y \notin \overline{\lim}\, T(A_i),$$

et ceci démontre notre théorème 2. □

4. Exemple : un problème d'optimisation

Soient $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X, I filtré par $\mathcal{F}$. Posons $A = \overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i$.

Nous allons montrer que sous certaines conditions on a :

$$\underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x) = \inf_{x \in A} f(x).$$

Considérons la multiapplication définie par :

$$\Gamma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

On a $\Gamma = \operatorname{epi}(f)$ et $\Gamma_\infty = \operatorname{epi}(f_\infty)$ où f_∞ est la fonctionnelle définie par :

$$f_\infty(x) = \sup_{\epsilon > 0} \underline{\lim}_{y \to x} \inf_{0 < \lambda \leq \epsilon} \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

(voir [4] lorsque f est convexe, [2] pour le cas général).

THÉORÈME 3.— *Supposons que $(A_i)_{i \in I}$ soit asymptotiquement compacte, f semi-continue inférieurement, continue sur son domaine et minorée sur A. Si pour tout $x \in (A_i)_\infty$, $x \neq 0$, on a $f_\infty(x) > 0$, alors :*

$$\underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x) = \inf_{x \in A} f(x)$$

et l'infimum de f sur A est un minimum.

Démonstration.— À l'aide du corollaire 2 du théorème 1 on obtient :

$$\overline{\lim}_{\mathcal{F}} \Gamma(A_i) \subset \Gamma\left(\overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i\right),$$

ainsi que la fermeture de ce dernier ensemble. Ceci prouve que :

$$\inf_{x \in A} f(x) \leq \underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x),$$

et que l'infimum de f sur A est un minimum. Par ailleurs :

$$\underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in \bigcup_{i \in F} A_i} f(x),$$

et par continuité de f on a :

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} \inf_{x\in\bigcup_{i\in F} A_i} f(x) = \sup_{F\in\mathcal{F}} \inf_{x\in\bigcup_{i\in F} A_i} f(x) \leq \inf_{x\in A} f(x) ,$$

ce qui établit l'inégalité inverse et prouve le théorème 3. □

5. Le cas séquentiel

Les résultats précédents s'écrivent de façon plus familière lorsque les topologies de X et Y sont métrisables et lorsque les diverses familles de parties sont indexées par $\mathbb{N}$ filtré par le filtre de Fréchet (c'est-à-dire lorsque $i \to \infty$). Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de X. Les résultats qui suivent sont de démonstration immédiate. Nous ne faisons donc que les énoncer.

PROPOSITION 4.— *$\overline{\lim} A_i$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $a_i \in A_i$.*

PROPOSITION 5.— *Si A est une partie de X, $a \in A_\infty$ si et seulement s'il existe des suites (ϵ_i) et (a_i) avec $\epsilon_i > 0$, $\lim \epsilon_i = 0$, $a_i \in A$ et $a = \lim \epsilon_i a_i$.*

PROPOSITION 6.— *$a \in (A_i)_\infty$ si et seulement s'il existe des suites (ϵ_i) et (a_i) avec $\epsilon_i > 0$, $\lim \epsilon_i = 0$, $a_i \in A_i$ et pour lesquelles a soit une valeur d'adhérence de la suite $(\epsilon_i a_i)$.*

PROPOSITION 7.— *Lorsque $X = \mathbb{R}^m$ toute partie A de X est asymptotiquement compacte, toute famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est asymptotiquement compacte.*

6. Continuité pour la topologie "en tout ou rien" sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^m$

Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^m$. La topologie "en tout ou rien" est engendrée par la base d'ouverts suivante :

$$\mathcal{F}^K_{p,G_1,\ldots,G_p} = \{F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \mid F\cap K = \emptyset \text{ et } \forall_{\,i} = 1\ldots p,\ F\cap G_i \neq \emptyset\} ,$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^m$, $G_1,\ldots,G_p$ des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour cette topologie, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ est compact, séparé et séparable.

DÉFINITION 6. — *Pour toute famille $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^m$ on pose $\underline{\lim}\, F_i$ (limite inférieure) l'ensemble des limites des suites $x_i \in F_i$.*

Puisque la topologie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ est séparable, elle est caractérisée par ses suites convergentes.

THÉORÈME 8. — *$F_i \to F$ si et seulement si $F = \underline{\lim}\, F_i = \overline{\lim}\, F_i$.*

En ce qui concerne $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ muni de la topologie "en tout ou rien" nous renvoyons le lecteur à [5]. Cette topologie est utilisée en morphologie mathématique. À la différence de la topologie définie par la distance de Hausdorff sur les compacts de $\mathbb{R}^m$, une suite de compact (F_i) peut, pour la topologie en tout ou rien, converger vers un ensemble non borné.

THÉORÈME 9. — *Soient (F_i) et (G_i) des suites de fermés de $\mathbb{R}^m$ satisfaisant à :*

$$(F_i)_\infty \cap -(G_i)_\infty = \{0\}\,.$$

Si $F_i \to F$ et $G_i \to G$, alors :

$$F_i + G_i \to F + G$$

et ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration. — Par le corollaire 3 on a :

$$\overline{\lim}\, F_i + G_j = F + G$$

et cet ensemble est fermé. On en déduit que :

$$\overline{\lim}\, F_i + G_i \subset F + G\,.$$

De plus, on a :

$$F + G \subset \underline{\lim}\, F_i + G_i \subset \overline{\lim}\, F_i + G_i\,,$$

d'où le résultat. □

THÉORÈME 10. — *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continue et (F_i) une suite de fermés de $\mathbb{R}^m$. Supposons que :*

$$f_\infty \cap \big((F_i)_\infty \times \{0\}\big) = \{0\}\,.$$

Si $F_i \to F$ alors $f(F_i) \to f(F)$. En particulier ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration.— On sait, à cause du corollaire 2, que :

$$\overline{\lim} f(F_i) \subset f\left(\overline{\lim} F_i\right) = f(F)$$

et que ce dernier ensemble est fermé.

Par continuité de f on a clairement :

$$f(F) = f\left(\underline{\lim} F_i\right) \subset \underline{\lim} f(F_i).$$

À l'aide de l'inclusion :

$$\underline{\lim} f(F_i) \subset \overline{\lim} f(F_i),$$

on obtient :

$$f(F) = \underline{\lim} f(F_i) = \overline{\lim} f(F_i). \square$$

COROLLAIRE 4.— *Soient (F_i) une suite fermée de $\mathbb{R}^m$ et* proj *la projection qui oublie le dernier facteur. Si $\left(F_i\right)_\infty$ ne contient pas d'élément du type $(0, \ldots, 0, x_m)$ avec $x_m \neq 0$, et si $F_i \to F$ alors :*

$$\mathrm{proj}(F_i) \to \mathrm{proj}(F)$$

et ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration.— La condition :

$$\left(\mathrm{proj}\right)_\infty \cap \left(\left(F_i\right)_\infty \times \{0\}\right) = \{0\}$$

s'écrit ici $(0, \ldots, 0, x_m) \in \left(F_i\right)_\infty \Rightarrow x_m = 0$.

On conclut avec le théorème 10. $\square$

7. Bibliographie

[1] BERGÉ (C.) .— *Espaces Topologiques et Fonctions Multivoques*, Dunod. Paris (1966)

[2] DEDIEU (J.P.) .— *Critères de fermeture pour l'image d'un fermé non convexe par une multiapplication*, C. R. Acad. Sci., Paris, **287** (1978) pp. 941-943

[3] DEDIEU (J.P.) .— *Fermeture de l'image d'un fermé par une multiapplication, Multigraphié*, Toulouse (1978)

[4] LAURENT (P.J.) .— *Approximation et Optimisation*, Hermann, Paris (1972)

[5] SCHMITT (M.) .— *Quelques exemples d'analyse d'algorithmes de géométrie combinatoire par des techniques de morphologie mathématiques*, Preprint (1988) (INRIA - BP 105 - 78153 Le Chesney Cedex (France))