ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DOMINIQUE BAKRY
DOMINIQUE MICHEL

Inégalités de Sobolev et minorations du semi-groupe de la chaleur

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 2 (1990), p. 23-66

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_23_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

Inégalités de Sobolev et minorations du semi-groupe de la chaleur

DOMINIQUE BAKRY[1] ET DOMINIQUE MICHEL[1]

RÉSUMÉ. — Nous étudions les relations entre inégalités de Sobolev faibles associées à une forme de Dirichlet et les estimations sur le semi-groupe de la chaleur. En utilisant les méthodes de Gross et Davies, nous montrons que ces inégalités permettent d'obtenir des minorations du semi-groupe aussi bien que des majorations.

En passant, nous donnons une relation entre le diamètre de l'espace et les constantes de Sobolev

ABSTRACT. — We investigate the relationships between weak Sobolev inequalities for a Dirichlet form and estimates on the associated heat semigroup. We use Gross' and Davies' methods to get lower bounds as well as upper bounds.

As a by-product, we also get a relationship between the diameter of the space and the Sobolev constants.

0. Introduction

Au cours des dernières années, de nombreux auteurs ont établi les correspondances étroites qu'il y a entre les inégalités de Sobolev (ou d'autres inégalités du même type) associées à une forme de Dirichlet et les majorations classiques sur la densité du semi-groupe associé. Nous renvoyons en référence aux articles [CSK], [V], [DS] et surtout au livre de E.B. Davies [D] qui fait le point sur la question et dans lequel on trouvera une excellente bibliographie sur le sujet.

De quoi s'agit-il ? Désignons par $\mathbf{P}_t$ un semi-groupe markovien symétrique sur un espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathfrak{E}, \mu)$. Nous désignons par $\langle f \rangle$ l'intégrale d'une

[1] Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex

fonction f par rapport à la mesure μ et par $\langle f,g\rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\mu)$. À $\mathbf{P}_t$, nous associons la forme de Dirichlet

$$\mathbf{E}_\mu(f,f)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\langle f, f-\mathbf{P}_t(f)\rangle\,,$$

et nous appelons $\mathbf{D}(\mathbf{E})_\mu$ son domaine. Il y a équivalence entre :

1) une inégalité de Sobolev

$$\forall f\in\mathbf{D}(\mathbf{E})_\mu\,,\quad \langle f^{\frac{2n}{n-2}}\rangle^{\frac{n-2}{n}}\le c_1\langle f^2\rangle+c_2\mathbf{E}_\mu(f,f)\,, \tag{0.1}$$

2) et une majoration uniforme de la densité $\mathbf{p}_t(x,y)$ du semi-groupe par rapport à la mesure μ,

$$\mathbf{p}_t(x,y)\le Ct^{-n/2}\,,\quad 0\le t\le 1\,. \tag{0.2}$$

Dans les deux formulations précédentes, n est une constante supérieure à 2, que Varopoulos appelle la dimension du semi-groupe (ce terme provient de ce que, pour le semi-groupe de la chaleur de $\mathbb{R}^d$ ou d'une variété riemannienne de dimension d, le meilleur exposant n que l'on puisse obtenir est $n=d$).

De plus, sous l'une des deux conditions équivalentes qui précèdent, Davies a obtenu des majorations précises en dehors de la diagonale en terme de la distance naturelle associée au semi-groupe :

$$\forall\,\lambda>0\,,\quad \mathbf{p}_t(x,y)\le C(n,\lambda)t^{-n}\exp\left\{\frac{-d^2(x,y)}{(4+\lambda)t}\right\}\,.$$

Ici, la distance $d(x,y)$ se définit à partir de l'opérateur carré du champ associé à $\mathbf{P}_t$ de la manière suivante : appelons $\mathbf{L}$ le générateur de $\mathbf{P}_t$

$$\mathbf{L}(f)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathbf{P}_t(f)-f)\,.$$

Si nous supposons qu'il y a dans le domaine de $\mathbf{L}$ une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions suffisamment riche, on définit sur cette algèbre l'opérateur carré du champ Γ par :

$$\Gamma(f,f)=\frac{1}{2}(\mathbf{L}(f^2)-2f\mathbf{L}f).$$

C'est automatiquement un opérateur positif ($\forall\,f$, $\Gamma(f,f)\ge 0$), et on pose

$$d^2(x,y)=\sup_{\Gamma(f,f)\le 1}(f(x)-f(y))\,.$$

Lorsque le semi-groupe est le semi-groupe de la chaleur d'une variété riemannienne, (auquel cas on a $\mathbf{L} = \Delta$), on peut prendre pour $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact : dans ce cas, nous avons $\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$, et la distance $d(x,y)$ n'est rien d'autre que la distance riemannienne usuelle.

En fait, ce n'est pas tant une inégalité de Sobolev dont on se sert dans ces questions qu'une forme apparemment affaiblie de celle-ci, que nous appellerons inégalité de Sobolev faible :

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \langle f^2 \rangle \log \langle f^2 \rangle + \frac{n}{2} \langle f^2 \rangle \log \left\{ c_1 + c_2 \frac{\mathbf{E}_\mu(f,f)}{\langle f^2 \rangle} \right\} . \qquad (0.3)$$

Il est facile de voir que (0.3) est une conséquence de (0.1), avec les mêmes coefficients n, c_1 et c_2. Comme corollaire des résultats de Davies, et également de ceux contenus dans cet article, on verra que l'équivalence précédente entre (0.1) et (0.2) entraîne que (0.3) $\Rightarrow$ (0.1), avec le même exposant n, mais avec des constantes c_1 et c_2 qui peuvent être différentes.

Supposons pour simplifier que l'espace $(\mathbf{E}, \mathfrak{E}, \mu)$ soit un espace de probabilité. En prenant pour fonction f une fonction constante, il est facile de voir que, si le semi-groupe satisfait une inégalité de Sobolev faible (0.3), on a $c_1 \geq 1$. Or, dans de nombreux cas, on a en fait $c_1 = 1$ (nous dirons alors que c_1 est optimale). C'est ce qui se passe en particulier pour le semi-groupe de la chaleur sur les sphères (dont on a normalisé le volume), et également pour des variétés à courbure de Ricci minorée, pour lesquelles on sait comparer les constantes des inégalités de Sobolev ordinaires à celles des sphères de même courbure. L'optimalité de c_1 a encore lieu pour de nombreux semi-groupes que l'on peut construire à partir des précédents, comme les semi-groupes de Jacobi sur l'intervalle $]-1\,,\,1[$ et leurs analogues multidimensionnels.

En fait, nous allons voir plus bas (proposition 1.8) que le semi-groupe de la chaleur sur une variété riemannienne compacte satisfait toujours à une inégalité de Sobolev faible avec constante c_1 optimale. Plus généralement, pour des semi-groupes symétriques de mesure invariante finie, on pourra obtenir une inégalité de Sobolev faible avec constante c_1 optimale dès qu'on aura une inégalité de Sobolev faible et un trou dans le spectre du générateur.

L'un des buts principaux de cet article est de montrer qu'alors on peut obtenir des minorations uniformes sur la densité $\mathbf{p}_t(x,y)$, sous l'hypothèse supplémentaire que le semi-groupe possède la propriété de diffusion. Notre méthode donne des renseignements sur la borne inférieure du semi-groupe, tant au voisinage de $t = 0$ qu'au voisinage de $t = \infty$, mais ne dit rien sur le comportement du semi-groupe en dehors des points où le minimum est atteint. Par contre, en utilisant une méthode dérivée de celle de Davies, nous obtenons une minoration de c_2 en termes de diamètre de $(\mathbf{E}, \mathfrak{E}, \mu)$, exprimée à l'aide de la distance naturelle associée à $\mathbf{P}_t$:

$$c_2 \geq \frac{4\,\mathrm{diam}(\mathbf{E})^2}{n^2\pi^2}. \tag{0.4}$$

Cette inégalité peut être aussi interprêtée comme une majoration du diamètre en termes de la constante c_2, ce qui explique que, si une inégalité de Sobolev faible a lieu avec une constante c_1 optimale sur une variété riemannienne complète, celle-ci est compacte.

La méthode que nous employons s'applique également pour obtenir sur le semi-groupe des majorations plus précises que celles obtenues par Davies. En particulier, lorsque la constante c_1 est optimale, nous obtenons un encadrement du semi-groupe $\mathbf{P}_t$ lorsque $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} -1 + \mathrm{o}(t) &\leq \inf_{x,y} \frac{c_2 \log \mathbf{p}_t(x,y)}{4t\,\mathrm{e}^{-\frac{4t}{nc_2}}} \\ &\leq \sup_{x,y} \frac{c_2 \log \mathbf{p}_t(x,y)}{4t\,\mathrm{e}^{-\frac{4t}{nc_2}}} \leq 1 + \mathrm{o}(t). \end{aligned} \tag{0.5}$$

Le fait que l'optimalité de c_1 entraîne l'ergodicité du semi-groupe peut se déduire aisément par des considérations sur la dimension de l'espace des fonctions invariantes. Le résultat précédent précise la vitesse d'ergodicité.

Lorsque la constante c_1 est optimale, et que l'inégalité (0.4) ci-dessus est une égalité (c'est-à-dire lorsque c_2 est également optimale), notre méthode donne la valeur explicite de la borne inférieure de $\mathbf{P}_t$, pour toutes les valeurs de t. Ceci montre qu'en un certain sens, cette méthode est optimale. Néanmoins, il faut relativiser cette assertion : nous n'avons pas réussi à trouver un seul exemple de semi-groupe satisfaisant une inégalité de Sobolev faible avec c_1 et c_2 optimales.

Notre article est organisé de la façon suivante : dans une première partie, nous précisons les hypothèses et notations, puis nous exposons la méthode que nous emploierons, à la fois pour obtenir des majorations et des minorations sur le semi-groupe, que nous ramenons à un calcul d'optimisation élémentaire. La seconde partie est consacrée à la solution du problème dans le cas des minorations, et la dernière au calcul dans le cas des majorations.

1. Généralités

Nous considérons un espace mesuré $(\mathbf{E}, \mathfrak{E}, \mu)$, σ-fini. En fait, dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'au cas où la mesure est finie, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire dans ce qui suit. Comme nous l'avons dit plus haut, nous noterons $\langle f \rangle$ l'intégrale $\int_{\mathbf{E}} f(x)\, d\mu(x)$, et $\langle f, g \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\mu)$.

Sur $(\mathbf{E}, \mathfrak{E}, \mu)$, nous avons un semi-groupe markovien $\mathbf{P}_t$, $t \geq 0$: c'est une famille d'opérateurs appliquant les fonctions boréliennes bornées sur elles-mêmes, qui se représentent par des noyaux de transition de mesures de probabilité :

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int_{\mathbf{E}} f(y)\, \mathbf{p}_t(x\,, dy)\,, \quad \mathbf{P}_t 1 = 1\,, \text{ et } f \geq 0 \Rightarrow \mathbf{P}_t f \geq 0\,.$$

Nous supposons que ces opérateurs satisfont à

1) $\mathbf{P}_t \circ \mathbf{P}_s = \mathbf{P}_{t+s}$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$.
2) chaque opérateur $\mathbf{P}_t$ est une contraction de $L^2(\mu)$ et le semi-groupe est fortement continu en 0 :

$$\forall f \in L^2(\mu)\,, \quad \mathbf{P}_t f \xrightarrow[L^2(\mu)]{} f \quad \text{lorsque } f \to 0\,.$$

Nous appellerons $\mathbf{L}$ le générateur de $\mathbf{P}_t$ dans $L^2(\mu)$ et $\mathbf{D}_2(\mu)$ son domaine :

$$\mathbf{L}(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\mathbf{P}_t f - f)\,.$$

Nous supposerons en outre que $\mathbf{P}_t$ possède un opérateur carré du champ : il existe une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions bornées, incluse dans $\mathbf{D}_2(\mu)$ et stable par $\mathbf{L}$, stable par composition avec les fonctions φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\varphi(0) = 0$. Si l'on appelle $\mathcal{A}^+$ le cône des éléments positifs de $\mathcal{A}$, on suppose que $\mathcal{A}^+ - \mathcal{A}^+$ est dense dans $L^2(\mu)$. Lorsque la mesure est finie, on supposera en outre que $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Sur cette algèbre, on pose

$$\Gamma(f, f) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} f^2 - 2 f \mathbf{L} f\right)\,,$$

et on prolonge l'opérateur Γ en une application bilinéaire $\Gamma(f, g)$. Cet opérateur bilinéaire Γ est appelé le carré du champ associé à $\mathbf{L}$. Sa propriété fondamentale est d'être positif : $\forall f \in \mathcal{A}$, $\Gamma(f,f) \geq 0$. Cela provient du caractère markovien de $\mathbf{P}_t$, qui entraîne que $\mathbf{P}_t(f^2) \geq (\mathbf{P}_t f)^2$ (on obtient la positivité de Γ en dérivant cette inégalité en $t = 0$). Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, l'opérateur carré du champ permet d'associer à $\mathbf{L}$ de façon naturelle une distance sur $\mathbf{E}$ en posant

$$d(x,y) = \sup_{\substack{\Gamma(f,f)\leq 1 \\ f\in\mathcal{A}}} \big(f(x) - f(y)\big)\,.$$

Le diamètre de $\mathbf{E}$ est alors défini en termes de cette distance.

Nous serons amenés à faire sur $\mathbf{P}_t$ un certain nombre d'hypothèses, que nous précisons ci-dessous, et qui pourront varier de place en place :

1) Nous dirons que μ est *invariante* si, pour toute fonction f borélienne bornée et intégrable, $\mathbf{P}_t f$ est intégrable et $\langle \mathbf{P}_t f\rangle = \langle f\rangle$. Dans ce cas, $\mathbf{P}_t$ est une contraction de $L^1(\mu)$, et, puisque c'est également une contraction de $L^\infty(\mu)$, c'est par interpolation une contraction de $L^p(\mu)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. De plus, pour tout élément f de $\mathbf{D}_2(\mu) \bigcap L^1(\mu)$, on a $\langle \mathbf{L} f\rangle = 0$, et donc, pour tout élément f de $\mathcal{A}$, on a $\big\langle \Gamma(f,f)\big\rangle = -\langle \mathbf{L} f, f\rangle$.

2) Nous dirons que $\mathbf{P}_t$ est *symétrique* par rapport à μ (ou aussi que μ est une mesure symétrique pour $\mathbf{P}_t$) si, pour tout couple de fonctions (f,g) de $L^2(\mu)$, on a $\langle f, \mathbf{P}_t g\rangle = \langle g, \mathbf{P}_t f\rangle$. On vérifiera sans mal que toute mesure symétrique est invariante. Dans ce cas, l'opérateur $\mathbf{L}$ est un opérateur autoadjoint négatif :

$$\forall f \in \mathbf{D}_2(\mu)\,, \quad \langle f, \mathbf{L} f\rangle \leq 0\,.$$

Le domaine de Dirichlet est le domaine de la racine de $-\mathbf{L}$ et si nous appelons $\mathbf{E}_\mu$ cette forme, nous avons, pour des éléments f et g de $\mathcal{A}$, $\mathbf{E}_\mu(f,g) = \big\langle \Gamma(f,g)\big\rangle$. Par abus de langage, nous continuerons d'utiliser la notation $\mathbf{E}_\mu(f,f)$ pour désigner la quantité $\langle -\mathbf{L} f, f\rangle$ même dans le cas où la mesure μ n'est pas symétrique.

3) Nous dirons que $\mathbf{P}_t$ est un semi-groupe de diffusion si, pour toute fonction f de $\mathcal{A}$ et toute fonction $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(0) = 0$, la formule du changement de variable suivante est vraie

$$\mathbf{L}\varphi(f) = \varphi'(f)\mathbf{L} f + \varphi''(f)\Gamma(f,f)\,.$$

L'exemple fondamental que nous avons en tête est celui où l'espace $\mathbf{E}$ est une variété, et l'opérateur $\mathbf{L}$ un opérateur différentiel du second ordre sur $\mathbf{E}$, sans terme constant. Dans ce cas, le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est obtenu en résolvant l'équation de la chaleur ${\partial f}/{\partial t}(x,t) = \mathbf{L}f(x,t)$, $f(x,0) = f(x)$. Il n'y a pas toujours unicité de la solution, et le semi- groupe associé n'est pas toujours markovien. Mais ce sera toujours le cas lorsque la variété est compacte. L'algèbre $\mathcal{A}$ sera l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact. Supposons que $\mathbf{L}$ soit elliptique :

$$\mathbf{L}f(x) = \sum g^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \sum b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Dans ce cas, la matrice inverse g_{ij} de la matrice g^{ij} définit sur $\mathbf{E}$ une structure riemannienne. L'opérateur carré du champ n'est autre que $\Gamma(f,f) = |\mathrm{Grad} f|^2$, et la distance associée à $\mathbf{P}_t$ est la distance riemannienne. Nous noterons que celle ci ne dépend donc que des termes du second ordre de $\mathbf{L}$. Lorsque $\mathbf{L}$ est elliptique, on peut toujours trouver une mesure μ-invariante pour $\mathbf{P}_t$ et elle est unique en général, à une constante près. Pour savoir si cette mesure invariante est symétrique, on décompose $\mathbf{L}$ en $\mathbf{L} = \Delta + X$, où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami de la structure riemannienne associée à $\mathbf{L}$, et X un champ de vecteurs. La condition pour que μ soit symétrique est que $X = \mathrm{Grad}(h)$, et dans ce cas, la mesure μ a une densité par rapport à la mesure riemannienne qui vaut $\exp(h)$. Enfin, lorsque dans la décomposition précédente on a $X = 0$, et que la variété est complète pour la métrique riemannienne, on dit que $\mathbf{P}_t$ est le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbf{E}$.

Dans le cas des variétés compactes, l'algèbre $\mathcal{A}$ est stable par $\mathbf{P}_t$. Bien que cette hypothèse ne soit pas nécessaire dans le cas général, nous la ferons systématiquement car le gain de généralité que nous aurions en la supprimant serait illusoire : l'un des premiers résultats que nous allons démontrer dans le chapitre suivant est que, si l'on a une inégalité de Sobolev avec constante c_1 optimale, alors le diamètre de $\mathbf{E}$ est fini.

1.1. Inégalités de Sobolev

Nous définissons une inégalité de Sobolev pour un semi-groupe non nécessairement symétrique :

DÉFINITION 1.1. — *On dit que le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ vérifie une inégalité de Sobolev d'exposant $\varepsilon > 0$, de constantes $c_1 \geq 0$ et $c_2 > 0$, pour la mesure μ, si pour toute fonction f de l'algèbre $\mathcal{A}$, l'inégalité suivante est vérifiée*

$$\left\langle |f|^{2+\varepsilon} \right\rangle_\mu^{2/(2+\varepsilon)} \leq c_1 \langle f^2 \rangle_\mu - c_2 \langle f, \mathbf{L}f \rangle. \tag{1.1}$$

Si tel est le cas, on dira que $(\mathbf{P}_t)$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$.

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible sur la mesure μ, nous dirons que $(\mathbf{P}_t)$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2)$.

Remarques

1) Lorsque $\mathbf{P}_t$ est le semi-groupe de la chaleur sur une variété riemannienne compacte de dimension n, il existe des constantes c_1 et c_2 pour lesquelles $\mathbf{P}_t$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$, avec $2 + \varepsilon = 2n/(n-2)$, μ désignant la mesure riemannienne. Pour cette raison, on convient de poser $n = 2 + 4/\varepsilon$: suivant Varopoulos [V], on appellera cette constante n ***la dimension*** associée à la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$.

2) Si $\mathbf{P}_t$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$ il est dans la classe $S(\varepsilon, c_1', c_2, \mu)$ dès que $c_1' \geq c_1$. Lorsque la mesure μ est invariante et que $c_2' \geq c_2$ il est également dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2', \mu)$.

3) Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, lorsque le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est markovien et que la mesure μ est finie, on obtient une borne inférieure à c_1. En effet, la fonction 1 est dans l'algèbre $\mathcal{A}$ et on a $\mathbf{L}1 = 0$. En appliquant la définition de la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$, on obtient $c_1 \geq \mu(\mathbf{E})^{-\varepsilon/(2+\varepsilon)} = \mu(\mathbf{E})^{-2/n}$. En particulier, le cas $c_1 = 0$ ne peut se produire que lorsque $\mu(\mathbf{E}) = \infty$. Lorsque $c_1 = \mu(\mathbf{E})^{-2/n}$, on dira que c_1 est optimale.

4) Si $\mathbf{P}_t$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$, et si α est une constante positive, $\mathbf{P}_t$ est dans la classe $S(\varepsilon, \alpha^{-\varepsilon/(2+\varepsilon)} c_1, \alpha^{-\varepsilon/(2+\varepsilon)} c_2, \alpha.\mu)$. En particulier, lorsque $c_1 \neq 0$, il est dans la classe $S(\varepsilon, 1, \frac{c_2}{c_1}, c_1^{(2+\varepsilon)/\varepsilon}.\mu)$. Par cette opération, quitte à changer la masse de la mesure μ, on peut toujours supposer que $c_1 = 1$. On aura alors $\mu(\mathbf{E}) \geq 1$.

5) Changeons de temps dans le semi-groupe $\mathbf{P}_t$, c'est-à-dire remplaçons $\mathbf{P}_t$ par le semi-groupe $\mathbf{P}_{\alpha t}$, où α est une constante positive. La forme de Dirichlet associée est multipliée par α. Donc, si $\mathbf{P}_t$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$, le semi-groupe $\mathbf{P}_{\alpha t}$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2/\alpha, \mu)$. Par cette opération, on peut toujours se ramener au cas où $c_2 = 1$.

6) Lorsque la mesure μ est finie, on peut appliquer l'inégalité de Holder pour changer la constante ε en une constante plus petite. Ceci nous montre que la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$ contient la classe $S(\varepsilon', c_1', c_2', \mu)$, lorsque $\varepsilon' < \varepsilon$, avec $c_1' = \beta c_1$, $c_2' = \beta c_2$, la constante β étant égale à $\mu(\mathbf{E})^{2(\varepsilon-\varepsilon')/(2+\varepsilon)(2+\varepsilon')}$. Si on introduit les dimensions n et n' associées respectivement à ε et ε', cette dernière quantité s'écrit encore $\beta = \mu(\mathbf{E})^{2/n - 2/n'}$.

1.2. Inégalités de Sobolev logarithmiques et inégalités de Sobolev faibles

DÉFINITION 1.2. — *Nous dirons que le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ vérifie une inégalité de Sobolev logarithmique pour la mesure μ, d'exposant p, de constantes c et m, si, pour toute fonction f de $\mathcal{A}^+$, on a*

$$\langle f^p \log(f^p)\rangle_\mu \leq \langle f^p\rangle_\mu \log\langle f^p\rangle_\mu + c\Big\{-\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu + m\langle f^p\rangle_\mu\Big\}\,.$$

On dira alors que le semi-groupe est dans la classe $Slog(p, c, m, \mu)$.

Remarques

1) Supposons que $\mathbf{P}_t$ soit un semi-groupe de diffusion et que la mesure μ soit invariante pour ce semi-groupe. Choisissons un réel p quelconque et considérons une fonction f, strictement positive dans $\mathcal{A}$. Dans l'inégalité de SOBOLEV logarithmique, on peut effectuer le changement de variables $f \to f^{p/2}$ pour passer d'une inégalité d'exposant 2 à une inégalité d'exposant p. Pour un semi-groupe de diffusion, nous avons, pour tout p réel,

$$\langle f^{p/2}, \mathbf{L}f^{p/2}\rangle_\mu = \frac{p^2}{4(p-1)}\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu\,.$$

Ceci provient des identités

$$\begin{aligned} \mathbf{L}f^p &= 2f^{p/2}\mathbf{L}f^{p/2} + 2\Gamma(f^{p/2}, f^{p/2}) \\ &= 2f^{p/2}\mathbf{L}f^{p/2} + \frac{p^2}{2}f^{p-2}\Gamma(f,f) \end{aligned}$$

et
$$\mathbf{L}f^p = pf^{p-1}\mathbf{L}f + p(p-1)f^{p-2}\Gamma(f,f)\,.$$

Pour obtenir l'identité précédente, il ne reste plus qu'à intégrer ces deux égalités par rapport à la mesure μ, en remarquant que, grâce à l'invariance de μ, on a $\langle \mathbf{L}f^p\rangle = 0$.

Ceci nous montre que, pour les semi-groupes de diffusion, la classe $Slog(2, c(2), m(2), \mu)$ est égale à la classe $Slog(p, c(p), m(p), \mu)$, avec $c(p) = c(2)p^2/4(p-1)$ et $m(p) = 4m(2)(p-1)/p^2$.

2) Si $\mathbf{P}_t$ n'est pas un semi-groupe de diffusion, mais sous l'hypothèse supplémentaire que le semi-groupe est symétrique par rapport à la mesure μ, l'inégalité

$$\langle f^{p/2}, \mathbf{L}f^{p/2}\rangle_\mu \leq p^2/4(p-1)\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu$$

reste vraie lorsque $p > 1$ (il faut renverser l'inégalité lorsque $p < 1$). Pour le voir, il suffit d'écrire, pour une fonction f strictement positive,

$$
\begin{aligned}
&-\left\langle f^{p-1}, \mathbf{L} f\right\rangle = \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \iint_{\mathbf{E}\times\mathbf{E}} \mathrm{p}_t(x\,,\,\mathrm{d}y)\left\{f^{p-1}(x) - f^{p-1}(y)\right\}\{f(x) - f(y)\right\}\,.
\end{aligned}
$$

On écrit ensuite l'inégalité universelle

$$
\begin{aligned}
\left\{f^{p-1}(x) - f^{p-1}(y)\right\}\left\{f(x) - f(y)\right\} \geq \frac{4(p-1)}{p^2} \times \\
\times \left\{f^{p/2}(y)\right\}^2 .
\end{aligned}
$$

Donc, dans le cas où le semi-groupe n'est pas un semi-groupe de diffusion, s'il est dans la classe $Slog(2, c(2), m(2), \mu)$, il est dans la classe $Slog(p, c(p), m(p), \mu)$, avec les mêmes constantes que dans le cas des diffusions, mais ceci à condition que $p > 1$. Cette distinction entre les semi-groupes de diffusion, pour lesquels on peut faire varier p dans toute la droite réelle et les autres, va jouer un rôle important plus bas.

Nous empruntons à Carlen et Strook [CS] le résultat suivant, qui permet de passer d'une inégalité de Sobolev à une inégalité de Sobolev logarithmique (voir aussi le livre de Davies [D]).

PROPOSITION 1.1.— *Si $\mathbf{P}_t$ est dans la classe $S(\varepsilon, c_1, c_2, \mu)$, il est, pour tout $x > 0$, dans la classe $Slog(2, c(x), m(x), \mu)$, avec*

$$
c(x) = \frac{n}{2}\frac{c_2}{x} \quad et \quad m(x) = \frac{x}{c_2}\left(\log(x) - 1 + \frac{c_1}{x}\right)
$$

(ici, n désigne la dimension associée à ε, telle qu'elle a été définie plus haut).

Preuve.— Soit f une fonction du domaine de Dirichlet et soit ν la mesure de probabilité $f^2 \cdot \mu / < f^2 >$. Nous écrivons

$$
\begin{aligned}
\left\langle \log(f^2)\right\rangle_\nu &= \frac{2}{\varepsilon}\left\langle \log|f|^\varepsilon\right\rangle_\nu \leq \frac{2}{\varepsilon}\log\left\langle |f|^\varepsilon\right\rangle_\nu \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\log\left(\frac{\left\langle |f|^{2+\varepsilon}\right\rangle}{\left\langle f^2\right\rangle}\right) = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\log\left(\left\langle |f|^{2+\varepsilon}\right\rangle^{\frac{2}{2+\varepsilon}}\right) - \frac{2}{\varepsilon}\log\left\langle f^2\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Puis on utilise l'inégalité de Sobolev pour écrire

$$\log\Big(\langle|f|^{2+\varepsilon}\rangle^{\frac{2}{2+\varepsilon}}\Big) \leq \log\Big\{c_1\langle f^2\rangle + c_2\mathbf{E}(f,f)\Big\}$$
$$= \log\langle f^2\rangle + \log\left\{c_1 + \frac{c_2}{c_1}\frac{\mathbf{E}(f,f)}{\langle f^2\rangle}\right\}.$$

Maintenant, nous utilisons le fait que la fonction log est convexe pour écrire, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\log(y) \leq \log(x) + {(y-x)}/{x}$. En remplaçant y par la quantité $c_1 + \dfrac{c_2}{c_1}\dfrac{\mathbf{E}(f,f)}{\langle f^2\rangle}$, ceci donne l'inégalité de Sobolev logarithmique que nous cherchions. □

Dans la proposition précédente, si nous optimisons en $x > 0$ l'inégalité de Sobolev logarithmique ainsi obtenue, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\langle f^2\log f^2\rangle \leq \langle f^2\rangle\log\langle f^2\rangle + \frac{n}{2}\langle f^2\rangle\log\left\{c_1 + c_2\frac{\mathbf{E}(f,f)}{\langle f^2\rangle}\right\}. \tag{1.2}$$

Réciproquement, l'inégalité précédente implique que le semi-groupe est, pour tout $x > 0$, dans la classe $Slog(2, c(x), m(x), \mu)$.

Dans toute la suite, nous ne nous servirons en fait que de l'inégalité (1.2).

DÉFINITION 1.3.— *On appellera une inégalité de type (1.2) une inégalité de Sobolev faible, de dimension n, et de constantes c_1 et c_2. Si $n > 2$, on pose $\varepsilon = 2n/(n-2) - 2$, et on appellera ce coefficient l'exposant de l'inégalité de Sobolev faible. On appellera $Sf(n, c_1, c_2)$ la classe des semi-groupes satisfaisant à une inégalité de Sobolev faible, de dimension n, et de constantes c_1 et c_2.*

Remarques

1) Les remarques en ce qui concerne les constantes c_1 et c_2 que l'on a faites sur les inégalités de Sobolev s'appliquent sans changement aux inégalités de Sobolev faibles.

2) Bien qu'elle ressemble à une inégalité de Sobolev logarithmique, l'inégalité de Sobolev faible entraîne, comme nous le verrons plus bas, l'inégalité de Sobolev ordinaire, de même exposant ε, mais de constantes c_1' et c_2' moins bonnes, a priori, que c_1 et c_2. En d'autres termes, en passant de l'inégalité de Sobolev à l'inégalité de Sobolev faible, on ne perd rien, sauf peut être en ce qui concerne les constantes c_1 et c_2.

COROLLAIRE 1.2.— *Si $\mathbf{P}_t$ est un semi-groupe de diffusion et que μ est une mesure invariante pour $\mathbf{P}_t$, alors s'il est dans la classe $Sf(n, c_1, c_2, \mu)$, il est, pour tout p réel et tout $x > 0$, dans la classe $Slog(p, c(p,x), m(p,x))$ avec :*

$$\begin{cases} c(p,x) = \dfrac{p^2}{4(p-1)} \dfrac{c_2}{x} \dfrac{n}{2} \\ \text{et} \\ m(p,x) = \dfrac{4(p-1)}{p^2} \dfrac{x}{c_2} \left(\log x + \dfrac{c_1}{x} - 1 \right) . \end{cases}$$

Preuve.— Il suffit d'appliquer la proposition précédente ainsi que la remarque qui la précède. □

1.3. Effet d'une transformation de jauge sur les inégalités de Sobolev logarithmiques

On considère une fonction φ de notre algèbre $\mathcal{A}$ et on lui associe le semi-groupe $\mathbf{P}_t^\varphi$ défini par $\mathbf{P}_t^\varphi(f) = e^{-\varphi}\mathbf{P}_t(e^\varphi f)$. Ceci nous donne un nouveau semi-groupe dont le générateur infinitésimal $\mathcal{L}^\varphi$ s'écrit $\mathcal{L}^\varphi(f) = e^{-\varphi}\mathbf{L}(e^\varphi f)$. Ce n'est en général plus un semi-groupe markovien, et la mesure μ n'est en général pas une mesure invariante ou symétrique pour $\mathbf{P}_t^\mu$, même si elle l'est pour $\mathbf{P}_t$. La méthode qui consiste à utiliser ces semi-groupes auxiliaires pour obtenir des informations sur $\mathbf{P}_t$ est due à Davies.

Nous allons voir que, si $\Gamma(\varphi, \varphi)$ est bornée, cette transformation envoie la classe $Slog(p, c, m, \mu)$ dans une nouvelle classe $Slog(p, c', m', \mu)$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3.— *Supposons que $\mathbf{P}_t$ soit un semi-groupe de diffusion, symétrique par rapport à la mesure μ, qui appartienne à la classe $Slog(p, c, m, \mu)$, avec $(p-1)c > 0$. Soit h un majorant de $\Gamma(\varphi, \varphi)$. Alors, pour tout $b > 1$, $\mathbf{P}_t^\varphi$ appartient à la classe $Slog(p, bc, \frac{1}{b}\{m + h\rho(b,p)\}, \mu)$, où la fonction $\rho(b,p)$ vaut :*

$$\rho(b,p) = b\left\{ \frac{b(p-2)^2}{4(b-1)(p-1)} + 1 \right\} . \tag{1.3}$$

Remarque.— Puisqu'on se limite au cas $b > 1$, un petit calcul montre que la fonction $\rho(b,p)$ est du signe de $p - 1$.

Preuve. — Nous allons montrer que

$$-\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu \leq -b\langle f^{p-1}, \mathcal{L}^\varphi f\rangle_\mu + \rho(b,p)\langle f^p, \Gamma(\varphi,\varphi)\rangle_\mu, \quad \text{si } p > 1$$

et

$$-\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu \geq -b\langle f^{p-1}, \mathcal{L}^\varphi f\rangle_\mu + \rho(b,p)\langle f^p, \Gamma(\varphi,\varphi)\rangle_\mu, \quad \text{si } p < 1.$$

Le résultat en découlera immédiatement, compte tenu de la remarque précédente et du fait que $c(p-1) \geq 0$.

Nous commençons par écrire, du fait de la symétrie de μ pour $\mathbf{P}_t$,

$$-\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu = (p-1)\langle f^{p-2}, \Gamma(f,f)\rangle_\mu \tag{1.4}$$

et

$$\begin{aligned} -\langle f^{p-1}, \mathcal{L}^\varphi f\rangle_\mu &= \\ &= -\langle \mathrm{e}^{-\varphi} f^{p-1}, \mathbf{L}(\mathrm{e}^\varphi f)\rangle_\mu = \langle \Gamma(f^{p-1}\mathrm{e}^{-\varphi}, f\,\mathrm{e}^\varphi)\rangle_\mu \\ &= \langle (p-1)f^{p-2}, \Gamma(f,f)\rangle_\mu + \langle (p-2)f^{p-1}, \Gamma(f,\varphi)\rangle_\mu \\ &\qquad - \langle f^p, \Gamma(\varphi,\varphi)\rangle_\mu . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Il est sans doute intéressant de remarquer que (1.4) n'utilise que la propriété d'invariance de la mesure μ, ainsi que la propriété de diffusion de $\mathbf{P}_t$, alors que (1.5) fait appel à tout le caractère symétrique de μ.

Traitons d'abord le cas $p \geq 1$: on voit, sur la formule précédente, que l'inégalité

$$-\langle f^{p-1}, \mathbf{L}f\rangle_\mu \leq -b\langle f^{p-1}, \mathcal{L}^\varphi f\rangle_\mu + \rho\langle f^p, \Gamma(\varphi,\varphi)\rangle_\mu$$

sera vérifiée dès que

$$\langle f^{p-2}, (p-1)(b-1)\Gamma(f,f) + b(p-2)f\Gamma(f,\varphi) + (\rho - b)f^2\Gamma(\varphi,\varphi)\rangle_\mu \geq 0 .$$

Or, l'opérateur bilinéaire Γ est positif, donc nous avons

$$|\Gamma(f,\varphi)| \leq \Gamma(f,f)^{1/2}\Gamma(\varphi,\varphi)^{1/2} .$$

De là il s'ensuit que l'expression que nous intégrons est toujours positive dès que la forme quadratique $(b-1)(p-1)X^2 + b(p-2)XY + (\rho - b)Y^2$ l'est aussi. Compte tenu de ce que $(b-1)(p-1) \geq 0$, cela s'écrit $\rho \geq \rho(b,p)$.

Le cas $p \leq 1$ se traite de la même manière : il n'y a qu'à renverser les inégalités. □

Dans toute la suite, nous nous ramènerons toujours au cas $c_1 = c_2 = 1$. Nous résumons alors les calculs précédents en une seule proposition.

PROPOSITION 1.4.— *Soit* $\mathbf{P}_t$ *un semi-groupe de diffusion de la classe* $Sf(n,1,1,\mu)$ *et soit* φ *une fonction satisfaisant à* $\|\Gamma(\varphi,\varphi)\|_\infty \leq h$. *Pour tout p réel, pour tout* $z > 0$ *et pour tout* $a \in]0,1[$, *le semi-groupe* $\mathbf{P}_t^\varphi$ *est dans la classe*

$$Slog\big(p, c(n,z,p), m(z,a,h,p), \mu\big)\,, \tag{1.6}$$

où les fonctions $c(n,z,p)$, $m(z,a,h,p)$ *valent respectivement*

$$\begin{cases} c(n,z,p) = \dfrac{n}{2}\dfrac{z}{\alpha(p)} \\ m(z,a,h,p) = \dfrac{\alpha(p)}{z}\psi(az) + \dfrac{h}{\alpha(p)}\dfrac{1-a\alpha(p)}{1-a}\,, \end{cases} \tag{1.7}$$

les fonctions $\alpha(p)$ *et* $\psi(x)$ *étant définies respectivement par*

$$\begin{cases} \alpha(p) = 4\dfrac{p-1}{p^2} \\ \psi(x) = x - 1 - \log(x)\,. \end{cases} \tag{1.8}$$

Preuve.— En appliquant le corollaire 2, puis la proposition 3, on voit que le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est, pour tout p réel, pour tout $x > 0$ et pour tout $b > 1$ dans la classe

$$Slog\left(p\,,\, bK(n,p,x)\,,\, \frac{1}{b}\{K'(p,x) + h\rho(b,p)\}\,,\, \mu\right)\,,$$

où les fonctions K et K' valent respectivement

$$\begin{cases} K(n,p,x) = \dfrac{n}{2}\dfrac{1}{x}\dfrac{p^2}{4(p-1)} \\ K'(p,x) = \dfrac{4(p-1)}{p^2}\,x\left(\log x - 1 + \dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$$

(la fonction $\rho(b,p)$ a été définie en (1.3)).

Il ne reste qu'à poser $a = 1/b$ et $z = b/x$ pour obtenir l'expression précédente. □

Un théorème de L. Gross

L'intérêt des inégalités de Sobolev logarithmiques repose sur le résultat suivant, dû à L. Gross [G] : on considère un semi-groupe d'opérateurs $\mathbf{P}_t$ agissant sur $(\mathbf{E}, \mu)$, préservant la positivité. On ne suppose pas que la mesure μ est symétrique, ni même invariante; on ne suppose pas non plus que le semi-groupe est markovien. Par contre, pour simplifier, on suppose que μ est une mesure bornée.

PROPOSITION 1.5. — *On suppose qu'il existe deux fonctions $c(p)$ et $m(p)$, suffisamment régulières, telles que, pour tout p dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mathbf{P}_t$ soit dans la classe $Slog\big(p, c(p), m(p), \mu\big)$. Comme plus haut, on supposera que $(p-1)c(p)$ est positif. Considérons les fonctions $p(t)$, à valeurs dans I et $\hat{m}(t)$ à valeurs réelles solutions du système*

$$\begin{cases} c(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p^2 & p(0) = p_0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{m}}{\mathrm{d}t} = m\big(p(t)\big) & \hat{m}(0) = 0\,. \end{cases} \tag{1.9}$$

Soit alors une fonction f dans l'algèbre $\mathcal{A}$, majorée et minorée par des constantes positives. Posons $f(t) = \mathbf{P}_t(f)$, on a :

$$\left\langle f(t)^{p(t)} \right\rangle^{1/p(t)} \leq \left\langle f^{p_0} \right\rangle^{1/p_0} \mathrm{e}^{\hat{m}(t)}\,, \quad \text{si } p_0 \geq 1, \tag{1.10}$$

et

$$\left\langle f(t)^{p(t)} \right\rangle^{1/p(t)} \geq \left\langle f^{p_0} \right\rangle^{1/p_0} \mathrm{e}^{\hat{m}(t)}\,, \quad \begin{cases} \textit{si } 0 < p(t) < p_0 \leq 1 \\ \textit{ou si } p(t) < 0\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

De plus, si la mesure μ est une mesure de probabilité, alors l'inégalité (1.11) reste valable dans le cas où $p(t) \leq 0 \leq p_0 \leq 1$.

Preuve. — Remarquons tout d'abord que, puisque par hypothèse la fonction $c(p)$ est du signe de $p-1$, si $p(t)$ est une solution du système, le signe de $p(t)-1$ reste constant : $p(t)$ est une fonction croissante de t si $p_0 > 1$ et une fonction décroissante de t si $p_0 < 1$. Tout revient donc à prouver que la fonction

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\hat{m}(t)} \left\langle f(t)^{p(t)} \right\rangle^{1/p(t)}$$

est décroissante pour $p_0 > 1$ et croissante si $p_0 < 1$. La seule difficulté peut provenir du cas $p = 0$, car alors $p \to \langle f^p \rangle^{1/p}$ n'est pas continue en

$p = 0$, sauf si la mesure μ est une mesure de probabilité, auquel cas elle y est continue.

Pour alléger les notations, nous écrivons $\tilde{f}$ au lieu de $f(t)$. En utilisant le fait que ${}^{\mathrm{d}\tilde{f}}/_{\mathrm{d}t} = \mathbf{L}(\tilde{f})$, un petit calcul montre que

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{U(t)}{\langle f^p \rangle} \frac{p'}{p^2} H(\tilde{f}),$$

où

$$H(\tilde{f}) = \langle \tilde{f}^p \log \tilde{f}^p \rangle - \langle \tilde{f}^p \rangle \log \langle \tilde{f}^p \rangle - \frac{p^2}{p'} \left\{ -\langle \tilde{f}^{p-1}, \mathbf{L}\tilde{f} \rangle + \hat{m}' \langle \tilde{f}^p \rangle \right\} .$$

Compte tenu de l'inégalité de Sobolev logarithmique et des relations satisfaites par $p(t)$ et $\hat{m}(t)$, l'expression $H(\tilde{f})$ est négative, et il n'y a plus pour conclure qu'à remarquer que p' est du signe de $c(p)$, donc de $p_0 - 1$. □

Supposons que l'inégalité de Sobolev logarithmique soit satisfaite avec des fonctions $c(p)$ et $m(p)$ définies sur $]1, \infty[$ et telles que $c(p) > 0$. Si le système (1.9) admet une solution définie sur $[0, t_0]$, et vérifiant $p(0) = 1$, $p(t_0) = \infty$ et $\hat{m}(t_0) < \infty$, alors, nous obtenons

$$\left\| \mathbf{P}_{t_0}(f) \right\|_\infty \leq \mathrm{e}^{\hat{m}(t_0)} \left\| f \right\|_1 .$$

Autrement dit, l'opérateur $\mathbf{P}_{t_0}$ est un opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans $L^\infty(\mu)$. Dans ce cas, si l'on sait que $\mathbf{P}_{t_0}$ est un opérateur à densité par rapport à μ, i.e.

$$\mathbf{P}_{t_0}(f)(x) = \int_{\mathbf{E}} p_{t_0}(x, y) f(y)\, \mu(\mathrm{d}y),$$

nous en déduisons que la densité est bornée, c'est-à-dire, plus précisément,

$$\left| p_{t_0}(x, y) \right| \leq \mathrm{e}^{\hat{m}(t_0)} .$$

De même, supposons que la mesure μ soit une probabilité : si les fonctions $c(p)$ et $m(p)$ sont définies sur $]-\infty, 1[$, $c(p) < 0$, et si le système (1.9) admet une solution définie sur $[0, t_0]$ vérifiant $p(0) = 1$, $p(t_0) = -\infty$, et $\hat{m}(t_0) > -\infty$, nous obtenons

$$\operatorname{essinf}_x \left\{ \mathbf{P}_{t_0}(f)(x) \right\} = \left\| \mathbf{P}_{t_0}(f) \right\|_{-\infty} \geq \mathrm{e}^{\hat{m}(t_0)} \left\| f \right\|_1 .$$

Comme plus haut, si l'on sait que $\mathbf{P}_{t_0}$ est un opérateur à densité par rapport à μ, nous en déduisons une minoration de la densité :

$$\left|p_{t_0}(x,y)\right| \geq \mathrm{e}^{\hat{m}(t_0)} .$$

Or, comme nous l'avons vu, lorsque $p(t)$ et $\tilde{m}(t)$ sont solutions du système (1.9), p est une fonction monotone de t, et nous pouvons donc prendre p comme paramètre. Lorsque $p > 1$ et $c(p) > 0$, on obtient donc une majoration $\hat{m}(t_0)$ de $\log p_{t_0}(x,y)$ en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} t_0 = \displaystyle\int_1^{\infty} c(p)\,\frac{\mathrm{d}p}{p^2} \\ \hat{m}(t_0) = \displaystyle\int_1^{\infty} m(p)c(p)\,\frac{\mathrm{d}p}{p^2} . \end{cases} \tag{1.12}$$

De même, lorque $p < 1$ et que la fonction $c(p)$ est négative, on obtient une minoration $\hat{m}(t_0)$ de $\log \mathbf{p}_{t_0}(x,y)$ en résolvant le système

$$\begin{cases} t_0 = -\displaystyle\int_{-\infty}^{1} c(p)\,\frac{\mathrm{d}p}{p^2} \\ \hat{m}(t_0) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{1} m(p)c(p)\,\frac{\mathrm{d}p}{p^2} . \end{cases} \tag{1.13}$$

Or, d'après ce qu'on a vu plus haut, si le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ vérifie une inégalité de Sobolev faible, les semi-groupes $\mathbf{P}_t^{\varphi}$ sont dans la classe $Slog\big(p, c(n,z,p), m(z,a,h,p), \mu\big)$, où les fonctions $c(n,z,p)$ et $m(z,a,h,p)$ sont données par (1.7). Remarquons que la fonction $c(\varepsilon,z,p)$ est du signe de $p-1$ dans le domaine qui nous intéresse. Nous obtenons donc :

PROPOSITION 1.6.— *Supposons que le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ satisfasse à une inégalité de Sobolev faible de dimension n et de constantes $c_1 = c_2 = 1$, et soit h un majorant de $\Gamma(\varphi,\varphi)$.*
On pose $\alpha(p) = 4(p-1)/p^2$ et $\psi(x) = x - 1 - \log x$.
Étant données deux fonctions $z(p) > 0$ et $a(p)$, $0 < a < 1$, définissons les quantités t et $\hat{m}(t)$ par le sytème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{n}t = T = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{z}{\alpha}\,\frac{\mathrm{d}p}{p^2} \\ \dfrac{2}{n}\hat{m}(t) = M(t) = \displaystyle\int_1^{\infty} \left\{\psi(az) + \frac{hz}{\alpha^2}\,\frac{1-\alpha a}{1-a}\right\}\frac{\mathrm{d}p}{p^2} . \end{cases} \tag{1.14}$$

Alors le semi-groupe $\mathbf{P}_t^\varphi$ *a une densité* $\mathbf{p}_t^\varphi(x,y)$ *par rapport à la mesure* μ *majorée par* $e^{\hat{m}(t)}$(*).

Pour obtenir des majorations de $\mathbf{P}_t^\varphi$, on est donc ramené à optimiser le système (1.14). De même, dans le cas où μ est une mesure de probabilité, la proposition suivante décrit le problème à optimiser pour obtenir des minorations de la densité du semi-groupe $\mathbf{P}_t^\varphi$.

PROPOSITION 1.7. — *Supposons que le semi-groupe* $\mathbf{P}_t$ *satisfasse à une inégalité de Sobolev faible de dimension* n *et de constantes* $c_1 = c_2 = 1$ *(nous sommes alors dans le cas où la constante* c_1 *est optimale). Comme plus haut, on appelle* h *un majorant de* $\Gamma(\varphi,\varphi)$ *et on pose* $\alpha(p) = 4(1-p)/p^2$, $\psi(x) = x - 1 - \log x$. *Étant données deux fonctions* $z(p) > 0$ *et* $a(p)$, $0 < a < 1$, *définissons les quantités* t *et* $\hat{m}(t)$ *par le sytème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{2}{n}t = T = \displaystyle\int_1^\infty \frac{z}{\alpha}\frac{\mathrm{d}p}{p^2} \\ -\dfrac{2}{n}\hat{m}(t) = M(t) = \displaystyle\int_1^\infty \left\{\psi(az) + \frac{hz}{\alpha^2}\frac{1-\alpha a}{1-a}\right\}\frac{\mathrm{d}p}{p^2}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Alors, la densité $\mathbf{p}_t^\varphi(x,y)$ *du semi-groupe* $\mathbf{P}_t^\varphi$ *est minorée par* $e^{\hat{m}(t)}$(**).

On est donc amené à chercher deux fonctions $a(p)$ et $z(p)$ qui maximisent $\hat{m}(t)$ dans le système

$$\begin{cases} \dfrac{2}{n}t = T = \displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{z}{\alpha}\frac{\mathrm{d}p}{p^2} \\ -\dfrac{2}{n}\hat{m}(t) = M(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^1 \left\{\psi(az) + \frac{hz}{\alpha^2}\frac{1+\alpha a}{1-a}\right\}\frac{\mathrm{d}p}{p^2}, \end{cases} \tag{1.16}$$

où, cette fois-ci, l'on a posé $\alpha(p) = 4(1-p)/p^2$ ($\psi(x)$ est la même fonction que dans la proposition précédente) La quantité $e^{\hat{m}(t)}$ est alors un minorant de la densité du semi-groupe $\mathbf{p}_t^\varphi$ par rapport à la mesure μ.

(*) Lorsque $\varphi = 1$, cette proposition est encore valable dans les deux cas suivants : lorsque la mesure μ est invariante et que le semi-groupe est un semi-groupe de diffusion, et lorsque l'hypothèse de diffusion est supprimée mais que la mesure est symétrique. Ceci est une conséquence directe des remarques faites plus haut sur les différentes formules de changement de variables.

(**) Contrairement à ce qui se passe pour les majorations de la proposition précédente, ce résultat n'est plus valable dans le cas où l'hypothèse de diffusion est supprimée. Par contre, et toujours dans le cas $\varphi = 1$, elle reste valable dans le cas où la mesure μ est seulement supposée invariante.

1.4. Inégalités de Sobolev et hypercontractivité du semi-groupe logarithme

La proposition précédente met en évidence le rôle particulier joué par le cas où on a une inégalité de Sobolev avec une constante c_1 optimale. Prenons le cas où μ est une probabilité ($c_1 = 1$) : dans l'inégalité de Sobolev faible, si l'on fait $\mathbf{E}(f,f) = 0$, nous obtenons alors $\langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \langle f^2 \rangle \log \langle f^2 \rangle$, ce qui ne peut être réalisé que lorsque f est constante. On voit donc que cette hypothèse implique une forme d'ergodicité du semi-groupe, et ceci explique pourquoi dans ce cas, nous pouvons obtenir des minorations uniformes sur la densité. La remarque qui suit, sans grand intérêt pratique a priori, éclaire un autre aspect du rôle particulier joué par cette hypothèse.

À l'aide du semi-groupe $\mathbf{P}_t$, nous pouvons construire de nouveaux opérateurs markoviens (symétriques si $\mathbf{P}_t$ lui même l'est) de la façon suivante : considérons les semi-groupes stables d'ordre $\alpha < 1$ sur $\mathcal{R}_+$, $\mu_t^\alpha(ds)$, définis par leur transformée le Laplace de la façon suivante :

$$\forall \lambda > 0, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mu_t^\alpha(\mathrm{d}s) = e^{-\lambda^\alpha t}.$$

Ces semi-groupes sont des semi-groupes de convolution de mesures de probabilité, et on peut donc s'intéresser, pour $c > 0$, aux opérateurs markoviens

$$\mathbf{Q}_t^{\alpha,c} = \int_0^\infty e^{c^\alpha t - cs} \mathbf{P}_s \, \mu_t^\alpha(\mathrm{d}s).$$

Si le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est symétrique, on voit immédiatement sur la décomposition spectrale que

$$\mathbf{Q}_t^{\alpha,c} = \exp\{t(c^\alpha - (c\mathbf{I} - \mathbf{L})^\alpha)\}.$$

En prenant le c^α potentiel de ce semi-groupe, nous voyons que l'opérateur $V_\alpha^c = c^\alpha(c\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-\alpha}$ est un opérateur markovien symétrique pour tout $c > 0$ et tout α de l'intervalle $]0, 1[$. Fixons $c > 0$ et faisons varier α : on a $V_\alpha^c \circ V_\beta^c = V_{\alpha+\beta}^c$. Ces opérateurs forment donc un semi-groupe, et leur propriété d'être markoviens symétriques se prolonge donc à tout $\alpha > 0$. Le semi-groupe $\alpha \to V_\alpha^c$ a comme générateur l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}^c = \log(c\mathbf{I} - (c\mathbf{I} - \mathbf{L}))$.

Le fait que $\mathbf{P}_t$ satisfasse à une inégalité de Sobolev $S(\varepsilon, c_1, c_2)$ peut s'interprêter de la façon suivante : pour $c = c_1/c_2$ et $\alpha = 1/2$, l'opérateur V_α^c est borné de $L^2(\mu)$ dans $L^{2+\varepsilon}(\mu)$, avec une norme $c_1^{1/2}$. Supposons pour simplifier que la mesure μ soit une mesure de probabilité. On sait qu'alors le semi-groupe $\alpha \to V^c_\alpha$ tout entier est hypercontractif. Une petite application du théorème d'interpolation complexe de Stein montre que son générateur $\hat{\mathbf{L}}^c$ satisfait à une inégalité de Sobolev logarithmique

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \langle f^2 \rangle \log\langle f^2 \rangle + nc\left\{-\langle f, \hat{\mathbf{L}}^c f\rangle + m\langle f^2 \rangle\right\} ,$$

avec $m = \frac{1}{2c}\log(c_1)$. Le cas $c_1 = 1$ correspond au cas où cette inégalité de Sobolev logarithmique se trouve réalisée avec $m = 0$. Dans ce cas, pour tout $\alpha > 0$, le semi-groupe $\alpha \to V^c_\alpha$ est une contraction de $L^2(\mu)$ dans $L^{p(\alpha)}(\mu)$, avec $p(\alpha) = 1 + e^{4t/(nc_1)}$. Le cas $c_1 > 1$ correspond au cas où $\alpha \to V^c_\alpha$ est un opérateur borné de $L^2(\mu)$ dans $L^{p(\alpha)}(\mu)$ avec une norme qui croît exponentiellement avec α.

1.5. Existence d'une inégalité de Sobolev faible avec c_1 optimale sur une variété riemannienne compacte

Nous allons montrer dans ce paragraphe un résultat valable dans un cadre un peu plus général que celui des variétés compactes. Nous supposons que le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est symétrique par rapport à une mesure invariante finie μ, qu'on peut donc supposer être une mesure de probabilité. Nous dirons que $\mathbf{P}_t$ présente un trou dans son spectre s'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, pour toute fonction f de $L^2(\mu)$ de moyenne nulle, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\langle f^2 \rangle \leq \lambda \mathbf{E}(f,f) . \tag{1.17}$$

C'est en particulier le cas pour le semi-groupe de la chaleur sur une variété riemannienne compacte. On appellera cette constante λ le trou spectral de $\mathbf{L}$: c'est l'inverse de sa première valeur propre non nulle.

PROPOSITION 1.8.— *Si le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est de la classe $Sf(n, c_1, c_2)$ et s'il présente un trou dans son spectre, alors il existe une constante c pour lequel il est de la classe $Sf(n, 1, c)$.*

Preuve.— Pour y voir plus clair, supposons que la forme de Dirichlet associée à $\mathbf{P}_t$ satisfasse à une inégalité du type

$$\forall f \in L^2(\mu), \quad \langle f^2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \varphi(\mathbf{E}(f,f)) , \tag{1.18}$$

où φ est une fonction positive, concave et de classe $\mathcal{C}^2$. Soit λ le trou spectral de $\mathbf{L}$: appelons $\psi(x)$ la fonction $\varphi(x) - \varphi(0) + \lambda(\varphi(0) + 2)x$ et soit $\chi(x) = \inf(\psi(x), \varphi(x))$. Alors, la forme de Dirichlet $\mathbf{E}$ satisfait à une inégalité du type

$$\forall f \in L^2(\mu), \quad \langle f^2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \le \chi(\mathbf{E}(f,f)). \tag{1.19}$$

Remarquons tout d'abord que l'inégalité précédente est suffisante pour nos besoins : il suffit de voir que, lorsque $\varphi(x) = \frac{n}{2}\log(c_1 + c_2 x)$, avec $c_1 > 1$, la fonction $\chi(x)$ est majorée par $\inf(\alpha x, \varphi(x))$, où α est une constante positive. Ensuite, il ne reste plus qu'à remarquer qu'il existe toujours une constante c telle que, pour tout $x > 0$,

$$\log(1 + cx) \ge \inf\left(\frac{2\alpha}{n}x, \log(c_1 + c_2 x)\right),$$

ce qui est obtenu pour $1 + cx_0 = c_1 + c_2 x_0$, la constante x_0 étant solution de $\frac{2\alpha}{n}x_0 = \log(c_1 + c_2 x_0)$. Il ne nous reste plus qu'à prouver (1.19), qui, compte tenu de (1.18), se ramène à

$$\forall f \in L^2(\mu), \quad \langle f^2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \le \psi(\mathbf{E}(f,f)). \tag{1.20}$$

Soit f une fonction de $L^2(\mu)$ telle que $\langle f^2 \rangle = 1$, et posons $\hat{f} = f - \langle f \rangle$. Puisque φ et ψ sont concaves, les inégalités (1.18) et (1.20) sont respectivement équivalentes à

$$\forall x > 0, \quad \langle f^2 \log f^2 \rangle \le \varphi'(x)\mathbf{E}(f,f) + (\varphi(x) - x\varphi'(x)) \tag{1.21}$$

et

$$\forall x > 0, \quad \langle f^2 \log f^2 \rangle \le \psi'(x)\mathbf{E}(f,f) + (\psi(x) - x\psi'(x)). \tag{1.22}$$

Utilisons alors l'inégalité suivante, due à [DSt], p. 246 :

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle \le \langle \hat{f}^2 \log \hat{f}^2 \rangle + 2\langle \hat{f}^2 \rangle,$$

ainsi que la propriété de trou spectral. Il vient

$$\begin{aligned}
\langle f^2 \log f^2 \rangle &\le \varphi'(x)\mathbf{E}(\hat{f},\hat{f}) + (\varphi(x) - x\varphi'(x) + 2)\langle \hat{f}^2 \rangle \\
&\le (\varphi'(x) + \lambda(\varphi(0) + 2)\mathbf{E}(\hat{f},\hat{f}) + (\varphi(x) - x\varphi'(x) - \varphi(0))\langle \hat{f}^2 \rangle \\
&= \psi'(x)\mathbf{E}(f,f) + (\psi(x) - x\psi'(x))\langle \hat{f}^2 \rangle \\
&\le \psi'(x)\mathbf{E}(f,f) + (\psi(x) - x\psi'(x)),
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de ce que la mesure μ est une probabilité (et donc $\langle \hat{f}^2 \rangle \leq \langle f^2 \rangle = 1$) et de ce que $\varphi(x) - x\varphi'(x) - \varphi(0) = \psi(x) - x\psi'(x) \geq 0$. □

Remarques

1) Lorsque le semi-groupe satisfait à une inégalité se Sobolev faible $Sf(n, 1, c_2)$, alors il satisfait à l'inégalité de Sobolev logarithmique

$$\forall f \in L^2(\mu), \quad \langle f^2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2} c_2 \mathbf{E}(f, f).$$

   Dans ce cas, il est bien connu qu'il admet un trou spectral $\lambda \leq \frac{n}{8} c_2$. Si, partant d'une inégalité $Sf(n, 1, c_2)$, on applique cette remarque puis la proposition précédente, on obtient une nouvelle inégalité $Sf(n, 1, c_2')$, et on voit que l'on perd sur la constante c_2 : cela nous conduit à penser que notre méthode pour obtenir l'inégalité avec $c_1 = 1$ n'est certainement pas optimale.

2) Nous verrons plus bas que si le semi-groupe satisfait à une inégalité de Sobolev faible, $\mathbf{P}_t$ est pour tout t un opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans $L^\infty(\mu)$. En particulier, dans $L^2(\mu)$, c'est un opérateur à trace, et il a donc un spectre discret. La propriété de trou spectral se ramène alors au fait que les seules fonctions de $L^2(\mu)$ invariantes par $\mathbf{P}_t$ sont les fonctions constantes, ou encore que $\mathbf{E}(f, f) = 0 \Rightarrow f = \text{cste}$.

2. Minorations sur le semi-groupe

Dans cette section, nous supposons que la mesure μ est une probabilité, et le semi-groupe est un semi-groupe de diffusion symétrique, satisfaisant à une inégalité de Sobolev faible, de dimension n, avec c_1 optimale. Pour plus de simplicité, nous nous ramenons également au cas où $c_2 = 1$. Au paragraphe suivant, nous verrons que, dans ces conditions, le semi-groupe a une densité bornée par rapport à μ, et, pour obtenir des minorations de cette densité, nous sommes amenés à résoudre le problème (1.15) de la section précédente. Notons que, comme nous l'avons remarqué plus haut, dans le cas où $h = 0$, c'est-à-dire où la fonction du changement de jauge φ est constante, l'hypothèse de symétrie du semi-groupe est superflue, et le calcul marcherait de la même façon en mesure invariante.

Rappelons le problème de variation qu'on doit résoudre : on a posé $\psi(x) = x - 1 - \log(x)$ et $\alpha(p) = 4(1-p)/p^2$; h est une constante positive qui variera dans la suite. On pose $T = 2t/n$ et $M = -2m/n$. On cherche deux fonctions $z(p)$ et $a(p)$ définies sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, telles que $z > 0$ et $0 < a < 1$ qui, à T fixé, minimisent M dans le système suivant(*) :

$$\begin{cases} T = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{z(p)}{p^2\alpha(p)}\, \mathrm{d}p \\ M = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} \left\{ \psi\big(a(p)z(p)\big) + \frac{hz(p)}{\alpha(p)} \frac{1 + a(p)\alpha(p)}{(1-a(p))\alpha(p)} \right\} \frac{1}{p^2}\, \mathrm{d}p\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Tout d'abord, nous commençons par une remarque : la fonction $\alpha(p)$ est invariante si on remplace p par $\hat{p} = p/(p-1)$. Cette transformation échange les intervalles $[0, 1[$ et $]-\infty, 0]$. De même, dans cette transformation, la mesure ${}^{\mathrm{d}p}/_{p^2}$ est préservée. Supposons donc que l'on résolve le problème de variation

$$\begin{cases} T' = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{z(p)}{p^2\alpha(p)}\, \mathrm{d}p \\ M' = \displaystyle\int_{0}^{1} \left\{ \psi\big(a(p)z(p)\big) + \frac{hz(p)}{\alpha(p)} \frac{1 + a(p)\alpha(p)}{(1-a(p))\alpha(p)} \right\} \frac{1}{p^2}\, \mathrm{d}p\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Soit $M'(T')$ la valeur ainsi obtenue pour le problème optimal sur l'intervalle restreint, et $M(T)$ la valeur optimale sur l'intervalle complet $]-\infty, 1[$. En utilisant la transformation $p \to \hat{p}$, il est facile de voir que

$$M(T) = \sup_{T=T_1+T_2} \left\{ M'(T_1) + M'(T_2) \right\}\,.$$

Or, on va le voir plus bas lorsqu'on va la calculer, la fonction $M'(T)$ est analytique et convexe dans l'intervalle $T \in]0, \infty[$. Un optimum est atteint lorsque

$$\frac{\partial M'}{\partial T}(T_1) = \frac{\partial M'}{\partial T}(T - T_1)\,,$$

ce qui se produit en particulier pour $T_1 = T - T_1$, et uniquement en ce point par convexité. On a donc $M(T) = 2M'(T/2)$, et on est ramené à étudier le problème (2.2) à la place du problème (2.1).

(*) En toute logique, on n'a pas besoin de calculer le minimum, mais seulement d'exhiber des fonctions qui donnent à $M(T)$ une valeur convenable. D'ailleurs, nous ne sommes pas certains d'obtenir effectivement le minimum dans ce problème.

Maintenant, sur l'intervalle $]0,1[$, la fonction $\alpha(p)$ est monotone décroissante; on peut donc tout exprimer en fonction de α : α varie de 0 à l'infini et

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \frac{-\mathrm{d}\alpha}{4\sqrt{1+\alpha}}.$$

Il vient

$$\begin{cases} 4T' = 2T = \displaystyle\int_0^\infty z(\alpha)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}} \\ 4M' = 2M = \displaystyle\int_0^\infty \Psi\big(z(\alpha), a(\alpha), \alpha\big)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}}, \end{cases} \tag{2.3}$$

la fonction $\Psi(z,a,\alpha)$ étant égale à $\alpha\psi(az) + hz\dfrac{1+a\alpha}{\alpha(1-a)}$.

Pour les fonctions a et z réalisant le maximum, on doit avoir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = \text{constante} = -\tau \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\psi'(az) + h\dfrac{1+\alpha}{\alpha(1-a)^2} = 0 \\ \alpha a\psi'(az) + h\dfrac{1+a\alpha}{\alpha(1-a)} = -\tau. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ce système se ramène au système suivant

$$\begin{cases} \alpha\psi'(az) + h\dfrac{1+\alpha}{\alpha(1-a)^2} = 0 & (2.5) \\ \dfrac{1+a\alpha}{\alpha(1-a)} - \dfrac{a(1+\alpha)}{\alpha(1-a)^2} = -\dfrac{\tau}{h} & (2.6) \end{cases}$$

L'équation (2.6) ci-dessus nous donne la relation entre a et α :

$$\alpha = \frac{2a-1}{\frac{\tau}{h}(1-a)^2 - a^2}. \tag{2.7}$$

Nous y verrons plus clair si nous posons $y = a/(1-a)$ et $\lambda = \tau/h$: dans ce cas, on a $1+\alpha = (\lambda-1)/(\lambda-y^2)$. Puisque α varie de 0 à l'infini, on voit qu'il faut se restreindre au cas où λ est positif (sinon, α est une fonction bornée de a), et, dans la suite, nous poserons

$$\lambda = \frac{\tau}{h} = \nu^2, \tag{2.8}$$

avec $\nu > 0$. De plus, α, comme fonction de a, varie de façon monotone lorsque a est entre 0 et 1, et donc a est une fonction monotone de α.

Maintenant, la fonction a étant fixée, z se calcule à partir de l'équation (2.6). Nous savons que $\psi'(x) = 1 - {}^1/_x$. Donc,

$$1 - \frac{1}{az} = -\frac{h}{\alpha^2}\,\frac{1+\alpha}{(1-a)^2}\,. \tag{2.9}$$

Finalement, pour toute valeur de positive de τ, nous pouvons exhiber deux fonctions $a(\alpha,\tau,h)$ et $z(\alpha,\tau,h)$ qui satisfont au système (2.4). Ceci nous donne une paramétrisation de la courbe $M'(T')$ sous la forme $\tau \to (T'(\tau,h), M,(\tau,h))$ (ici h est une constante fixée et τ varie dans $]0,\infty[$). Pour cette paramétrisation, on a

$$4\frac{\partial T'}{\partial\tau} = \int_0^\infty \frac{\partial z}{\partial\tau}(\alpha,\tau,h)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}}$$

et
$$4\frac{\partial M'}{\partial\tau} = \int_0^\infty \frac{\partial\Psi}{\partial z}(z,a,\alpha)\frac{\partial z}{\partial\tau}(\alpha,\tau,h)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}}\,.$$

On a utilisé ici le fait que ${}^{\partial\Psi}/_{\partial a} = 0$. Les dérivations sous le signe somme seront justifiées plus bas, lorsque nous ferons les calculs explicites des fonctions a et z. Puis nous écrivons que ${}^{\partial\Psi}/_{\partial z} = -\tau$ de manière à obtenir

$$\frac{\partial M'}{\partial\tau} = -\tau\frac{\partial T'}{\partial\tau}\,.$$

On voit donc que pour calculer les fonctions M' et T', il suffit de calculer l'une d'entre elles pour tout τ et l'autre pour une valeur particulière de τ.

2.1. Calcul de la fonction $T(\tau,h)$

LEMME 2.1.— *Soit $F(x)$ la fonction définie pour $x>0$ par*

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{\operatorname{argth}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} & \textit{pour } 0<x<1 \\[2ex] F(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} & \textit{pour } x>1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Alors $T(\tau,h) = F(\tau)$, pour $\tau > 0$.

Remarque.— La fonction $F(x)$ est analytique dans les domaines $0<x<1$ et $1<x$. Au voisinage de $x=1$, elle se développe en série entière :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{2n+1}\,.$$

C'est donc bien une fonction analytique sur tout l'axe réel. C'est une fonction décroissante de x (cela provient du fait que la fonction $arctg(x)/x$ est décroissante et que la fonction $argth(x)/x$ est croissante). Ceci permet de justifier l'affirmation que nous avons faite plus haut que la fonction $M'(T)$ est convexe : en effet, on a :

$$\frac{\partial M'}{\partial T'} = -\tau \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tau}{\partial T'} < 0 .$$

Preuve. — Comme nous l'avons fait plus haut, nous posons $\tau = \nu^2 h$. Nous écrirons alors $T(\nu, h)$ pour $T(-\nu^2 h, h)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

On peut alors poser $\alpha = {(y^2-1)}/{(\nu^2 - y^2)}$, où y est une variable qui varie de $\inf\{\nu, 1\}$ à $\sup\{\nu, 1\}$. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}} = \sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-y^2}}\,\frac{2y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y .$$

L'équation (2.7) est satisfaite pour $a = {y}/{(y+1)}$, et l'équation (2.9) nous donne

$$z = \frac{(y+1)(y-1)^2}{y[(y-1)^2 + h(\nu^2-1)(\nu^2-y^2)]} . \tag{2.11}$$

On obtient finalement, lorsque $\nu > 1$,

$$T(\nu, h) = \int_1^{\nu} \sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-y^2}}\,\frac{y-1}{(y-1)^2 + h(\nu^2-1)(\nu^2-y^2)}\,\mathrm{d}y , \tag{2.12}$$

et, lorsque $0 < \nu < 1$,

$$T(\nu, h) = \int_{\nu}^{1} \sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-y^2}}\,\frac{1-y}{(y-1)^2 + h(\nu^2-1)(\nu^2-y^2)}\,\mathrm{d}y . \tag{2.13}$$

Remarquons que le changement de variables $y \to 1/y$ dans l'intégrale (2.12) transforme $T(\nu, h)$ en $T(1/\nu, h\nu^4)$. Pour cette raison, nous nous bornerons dans la suite à étudier le cas $\nu > 1$.

Enfin, pour calculer l'intégrale (2.12), on pose $y = \nu(t^2-1)/(t^2+1)$. La variable t varie alors de $\sqrt{\gamma} = \sqrt{1 + {\nu}/{\nu - 1}}$ à l'infini, et on a

$$\sqrt{\nu^2 - y^2} = \frac{2t\nu}{t^2+1} \quad ; \quad y - 1 = (\nu - 1)\frac{t^2-\gamma}{t^2+1} \quad ; \quad \mathrm{d}y = \frac{4\nu t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t .$$

Il vient

$$\begin{aligned} T(\nu, h) &= 2(\nu-1)\sqrt{\nu^2-1}\int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty} \frac{t^2-\gamma}{(\nu-1)^2(t^2-\gamma)^2+4h(\nu^2-1)t^2\nu^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\sqrt{\gamma}\int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty} \frac{t^2-\gamma}{(t^2-\gamma)^2+4h\nu^2\gamma t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_{1}^{\infty} \frac{t^2-1}{(t^2-1)^2+4h\nu^2 t^2}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Remarquons au passage que, grâce à (2.8), cette expression de la fonction $T(\tau, h)$ montre que la dérivation sous le signe somme que nous avons effectuée plus haut est parfaitement justifiée.

Une primitive de la fonction $(t^2-1)/[(t^2-1)^2+4\lambda t^2]$ est

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{\lambda-1}}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{\lambda-1}\,\dfrac{u}{1+u^2}\right) & \text{si } \lambda > 1 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{1-\lambda}}\operatorname{argth}\left(2\sqrt{1-\lambda}\,\dfrac{u}{1+u^2}\right) & \text{si } \lambda < 1. \end{cases}$$

Ceci nous donne le résultat annoncé lorsque $\nu > 1$. Maintenant, puisque notre expression ne dépend que de $\nu^2 h = \tau$, il est clair qu'elle demeure inchangée lorsqu'on remplace ν par $1/\nu$. □

Avant de nous restreindre au cas $\tau = 1$, nous allons donner une expression générale de $M(\tau, h)$ de façon à justifier la dérivation sous le signe somme que nous avons effectuée plus haut. Rappelons que

$$2M = \int_0^{\infty} \left[\alpha\psi(az) + hz\frac{1+a\alpha}{(1-a)\alpha}\right] \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}}$$

et que

$$h\frac{1+a\alpha}{(1-a)\alpha} = -\tau - a\alpha\psi'(az)\,.$$

On en tire

$$\begin{aligned} 2M &= \int_0^{\infty} \left\{\alpha\psi(az) - z\left[\tau + a\alpha\psi'(az)\right]\right\} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1+\alpha}} \\ &= -2\tau T + \int_0^{\infty} \left[\psi(az) - az\psi'(az)\right] \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\,. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition de la fonction $\psi(x)$, on a $\psi(x) - x\psi'(x) = -\log(x)$, et donc $2(M+\tau T) = \int_0^{\infty} -\log(az)\,(\mathrm{d}\alpha)/(\sqrt{1+\alpha})$.

Comme plus haut, nous posons $\tau = \nu^2 h$, ainsi que :

$$\alpha = \frac{y^2-1}{\nu^2-y^2}, \quad a = \frac{y}{y+1}, \quad z = \frac{(y+1)(y-1)^2}{y[(y-1)^2 + h(\nu^2-1)(\nu^2-y^2)]}.$$

En fonction de α, on a $y = \sqrt{1+\alpha\nu^2}/\sqrt{1+\alpha}$, et donc, en posant $\hat\tau = \nu^2 = \tau/h$, il vient

$$2(M+\tau T) = \int_0^\infty G(\hat\tau,\alpha)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}$$

avec

$$G(\hat\tau,\alpha) = \log\left(1 + \frac{h(\hat\tau-1)^2}{(\sqrt{1+\hat\tau\alpha}-\sqrt{1+\alpha})^2}\right)$$

(lorsque $\hat\tau = 1$, il convient de prolonger par continuité la définition de G en posant $G(1,\alpha) = \log(1+4h/\alpha^2)$).

Pour justifier la dérivation sous le signe somme que nous avons faite plus haut, il nous faut calculer la dérivée de G : on a $\partial G/\partial\hat\tau = K/K_1$, avec

$$K_1 = 1 + \frac{h(\hat\tau-1)^2}{(\sqrt{1+\hat\tau\alpha}-\sqrt{1+\alpha})^2}$$

et

$$K = \frac{2h(\hat\tau-1)\big(\sqrt{1+\hat\tau\alpha}-\sqrt{1+\alpha}\big) - h(\hat\tau-1)^2\frac{\alpha}{\sqrt{1+\hat\tau\alpha}}}{\big(\sqrt{1+\hat\tau\alpha}-\sqrt{1+\alpha}\,\big)^3}.$$

Un instant de réflexion montre que, lorsque $\hat\tau$ reste dans un compact de $]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$, la fonction K/K_1 est uniformément majorée par $c/(1+\alpha)$, et le seul problème pour dériver sous le signe somme peut se produire au point $\hat\tau = 1$. Dans ce cas, nous écrivons, pour $|\hat\tau - 1| < 1$:

$$\sqrt{1+\hat\tau\alpha}-\sqrt{1+\alpha} = \frac{X}{2}\,(1+\mathrm{o}(X))\,, \quad \text{où } X = \frac{\alpha(\hat\tau-1)}{2\sqrt{1+\alpha}},$$

en remarquant que la variable X reste bornée dans le domaine qui nous intéresse. De là, il vient

$$K_1^{-1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+4h(1+\alpha)}(1+\mathrm{o}(X))$$

et

$$K = \frac{8h(1+\alpha)}{\alpha^2(\hat\tau-1)}\left(\frac{X}{2}+\mathrm{o}(X)\right).$$

En regroupant les deux termes, on voit que $\partial G/\partial\hat\tau$ est uniformément majorée par une fonction intégrable pour la mesure $\dfrac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}$. □

Nous revenons maintenant au calcul de $M(\tau, h)$.

2.2. Calcul de $M(\tau, h)$ pour $\tau = 1$

LEMME 2.2.— $M(1,h) = 2\log 2 - 1 + \pi\sqrt{h}$

Preuve.— Nous posons

$$2(M + \tau T) = I(\nu, h) = \int_0^\infty -\log(az)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}$$

et nous allons tout exprimer en fonction de la variable y déjà introduite plus haut. Tout d'abord, on a

$$az(y,\nu,h) = \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2 + h(\nu^2-1)(\nu^2-y^2)},$$

et donc $az(1/y, \nu, h) = az(y, 1/\nu, h\nu^4)$. Or, $I(\nu, h)$ s'écrit

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_1^\nu \frac{2(\nu^2-1)}{(\nu^2-y^2)^2}\sqrt{\frac{\nu^2-y^2}{\nu^2-1}}\,\log(az)\,y\,\mathrm{d}y & \text{pour } \nu > 1 \\ -\displaystyle\int_\nu^1 \frac{2(1-\nu^2)}{(\nu^2-y^2)^2}\sqrt{\frac{\nu^2-y^2}{\nu^2-1}}\,\log(az)\,y\,\mathrm{d}y & \text{pour } \nu < 1\,. \end{cases}$$

On voit donc qu'un changement de variables $y \to 1/y$ dans la première intégrale transforme $I(\nu, h)$ en $\nu^{-2} I(\nu^{-1}, h\nu^4)$. On peut donc se restreindre au cas $\nu > 1$.

Au lieu de $I(\nu, h)$, considérons pour $\eta > 0$ l'intégrale

$$I(\eta, \nu, h) = \int_\eta^\infty -\log(az)\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}$$

dont nous allons calculer la limite pour $\eta \to 0$.

Nous posons

$$\eta = \frac{(1+\eta')^2 - 1}{\nu^2 - (1+\eta')^2}$$

de telle façon que y vaille $1+\eta'$ lorsque α vaut η. On a :

$$I(\eta,\nu,h) = \left[-2\sqrt{1+\alpha}\log(az)\right]_\eta^\infty + \int_\eta^\infty 2(1+\alpha)\frac{\partial az}{\partial \alpha}\frac{1}{az}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} = A_\eta + I'_\eta$$

avec

$$A_\eta = -2\sqrt{1+\eta}\log\left\{1+\frac{h(\nu^2-1)(\nu^2-(1+\eta')^2)}{\eta'^2}\right\}$$

et $$I'_\eta(\nu,h) = 2\int_{1+\eta'}^{\nu} \sqrt{1+\alpha}\,\frac{\partial az}{\partial y}\,\frac{1}{az}\,dy.$$

En remplaçant az par sa valeur en fonction de y, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I'_\eta(\nu,h) &= 4\int_{1+\eta'}^{\nu}\sqrt{\frac{\nu^2-1}{\nu^2-y^2}}\left\{\frac{dy}{y-1}-\frac{[(y-1)-h(\nu^2-1)y]\,dy}{(y-1)^2+h(\nu^2-1)(\nu^2-y^2)}\right\} \\ &= 4(I'_{1\eta}-I'_{2\eta}). \end{aligned}$$

Pour calculer $I'_{1\eta}$, on pose comme plus haut $y=\nu\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $\gamma=\dfrac{\nu+1}{\nu-1}$. On pose aussi $\dfrac{\nu+1+\eta'}{\nu-1-\eta'}=\lambda(\eta')\gamma$. Il reste :

$$I'_{1\eta} = \int_{\sqrt{\lambda(\eta')\gamma}}^{\infty} 2\sqrt{\gamma}\,\frac{dt}{t^2-\gamma} = 2\int_{\sqrt{\lambda(\eta')}}^{\infty}\frac{dt}{t^2-1} = \log\left(\frac{1+\sqrt{\lambda(\eta')}}{\sqrt{\lambda(\eta')}-1}\right).$$

Maintenant, lorsque $\eta'\to 0$, on a

$$A_\eta = -2\log(h)-4\log(\nu^2-1)+4\log(\eta')+o(\eta').$$

De même, on a $\lambda(\eta')=1+2\eta'\nu/(\nu^2-1)+o(\eta')$, d'où

$$I'_{1\eta} = \log 2-\log(\nu)+\log(\nu^2-1)-\log(\eta')+o(\eta').$$

On voit donc que

$$\lim_{\eta\to 0} A_\eta+4I'_{1\eta'} = 4\log 2-2\log(h)-4\log(\nu) = -2\log(h\nu^2).$$

Il nous reste à calculer $I'_{2\eta}$: puisque c'est une intégrale convergente, il suffit de faire le calcul pour $\eta=0$. On obtient, en faisant comme plus haut le changement de variables $y=\nu\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, et en posant $\gamma=\dfrac{\nu+1}{\nu-1}$:

$$\begin{aligned} I'_2(\nu,h) &= 2\sqrt{\nu^2-1}\int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty}\frac{(\nu-1)(t^2-\gamma)-h\nu(\nu^2-1)(t^2-1)}{(\nu-1)^2(t^2-\gamma)^2+4h(\nu^2-1)\nu^2t^2}\,dt \\ &= 2\int_1^{\infty}\frac{(u^2-1)-h\nu(\nu+1)(u^2-1/\gamma)}{(u^2-1)^2+4h\nu^2u^2}\,du. \end{aligned}$$

Lorsque l'on fait $h = 1/\nu^2$, cette expression se simplifie et on obtient

$$I_2'\left(\nu, \frac{1}{\nu^2}\right) = -\frac{2}{\nu}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = -\frac{\pi}{2\nu}\,.$$

Finalement, il nous reste $I(\nu, \nu^{-2}) = 4\log 2 + \left({}^{2\pi}/_{\nu}\right)$. Ceci nous donne le résultat pour $\nu > 1$, et, donc également pour $\nu < 1$. □

Finalement, pour calculer la fonction $M(T, h)$, il ne nous reste plus qu'à intégrer l'équation ${}^{\partial M}/_{\partial \tau} = -\tau\left({}^{\partial T}/_{\partial \tau}\right)$, $T(1) = 2\log 2 - 1 + \pi\sqrt{h}$. Nous obtenons alors :

PROPOSITION 2.3. — *Soit $G(x)$ la fonction réciproque de la fonction $F(x)$ définie en (2.10). On a*

$$M(T, h) = 2\log 2 + \pi\sqrt{h} + \big\{(G(T) - 2)T - \log G(T)\big\}\,. \tag{2.14}$$

Preuve. — Il n'y a presque rien à faire. Faisons d'abord le calcul pour $T < 1$. On écrit $T = F(\tau)$ $(\tau > 1)$, puis

$$M(\tau, h) = M(1, h) - \int_1^\tau u\frac{\partial F}{\partial u}\,\mathrm{d}u.$$

On intègre par parties, puis on fait le changement de variables $v = \sqrt{u-1}$. Il reste :

$$M(\tau, h) = M(1, h) + 2\int_0^{\sqrt{\tau-1}} \operatorname{arctg} v\,\mathrm{d}v\,.$$

Une primitive de la fonction $\operatorname{arctg}(x)$ est $x\operatorname{arctg}(x) - (1/2)\log(1+x^2)$. Ceci donne le résultat pour $T < 1$. On fait le même calcul pour $T > 1$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section. Rappelons que nous avons introduit plus haut le diamètre associé au semgroupe $\mathbf{P}_t$:

$$\operatorname{diam}(\mathbf{E}) = \sup_{\substack{\varphi\in\mathcal{A}\\ \Gamma(\varphi,\varphi)\le 1}} \sup_{x,y}\big\{\varphi(x) - \varphi(y)\big\}\,.$$

La fonction $G(x)$ désigne comme plus haut la fonction réciproque de la fonction $F(x)$ définie en (2.10). On a alors :

THÉORÈME 2.4

Soit $\mathbf{P}_t$ un semi-groupe de diffusion, symétrique par rapport à une mesure de probabilité μ et satisfaisant à une inégalité de Sobolev faible $Sf(n, 1, 1, \mu)$.

Alors, si le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ *admet une densité* $\mathbf{p}_t(x,y)$ *par rapport à* μ*, on a* $\mathrm{diam}(\mathbf{E}) \le n\pi/2$ *et*

$$\mathbf{p}_t(x,y) \ge 2^{-n} G\left(\frac{2t}{n}\right)^{n/2} \exp\left\{-t\left[G\left(\frac{2t}{n}\right)-2\right]\right\}. \tag{2.15}$$

Remarques

1) Nous verrons bientôt que lorsqu'un tel semi-groupe satisfait une inégalité de Sobolev faible, il admet une densité bornée. La dernière condition sera donc automatiquement vérifiée.

2) La minoration de $\mathbf{p}_t(x,y)$ ne fait, en fait, intervenir que l'invariance de la mesure. Par contre, la minoration sur le diamètre fait intervenir sa symétrie.

Preuve. — D'après ce que nous avons vu plus haut, si φ est une fonction sur $\mathbf{E}$ telle que $\Gamma(\varphi,\varphi) \le h$, on a, pour toute fonction f positive et minorée sur $\mathbf{E}$,

$$\left\|\mathbf{P}_t^{\varphi}(f)\right\|_{-\infty} \ge \exp\left(-\frac{n}{2}M\left(\frac{2}{n}t,h\right)\right)\|f\|_1 .$$

Or, la densité $\mathbf{p}_t^{\varphi}$du semi-groupe $\mathbf{P}_t^{\varphi}$ par rapport à μ s'exprime en fonction de celle de $\mathbf{P}_t$ par la relation

$$\mathbf{p}_t^{\varphi}(x,y) = \exp\{\varphi(y)-\varphi(x)\}\mathbf{p}_t(x,y).$$

Ceci nous donne donc la relation

$$\mathbf{p}_t(x,y) \ge \exp\left\{\varphi(x)-\varphi(y)-\frac{n}{2}M\left(\frac{2}{n}t,h\right)\right\}.$$

Tout d'abord, faisons varier dans le second membre de cette expression la fonction φ parmi les fonctions satisfaisant à $\Gamma(\varphi,\varphi) \le h$. D'après la définition même de $d(x,y)$, on a :

$$\sup_{\Gamma(\varphi,\varphi)\le h} \left(\varphi(x)-\varphi(y)\right) = h^{1/2} d(x,y).$$

Il vient alors : $\forall\, h > 0$,

$$\mathbf{p}_t(x,y) \ge \exp\left\{h^{1/2}\left(d(x,y)-\frac{n}{2}\pi\right) - t\left(G\left(\frac{2}{n}t\right)-2\right) + \frac{n}{2}\log G\left(\frac{2}{n}t\right)\right\}.$$

Comme nous l'avons signalé, nous verrons plus bas que $\mathrm{p}_t(x,y)$ est une fonction bornée : en faisant croître la constante h jusqu'à l'infini, nous déduisons de la minoration précédente l'inégalité $d(x,y) \leq \frac{n}{2}\pi$. Il nous reste ensuite, en prenant $h=0$, la minoration

$$\mathrm{p}_t(x,y) \geq 2^{-n} G\left(\frac{2}{n}t\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-t\left(G\left(\frac{2}{n}t\right)-2\right)\right\}. \square$$

Remarque. — Lorsque le semi-groupe satisfait à une inégalité de Sobolev faible avec $c_2 \neq 1$, le même résultat s'applique à condition de remplacer t par t/c_2 dans le second membre de (2.15). Le changement de temps change également la distance, et ce n'est sans doute pas inutile de reformuler notre inégalité sur le diamètre :

PROPOSITION 2.5. — *Si le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est une semi-groupe de diffusion symétrique qui satisfait une inégalité de Sobolev faible de dimension n avec $c_1 = 1$, on a*

$$c_2 \geq \frac{4\,\mathrm{diam}(\mathbf{E})^2}{n^2\pi^2}.$$

Un développement limité de la fonction $G(x)$ au voisinage de 0 nous donne

$$G(x) = \frac{\pi^2}{4x^2} - \frac{2}{x} + 1 - \frac{4}{\pi^2} + \mathrm{o}(1).$$

De même , au voisinage de l'infini, nous avons

$$G(x) = 4\,\mathrm{e}^{-2x}\big(1+\mathrm{o}(x)\big).$$

Nous obtenons donc :

COROLLAIRE 2.6. — *Toujours dans le cas $c_1 = 1$, mais en supposant seulement la mesure μ invariante pour le semi-groupe, nous obtenons, lorsque t tend vers 0,*

$$\mathrm{p}_t(x,y) \geq \left(\frac{n\pi e c_2}{8t}\right)^n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 c_2}{16t}\right)\big(1+\mathrm{o}(1)\big).$$

De même, lorsque $t \to \infty$, nous obtenons

$$\mathrm{p}_t(x,y) \geq \exp\left(-4\frac{t}{c_2}\,\mathrm{e}^{-4t/(c_2 n)}\big(1+\mathrm{o}(1)\big)\right).$$

Remarquons qu'à l'infini, $\mathbf{p}_t(x,y)$ doit converger vers 1, et donc que cette minoration pour $t \to \infty$ nous donne un ordre de grandeur de la vitesse à laquelle le semi-groupe converge vers sa mesure invariante.

3. Majorations sur le semi-groupe

Dans cette partie, nous supposerons comme plus haut que le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est un semi-groupe de diffusion symétrique qui satisfait à une inégalité de Sobolev faible : il est dans la classe $Sf(n,1,1,\mu)$. Contrairement à ce que nous venons de faire pour obtenir des minorations, nous ne supposerons pas cette fois-ci que la mesure μ est une mesure de probabilité (nous ne demandons pas à la constante c_1 d'être optimale). Néanmoins, et pour plus de commodité, nous supposerons que la mesure μ est finie.

Nous reprenons les notations introduites en (1.14). Nous posons $\alpha(p) = 4(p-1)/p^2$ et $\psi(x) = x - 1 - \log x$: le problème est de trouver le minimum de la quantité

$$\frac{2}{n}\hat{m}(t) = M(t) = \int_1^\infty \left\{ \psi(az) + \frac{hz}{\alpha^2}\,\frac{1-\alpha a}{1-a} \right\} \frac{\mathrm{d}p}{p^2}$$

lorsque $$\frac{2}{n}t = T = \int_1^\infty \frac{z}{\alpha}\,\frac{\mathrm{d}p}{p^2} \text{ est fixée.}$$

Appelons $\mathbf{M}(T,h)$ ce minimum.

Il n'y a pas grand chose à changer par rapport aux calculs faits dans le chapitre précédent. Le problème revient comme plus haut à résoudre séparément les problèmes d'optimisation sur les intervalles $[1,2]$ et $[2,\infty[$, sur lesquels les calculs sont identiques. On peut alors tout exprimer en fonction de la variable $\alpha(p)$ qui est monotone sur chacun de ces intervalles et on se ramène à

$$\begin{cases} 2T = \displaystyle\int_0^1 z(\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha}} \\ 2M = \displaystyle\int_0^1 \Psi\big(z(\alpha), a(\alpha), \alpha\big)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha}}. \end{cases} \tag{3.1}$$

On a posé cette fois-ci $\Psi(z,a,\alpha) = \alpha\psi(az) + hz\dfrac{1-a\alpha}{\alpha(1-a)}$.

La fonction a doit être comprise entre 0 et 1 et la fonction z doit être positive. Le calcul d'optimisation donne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = \text{constante} = \tau \,. \end{cases} \tag{3.2}$$

On obtient ainsi une paramétrisation $\tau \to \big(M(\tau), T(\tau)\big)$ pour laquelle on a comme plus haut $\partial M/\partial\tau = \tau \partial T/\partial\tau$. La solution du système (3.2) est donnée par

$$\alpha = \frac{h(2a-1)}{ha^2 - \tau(a-1)^2} \,.$$

Pour que α atteigne les bornes 0 et 1, il faut que le paramètre τ soit dans l'intervalle $]-\infty, h[$, et, dans ce cas, a varie de $1/2$ à 1 lorsque α varie de 0 à 1.

3.1. Calcul de la fonction $T(\tau, h)$

On pose $y = \dfrac{a}{1-a}$ et $\lambda = \dfrac{\tau}{h}$. On a $1 - \alpha = \dfrac{1-\lambda}{y^2-\lambda}$ et l'équation (3.2) nous donne

$$z = (y+1)(y-1)^2 y^{-1}\left[(y-1)^2 + h(1-\lambda)(y^2-\lambda)\right]^{-1}.$$

On en tire la valeur de T :

$$T = \int_1^\infty \sqrt{\frac{1-\lambda}{y^2-\lambda}}\,\frac{y-1}{(y-1)^2 + h(1-\lambda)(y^2-\lambda)}\,\mathrm{d}y\,. \tag{3.3}$$

Cette intégrale se calcule aisément et l'on obtient (après quelques changements de variables dont nous ferons grâce au lecteur)

$$T(\tau,h) = \begin{cases} (\tau-1)^{-\frac12}\left\{\operatorname{arctg}(\tau-1)^{\frac12} - \operatorname{arctg}\left[(\tau-1)(1-\tau/h)\right]^{\frac12}\right\} \\ \hfill \tau \in [1, h[\\ (1-\tau)^{-\frac12}\left\{\operatorname{argth}(1-\tau)^{\frac12} - \operatorname{argth}\left[(1-\tau)(1-\tau/h)\right]^{\frac12}\right\} \\ \hfill \tau \in [0, 1] \\ (1-\tau)^{-\frac12}\left\{\operatorname{argth}(1-\tau)^{-\frac12} - \operatorname{argth}\left[(1-\tau)(1-\tau/h)\right]^{-\frac12}\right\} \\ \hfill \tau \in \,]-\infty, 0] \end{cases}$$

Dans le cas où $h < 1$, la première expression est inutile. La fonction $T(\tau, h)$ est continue (et même analytique) en τ sur l'intervalle $]-\infty, h\,[$.

3.2. Calcul de la fonction $M(\tau, h)$

Nous utilisons pour cela la relation $\partial M/\partial\tau = \tau\partial T/\partial\tau$: nous avons ainsi

$$M(h,h) - M(\tau,h) = \int_\tau^h \tau' \frac{\partial T}{\partial \tau'} d\tau' = hT(h,h) - \tau T(\tau,h) - \int_\tau^h T(\tau',h)\,\mathrm{d}\tau'.$$

Remarquons que dans tous les cas de figure, nous avons

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{2(1-\tau)}T - \frac{1}{2\tau(1-\tau)} + \frac{1}{2(1-\tau)}\frac{1+h-2\tau}{\tau(1+h-\tau)}\left(1-\frac{\tau}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette relation nous permet de calculer aisément une primitive de T :

$$\int T = -2(1-\tau)T - \log|\tau| + 2\sqrt{h}\,\mathrm{arctg}\sqrt{h-\tau} - 2\mathrm{argth}\sqrt{1-\tau/h}^{(*)}.$$

Pour terminer le calcul, il nous faut encore calculer la valeur $M(h,h)$. On utilise le même raisonnement que dans le calcul des minorations pour remarquer qu'on a

$$\begin{aligned} M - \tau T &= \int_0^1 -\log(az)\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} = \lim_{\theta\to 0} -\int_\theta^1 \log(az)\frac{\mathrm{d}\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\left\{\left[-\sqrt{1-\alpha}\log(az)\right]_\theta^1 - \int_\theta^\infty \sqrt{1-\alpha}\,\frac{1}{az}\frac{\partial az}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\right\}. \end{aligned}$$

Comme pour le calcul de T, nous posons $y = \dfrac{a}{1-a}$ et $\lambda = \dfrac{\tau}{h}$.

Ceci donne $1-\alpha = \dfrac{1-\lambda}{y^2-\lambda}$, et nous obtenons, en posant $1+\theta = \dfrac{1-\lambda}{(1+\eta)^2-\lambda}$,

$$M - \tau T = \lim_{\eta\to 0}\left\{\left[-\sqrt{1-\alpha}\log(az)\right]_{1+\eta}^\infty - \int_{1+\eta}^\infty \sqrt{1-\alpha}\frac{\partial az}{\partial y}\frac{1}{az}\,\mathrm{d}y\right\}.$$

Appelons A_η le premier terme de la somme précédente et I_η le second, de façon à pouvoir écrire $M - \tau T = \lim_{\eta\to 0} A_\eta - I_\eta$. On a :

$$az = \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2 + h(1-\alpha)(y^2-\alpha)},$$

(*) Nous convenons de poser $\mathrm{argth}\,u = \mathrm{argth}\,u^{-1}$ si $u > 1$

ce qui permet de décomposer le terme I_η en la somme de deux termes $I_\eta = 2I_\eta^1 - 2I_\eta^2$, avec

$$I_\eta^1 = \int_{1+\eta}^{\infty} \sqrt{\frac{1-\lambda}{y^2-\lambda}}\, \frac{\mathrm{d}y}{y-1}$$

et
$$I_\eta^2 = \int_{1+\eta}^{\infty} \sqrt{\frac{1-\lambda}{y^2-\lambda}}\, \frac{y-1+hy(1-\lambda)}{(y-1)^2+h(1-\lambda)(y^2-\lambda)}\, \mathrm{d}y\,.$$

Lorsque $\eta \to 0$, le terme I_η^2 tend vers une limite finie I_0^2, et nous obtenons, en comparant l'expression qui donne I_λ^2 à celle qui donne T, formule (3.3), $I_0^2 = (1+h(1-\lambda))T + hI_\lambda^3$, avec

$$I_\lambda^3 = (1-\lambda)\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{1-\lambda}{y^2-\lambda}}\, \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2+h(1-\lambda)(y^2-\lambda)}\,.$$

Notre problème est de calculer la valeur de M pour $\tau = h$, c'est-à-dire pour $\lambda = 1$. Lorsque $\lambda \to 1$, la quantité I_λ^3 converge vers une limite I^3 qui vaut $\frac{\pi}{2}h^{-1/2} - F(h)$, la fonction F étant celle que l'on a définie en (2.10).

Pour terminer le calcul, il nous reste à calculer $\lim_{\eta\to 0} A_\eta - 2I_\eta^1$. Un petit changement de variable donne

$$I_\eta^1 = \int_1^{1+(1-\lambda)/\eta} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2-\lambda}} = \log\frac{1-\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda}} - \log\eta + \log 2 + \mathrm{o}(\eta)\,.$$

D'autre part, on a $A_\eta = \log h(1-\lambda)^2 - 2\log\eta + \mathrm{o}(\eta)$. Finalement, il nous reste, après avoir fait converger η vers 0 puis λ vers 1,

$$\lim_{\lambda\to 1}\lim_{\eta\to 0} A_\eta - 2I_\eta^1 = \log h - 2\log 2\,.$$

En regroupant tout cela, et compte tenu de ce que $T(h,h) = F(h)$, il vient finalement

$$M(h,h) = \log h + \sqrt{h}\pi + (2-h)F(h) - 2\log 2\,.$$

Au bout du compte, nous obtenons

$$\begin{aligned} M(\tau,h) = \log|\tau| - 2\log 2 + (2-\tau)T(\tau,h) + \sqrt{h}\pi \\ - 2\sqrt{h}\,\mathrm{arctg}\sqrt{h-\tau} + 2\,\mathrm{argth}\sqrt{1-\tau/h}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.3. Majorations uniformes

Nous nous intéressons tout d'abord au semi-groupe $\mathbf{P}_t$ lui même. On suppose donc que le semi-groupe satisfait à une inégalité de Sobolev faible $Sf(n, c_1, c_2, \mu)$, et on se ramène au cas où $c_1 = c_2 = 1$. Puis on se restreint, dans les inégalités précédentes, au cas $\varphi = 1$, ce qui nous donne $h = 0$ (*). Le paramètre τ varie dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ et la fonction $T(\tau, 0)$ vaut$(1-\tau)^{-1/2}\operatorname{argth}(1-\tau)^{-1/2}$. La fonction $M(\tau, 0)$ vaut $\log|\tau| + (2-\tau)T(\tau, 0) - 2\log 2$. La fonction $\tau \to T(\tau, 0)$ croît de 0 à l'infini lorsque τ croît de $-\infty$ à 0 ($T(\tau, 0)$ est le prolongement analytique de la fonction $F(\tau)$ définie en (2.10) aux réels négatifs).

Désignons par $\hat{G}(T)$ la fonction réciproque de la fonction $\tau \to T(\tau, 0)$. Nous obtenons une majoration sur la densité $\mathbf{p}_t(x, y)$ du semi-groupe $\mathbf{P}_t$:

$$\mathbf{p}_t(x, y) \leq 2^{-n} \left|\hat{G}\left(\frac{2}{n}t\right)\right|^{n/2} \exp\left[2 - \hat{G}\left(\frac{2}{n}t\right)\right] t.$$

Au voisinage de $t = 0$, la fonction $\hat{G}(t)$ se développe en

$$\hat{G}(t) = \frac{-1}{t} + \frac{2}{3} + \mathrm{o}(t),$$

ce qui nous donne, au voisinage de $t = 0$, la majoration

$$\mathbf{p}_t(x, y) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^{-n/2} \left|\frac{n}{2t} - \frac{2}{3}\right|^{-n/2} \big(1 + \mathrm{o}(t)\big).$$

Au voisinage de $t = \infty$, nous obtenons de même:

$$\hat{G}(t) = -4\exp(-2t)\big(1 + \mathrm{o}(t)\big).$$

Ce qui nous donne une majoration

$$\mathbf{p}_t(x, y) \leq \exp\Big(4t\,\mathrm{e}^{-\frac{4}{n}t}\big(1 + \mathrm{o}(t)\big)\Big).$$

Remarquons que, d'après nos hypothèses, la mesure μ est de masse plus grande que 1. Si le semi-groupe $\mathbf{P}_t$ est ergodique, alors sa densité lorsque $t \to \infty$ doit converger vers $\mu(\mathbf{E})^{-1} \leq 1$. Cette majoration sur le semi-groupe

(*) Dans ce cas, comme nous l'avons vu plus haut, l'une des deux hypothèses diffusion ou symétrie de la mesure est superflue.

n'est donc intéressante à l'infini que lorsque $\mu(\mathbf{E}) = 1$, ce qui n'est le cas que lorsque nous sommes dans le cas optimal, pour lequel nous avons obtenu des minorations du même type. Dans ce cas, nous avons alors un encadrement de $\mathbf{p}_t(x, y)$ par des constantes qui convergent vers 1 exponentiellement vite lorsque $t \to \infty$.

En résumé, et pour un coefficient c_2 quelconque, nous avons finalement :

PROPOSITION 3.1.— *Soit $\hat{G}(x)$ la fonction réciproque sur $]-\infty, 0[$ de la fonction $y \to (1-y)^{-1/2}\mathrm{argth}(1-y)^{-1/2}$. Si $\mathbf{P}_t$ est un semi-groupe de diffusion symétrique de la classe $Sf(n, c_1, c_2, \mu)$, il admet une densité $\mathbf{p}_t(x, y)$ par rapport à la mesure μ qui satisfait à*

$$\mathbf{p}_t(x,y) \leq \left(\frac{c_1}{4}\right)^{n/2} \left|\hat{G}\left(\frac{2}{n}\frac{c_1}{c_2}t\right)\right|^{n/2} \exp\left\{\frac{c_1}{c_2}t\left[2 - \hat{G}\left(\frac{2}{n}\frac{c_1}{c_2}t\right)\right]\right\}.$$

Ceci nous donne une majoration au voisinage de $t = 0$ de la forme

$$\mathbf{p}_t(x,y) \leq Ct^{-n/2},$$

ainsi qu'une majoration au voisinage de $t = \infty$ de la forme

$$\mathbf{p}_t(x,y) \leq c_1^{n/2} \exp\left(4\frac{c_1}{c_2}t\,\mathrm{e}^{-4c_1 t/(c_2 n)}\right).$$

Si l'on regroupe le résultat obtenu dans la proposition précédente avec le résultat du corollaire (2.6), nous obtenons, lorsque $c_1 = 1$, et au voisinage de $t = \infty$,

$$-1 + \mathrm{o}(1) \leq \inf_{x,y} \frac{c_2 \log \mathbf{p}_t(x,y)}{4t\,\mathrm{e}^{-4t/nc_2}} \leq \sup_{x,y} \frac{c_2 \log \mathbf{p}_t(x,y)}{4t\,\mathrm{e}^{-4t/nc_2}} \leq 1 + \mathrm{o}(1). \tag{3.5}$$

3.4. Majorations en dehors de la diagonale

Nous commençons par le cas où $c_2 = 1$. Les points x et y étant fixés, nous supposons tout d'abord que $d(x,y) \leq (n\pi)/2$ (*). Puis nous appliquons les résultats précédents au semi-groupe $\mathbf{P}_t^{\varphi}$, φ étant choisie de façon à avoir $\Gamma(\varphi, \varphi) \leq h$. Nous obtenons, pour $t = \frac{n}{2}T(\tau, h)$,

$$\mathbf{p}_t^{\varphi}(x,y) \leq \exp\left(\frac{n}{2}M(\tau,h)\right).$$

(*) Remarquons que, dans le cas $\mu(\mathbf{E}) = 1$, nous savons que cette hypothèse est toujours satisfaite, d'après le résultat de minorations que nous avons obtenu.

Compte tenu de ce que la densité $\mathbf{p}_t^{\varphi}(x,y)$ vaut $\exp\{\varphi(y)-\varphi(x)\}\mathbf{p}_t(x,y)$, nous avons donc

$$\mathbf{p}_t(x,y) \leq \exp\Big\{\varphi(x)-\varphi(y)+\frac{n}{2}M(\tau,h)\Big\} .$$

En prenant la borne inférieure de cette expression sur toutes les fonctions φ telles que $\Gamma(\varphi,\varphi) \leq h$, nous obtenons, d'après la définition de la distance $d(x,y)$

$$\mathbf{p}_t(x,y) \leq \exp\Big\{-\sqrt{h}d(x,y)+\frac{n}{2}M(\tau,h)\Big\} .$$

Il nous reste à optimiser cette dernière expression en fonction de la variable h : lorsque la quantité $T(\tau,h) = \frac{2}{n}t$ reste fixée, la borne inférieure de la quantité $-\sqrt{h}d(x,y)+\frac{n}{2}M(\tau,h)$ est obtenue lorsque

$$\frac{\partial M}{\partial h} - \tau\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{1}{2\sqrt{h}}\,\frac{2}{n}d(x,y)\,. \tag{3.6}$$

(pour obtenir cette expression, nous nous sommes servis du fait que $\partial M/\partial\tau = \tau\,\partial T/\partial\tau$).

Pour simplifier les notations, posons $\hat{d}(x,y) = \frac{2}{n}d(x,y)$. L'équation (3.6) est satisfaite lorsque $\hat{d}(x,y) = 2\operatorname{arctg}(h-\tau)^{-1/2}$.

Or, par hypothèse, nous avons supposé que $\hat{d}(x,y) \leq \pi$. En posant $\alpha = \operatorname{tg}(\pi/2-\hat{d}(x,y)/2)$, nous pouvons faire varier h de 0 à l'infini et nous obtenons:

$$T(\alpha,h) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{h-\alpha^2-1}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{h-\alpha^2-1}}{1+\alpha^2+\alpha\sqrt{h}}\right) & \text{si } h \geq 1+\alpha^2, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-h}}\operatorname{argth}\left(\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2-h}}{1+\alpha^2+\alpha\sqrt{h}}\right) & \text{si } 0 < h \leq 1+\alpha^2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Remarquons qu'à l'aide de la fonction $F(x)$ introduite en (2.10), nous obtenons une expression de $T(\alpha,h)$ sous la forme

$$T(\alpha,h) = \big(1+\alpha^2+\alpha\sqrt{h}\big)F(x)\,,$$

avec $x = (1+\alpha^2)(\alpha+\sqrt{h})^2(1+\alpha^2+\alpha\sqrt{h})^{-2}$. Pour tout $\alpha \geq 0$, la fonction $h \to T(\alpha,h)$ est une fonction continue (et même analytique) et décroissante de h sur $]0,\infty[$ sur le même intervalle. Pour $\alpha = 0$, on retrouve la fonction $T(0,h) = F(h)$.

Appelons $G(\alpha, T)$ la fonction réciproque, à α fixé, de la fonction $h \to T(\alpha, h)$ (on a donc $G(0,T) = G(T)$, où $G(x)$ est la fonction de la proposition (2.3)).

De l'expression de $M(\tau, h)$, on obtient, en recollant les morceaux, une majoration de la densité du semi-groupe, que nous exprimons pour un coefficient c_2 quelquonque.

THÉORÈME 3.2

Soit $\mathbf{P}_t$ *un semi-groupe satisfaisant à une inégalité de Sobolev faible, de dimension* n, *et de constante* $c_1 = 1$. *Soient* x *et* y *deux points qui sont distants d'au plus* $\sqrt{c_2} n\pi/2$. *On a, en posant* $\alpha = \mathrm{tg}(\pi/2 - d(x,y)/\{\sqrt{c_2} n\})$,

$$\mathrm{p}_t(x,y) \leq \left\{ \frac{\alpha + \sqrt{G(\alpha, \frac{2t}{nc_2})}}{2} \right\}^n \exp\left\{ t \left[2 + \alpha^2 - G\left(\alpha, \frac{2t}{nc_2}\right)\right]\right\}.$$

Remarque. — Si l'on peut trouver deux points x et y dont la distance est égale à $\sqrt{c_2} n\pi/2$, la majoration de la densité du semi-groupe en ces points là est obtenue pour $\alpha = 0$. On retrouve alors exactement l'expression obtenue pour la minoration. On obtient donc la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. — *Si un semi-groupe de diffusion symétrique par rapport à une mesure de probabilité* μ *satisfait à une inégalité de Sobolev faible avec* $c_1 = 1$ *et* $c_2 n^2 \pi^2 = 4\mathrm{diam}(\mathbf{E})^2$, *alors la borne inférieure de sa densité est égale à*

$$\left(\frac{1}{4} G\left(\frac{2t}{nc_2}\right)\right)^{n/2} \exp\left\{ t \left[2 - G\left(\frac{2t}{nc_2}\right)\right]\right\},$$

où la fonction $G(t)$ *est celle qui a été définie dans la proposition (2.3).*

Compte tenu de l'expression de α en fonction de $\hat{d}(x,y)$, on obtient aisément un développement asymptotique

$$T(\alpha, h) \underset{(h \to \infty)}{=} \frac{\hat{d}(x,y)}{2} h^{-1/2} (1 + \mathrm{o}(h)).$$

COROLLAIRE 3.4. — *Sous les hypothèses précédentes, et lorsque* $d(x,y) \leq \sqrt{c_2} n\pi/2$, *nous obtenons une majoration sur le semi-groupe*

$$\mathrm{p}_t(x,y) \leq C\big(d(x,y), n\big)\, t^{-n} \exp\left[\frac{-d^2(x,y)}{4t}\right] (1 + \mathrm{o}(t)).$$

Remarques

1) Dans le corollaire précédent, il faut faire attention à ce que cette majoration n'est pas uniforme en $d(x,y)$. C'est pourquoi , si nous comparons le résultat obtenu en dehors de la diagonale au résultat obtenu pour les majorations uniformes, nous voyons apparaître un facteur 2 : majorations en $t^{-n/2}$ sur la diagonale et majorations en t^{-n} en dehors de la diagonale. Cet exposant est un peu surprenant : pour le semi-groupe de la chaleur sur une variété riemannienne compacte de dimension n, le noyau de la chaleur se comporte en $C(x,y)t^{-(n+p)/2}\exp[-d^2(x,y)/4t]$, lorsque $t \to 0$, le coefficient p étant la dimension de la variété des géodésiques qui joignent x à y. Ce coefficient est au plus égal à $n-1$. Néanmoins, B. Davies nous a signalé des exemples de semi-groupes symétriques satisfaisant une inégalité de Sobolev de dimension n et pour lequel le comportement du semi-groupe en deux points diamétralement opposés est en $t^{-n}\exp[-d^2(x,y)/4t]$ (il ne s'agit alors évidemment pas de semi-groupes associés au laplacien d'une variété).

2) La question se pose naturellement de savoir s'il existe un semi-groupe satisfaisant à une inégalité de Sobolev faible avec $c_1 = 1$ et c_2 optimal (en termes de diamètre). Un candidat naturel pourrait être le semi-groupe de la chaleur sur les sphères. En fait, la remarque précédente et le corollaire **3.3** permettent de se convaincre qu'il n'en est rien. Pour les sphères, T. Aubin a calculé les meilleures constantes de l'inégalité de Sobolev : pour la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ dont on a normalisé le volume pour en faire une probabilité , on trouve ([A], p. 50) : $c_2 = 4/n(n-2)$. La borne supérieure pour c_2 donnée par la proposition 2.5 est $4/n^2$. D'autre part, en utilisant des méthodes de carré du champ itéré, nous sommes parvenus à obtenir, toujours pour les sphères, des inégalités de Sobolev faibles de dimension n avec $c_1 = 1$ et $c_2 = 4/n(n-1)$, dont on ne sait pas pour l'instant si elles sont optimales.

3) Dans le cas des semi-groupes symétriques, la majoration uniforme $\mathrm{p}_t(x,y) \leq Ct^{-n/2}$, pour $0 \leq t \leq 1$ entraîne une inégalité de Sobolev de dimension n, cf. [V]. En particulier, une inégalité de Sobolev faible de dimension n implique une inégalité de Sobolev ordinaire de même dimension. Mais, comme on peut le voir d'après la remarque précédente, les constantes c_1 et c_2 ne sont pas préservées dans cette transformation.

4) Dans le cas où la constante c_1 n'est pas optimale ($c_1 > 1$ lorsque μ est une mesure de probabilité), la majoration du diamètre du théorème 2.4 n'est plus valable. Dans ce cas, il n'y a aucune raison de limiter les majorations hors diagonale du semi-groupe au cas $d(x,y) \leq \sqrt{c_2}n\pi/2$. Lorsque $d(x,y) > \sqrt{c_2}n\pi/2$, nous ne pouvons plus résoudre l'équation (3.6), et nous ne pouvons donc plus optimiser en h le résultat obtenu. D'un autre coté, si, au lieu de résoudre le système (3.1) à l'aide du calcul d'optimisation, nous prenons dans ce sytème $a(p) =$ cste et $z(p) = \lambda\alpha(p)^q\sqrt{1-\alpha(p)}$, ($q > 1$, $\lambda > 0$), nous obtenons une borne a priori sur $\mathbf{p}_t(x,y)$ qui, après optimisation, nous donne le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{p}_t(x,y) \leq C(\varepsilon)t^{-n/2} \exp\left\{\frac{-d^2(x,y)}{4(1+\varepsilon)t}\right\},$$

la constante $C(\varepsilon)$ croissant vers l'infini lorsque $\varepsilon \to 0$. On retrouve ainsi les résultats de Davis [D]. Nous n'avons pas réussi à retrouver ce résultat à partir des majorations précédentes, en partie à cause de la complexité des calculs, mais il n'est pas exclu que, avec la méthode que nous avons employée pour résoudre (3.1), il y ait des cas qui nous aient échappé. Si tel est le cas, il est également possible que la situation soit identique dans les calculs de minoration, et qu'on puisse obtenir par nos méthodes des minorations du semi-groupe en dehors des points diamétralement opposés.

Références

[A] AUBIN (T.) .— *Non linear analysis on manifolds, Monge-Ampère equations,* Springer, Berlin-Heidelberg, New-York (1982)

[CS] CARLEN (E.) and STROOCK (D.W.) .— *Hypercontractivity, ultracontractivity, Sobolev inequalities and all that,* Preprint (1984)

[CKS] CARLEN (E.), KUSUOKA (S.) and STROOCK (D.W.) .— *Upperbounds for symmetric Markov transition functions,* Ann. Inst. H. Poincaré **23** (1987) pp. 245-287

[D] DAVIES (E.B.) .— *Heat kernels and spectral theory,* Cambridge Univ. Press. Berlin-Heidelberg, New-York (1989)

[DS] DAVIES (E.B.) and SIMON (B.) .— *Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet laplacians,* J. Funct. Anal. **59** (1984) pp. 335-395

[DSt] DEUSCHEL (J.D.) and STROOK (D.W.) .— *Large deviations,* Ac. Press **137** (1989)

[G] GROSS (L.) .— *Logarithmic Sobolev inequalities,* Amer. J. Math. **97** (1976) pp. 1061-1083

[V] VAROPOULOS (N.) .— *Hardy-Littlewood theory for semigroups,* J. Funct. Anal. **63** (1985) pp. 240-260