ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMED NAJMI

Majoration en norme hölderienne de la résolvante du laplacien dans un ouvert avec coins

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 2 (1990), p. 121-136

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_121_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

Majoration en norme hölderienne de la résolvante du laplacien dans un ouvert avec coins

MOHAMED NAJMI[1]

RÉSUMÉ. — Dans le cadre des espaces de Hölder, on considère l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet dans un ouvert plan polygonal. Utilisant les techniques des espaces de Morrey-Campanato, on établit une majoration de sa résolvante.

ABSTRACT. — In the framework of Hölder spaces, we consider the Laplace operator with Dirichlet conditions on a polygonal domain. Using Morrey-Campanato spaces technic, we prove an estimate of its resolvent.

1. Problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est la réunion d'un nombre fini de segments de droites $\overline{\Gamma_j}$, $1 \leq j \leq N$, où Γ_j est un segment ouvert. On note $S_{j,k}$ l'extrémité commune à $\overline{\Gamma_j}$ et $\overline{\Gamma_k}$ si elle existe. On désigne par $\omega_{j,k}$ la mesure de l'angle fait par $\overline{\Gamma_j}$ et $\overline{\Gamma_k}$ en $S_{j,k}$ vers l'intérieur de Ω lorsque $\overline{\Gamma_j} \cap \overline{\Gamma_k} \neq \emptyset$. On pose $\omega = \sup\{\omega_{j,k} \mid \overline{\Gamma_j} \cap \overline{\Gamma_k} \neq \emptyset\}$. On suppose que $0 < \omega \leq 2\pi$ et dans toute la suite ν désigne ${}^{\pi}/_{\omega}$.

Après rotation et translation, on place le sommet correspondant à l'angle de mesure ω à l'origine de telle sorte que l'un des côtés, Γ_2, soit porté par l'axe des x (voir fig. 1).

Le but essentiel de ce travail est de démontrer que la résolvante du laplacien admet, dans l'espace de Hölder $C_0^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 \leq \alpha < \nu$, un comportement en $|\lambda|^{-1}$ pour $\Re\lambda > 0$.

[1] Mohamed Najmi, I.M.S.P. Parc Valrose (Math.), 06034 Nice Cedex (France)

Les espaces utilisés sont les suivants :

a) $C^0(\overline{\Omega})$, noté $C(\overline{\Omega})$, est l'espace des restrictions à Ω des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$. Muni de la norme :

$$u \to \|u\|_{\infty,\overline{\Omega}} = \sup\{|u(x)|\,,\ x \in \overline{\Omega}\}\,,$$

$C(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach;

b) $C^\beta(\overline{\Omega})$, $0 < \beta < 1$, est le sous-espace des $u \in C(\overline{\Omega})$ telles que :

$$[u]_{\beta,\overline{\Omega}} = \sup\{|u(x) - u(y)||x - y|^{-\beta}\ ;\ x, y \in \overline{\Omega}\,,\ x \neq y\} < \infty\,.$$

Muni de la norme $u \to \|u\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} = \|u\|_{\infty,\overline{\Omega}} + [u]_{\beta,\infty}$, $C^\beta(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach.

On rappelle que la norme $u \to \|u\|_{\beta,\overline{\Omega}} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + [u]_{\beta,\overline{\Omega}}$ est équivalente à $\|u\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}$

c) $C_0^\beta(\overline{\Omega}) = \{u \in C^\beta(\overline{\Omega})\,,\ u = 0 \text{ sur } \Gamma\}$.

Le résultat fondamental est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1.— *Il existe une constante C telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re\lambda > 0$ et u solution du problème de Dirichlet :*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad et \quad -\Delta u + \lambda u = g \quad avec \quad g \in C_0^\alpha(\overline{\Omega})\,,\ 0 \leq \alpha < \nu\,.$$

Alors :

$$\|u\|_{C_0^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C|\lambda|^{-1}\|g\|_{C_0^\alpha(\overline{\Omega})}\,. \tag{1.1}$$

Plusieurs auteurs se sont intéréssés à ce genre de problème pour des opérateurs elliptiques, dans des ouverts réguliers et dans différents espaces. Agmon [3] et Sobolevski [15] dans les $L^p(\Omega)$, Tanabé [18] dans les espaces de Sobolev, Stewart [17] et Acquistapace-Terrini [2] dans les espaces de fonctions continues $C(\overline{\Omega})$, Campanato [7], [8] et von Wahl [19], [20] dans les espaces de Hölder. Dans les polygones, ce résultat est étudié par Adeyeye [1] dans les $L^p(\Omega)$, Grisvard [11] dans les $W^{m,p}(\Omega)$, $p < \infty$ et Grisvard [12] dans $C(\overline{\Omega})$.

Lorsque la donnée n'est plus nulle sur le bord, von Wahl [19] à démontré, pour des ouverts très réguliers et des opérateurs fortement elliptiques d'ordre $2m$, $m \geq 1$, à coefficients $C^{2m,\beta}$, $0 < \beta < 1$, en utilisant les méthodes d'Agmon [3] et d'Agmon-Douglis-Nirenberg [4], une inégalité du type :

$$\|u\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} + |\lambda|^{\frac{\beta}{2}}\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C|\lambda|^{-1}\left\{\|g\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} + |\lambda|^{\frac{\beta}{2}}\|g\|_{C(\overline{\Omega})}\right\} \tag{1.2}$$

Par un contre-exemple dans [20], l'auteur montre que le laplacien ne génère pas de semi-groupe analytique dans $C^\beta(\overline{\Omega})$. Récemment, dans [5], Bolley, Camus et Pham The Lai ont prolongé le résultat de Campanato en montrant comment intervient la trace de la donnée höldérienne sur le bord de Ω lorsque ce dernier est assez régulier.

2. La technique

La technique qu'on se propose d'utiliser ici est celle des espaces de Morrey-Campanato comme dans [7]-[8], où pour des ouverts de classe C^2 et des opérateurs fortement elliptiques d'ordre 2 à coefficients continus, Campanato établit l'inégalité (1.1) dans $C_0^\beta(\overline{\Omega})$, $0 < \beta < 1$, en se basant sur l'isomorphisme entre $\mathcal{L}^{2,2+2\beta}(\Omega)$ et $C^\beta(\overline{\Omega})$, les inégalités variationnelles, celles de Caccioppoli et quelques lemmes algébriques.

Espaces de Morrey-Campanato

a) On désigne par $|x|$ la norme de x dans $\mathbb{R}^n$ et soit :

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |x - x_0| < r\} .$$

Si G est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$G(x_0,r) = B(x_0,r) \cap G \quad \text{et} \quad G_r = B(0,r) \cap G .$$

b) Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de mesure positive notée $|G|$ et $u : G \to \mathbb{C}$.

On note u_G la moyenne de u sur G définie par :

$$u_G := |G|^{-1} \int_G u(x)\,\mathrm{d}x ,$$

$u_{x_0,r}$ la moyenne de u sur $G(x_0,r)$ et u_r cette moyenne lorsque $x_0 = 0$.

c) DÉFINITION.— *Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de diamètre d_G. On désigne par $\mathcal{L}^{2,\mu}(G)$, $0 \le \mu \le n+2$, l'espace des u de $L^2(G)$, vérifiant :*

$$[u]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}(G)} =$$
$$= \sup\left\{ r^{-\mu} \int_{G(x_0,r)} |u - u_{x_0,r}|^2 \,\mathrm{d}x \, , \; x_0 \in G \, , \; 0 < r < d_G \right\} < \infty . \square$$

On a le résultat suivant.

LEMME 2.1. (cf.[6]). — *Si G a la propriété du cône et $0 < \beta < 1$, alors :*

$$u \in \mathcal{L}^{2,2+2\beta}(G) \Rightarrow u \in C^{\beta}(\overline{G}) \quad et \quad [u]_{\beta,\overline{G}} \leq C[u]_{\mathcal{L}^{2,2+\beta}(G)} . \square \tag{2.1}$$

Remarque. — On verra en appendice que ce lemme reste valable dans le cas de certains ouverts fissurés.

3. Quelques rappels

i) Une majoration variationnelle classique

On a le lemme 3.1.

LEMME 3.1. — *Soit V une sous-espace de $H^1(G)$ tel que :*

$$H_0^1(G) \subseteq V \subseteq H^1(G) \quad \textit{muni de la norme induite.}$$

Soit $g \in L^2(G)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\lambda > 0$. Alors la solution u du problème :

$$u \in V\,, \quad \int_G \nabla u\, \overline{\nabla v}\, \mathrm{d}x + \lambda \int_G u\overline{v}\, \mathrm{d}x = \int_G g\overline{v}\, \mathrm{d}x\,, \quad \forall\, v \in V \tag{3.1}$$

vérifie l'inégalité a priori :

$$\|u\|_{\mathcal{L}^2(G)} \leq K|\lambda|^{-1}\|g\|_{\mathcal{L}^2(G)}$$

où K ne dépend pas de λ.

ii) Une inégalité de type Caccioppoli (cf. [7]-[9])

On donne cette inégalité dans le cas où l'ouvert G est Ω_r.

Soit $V_r = \{u \in H^1(\Omega_r)\ ;\ u = 0 \text{ sur } |x| = r\}$.

LEMME 3.2. — *Il existe une constante C telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re\lambda > 0$ et $v \in H^1(\Omega_r)$ solution du problème :*

$$\int_{\Omega_r} \nabla v\, \overline{\nabla u}\, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_r} v\overline{u}\, \mathrm{d}x = 0 \textit{ pour tout } u \in V_r\,,$$

alors, pour tous les ρ et σ tels que $0 < \rho < \sigma \leq r$, on a :

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \leq C\Big(\frac{\sigma}{\rho}\Big)^2 (\sigma - \rho)^{-2} \int_{\Omega_\sigma} |v - v_\sigma|^2 \,\mathrm{d}x\,. \tag{3.2}$$

Démonstration. — On adapte ici la démonstration donnée par exemple dans [8] pour un ouvert régulier.

Soit $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta \equiv 1$ sur Ω_ρ, $\theta \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\sigma$ et $|\nabla\theta| \leq C(\sigma-\rho)^{-1}$, $0 < \rho < \sigma \leq r$.

Soit $a(v,\phi) = \displaystyle\int_{\Omega_r} \nabla v\, \overline{\nabla\varphi} \,\mathrm{d}x + \lambda \int_{\Omega_r} v\overline{\varphi}\,\mathrm{d}x$, pour tout ϕ dans V_r.

On pose : $\quad M(r) \displaystyle\int_{\Omega_r} \theta^2 \,\mathrm{d}x \quad$ et $\quad v_{\theta,r} = M(r)^{-1} \displaystyle\int_{\Omega_r} \theta^2 v\,\mathrm{d}x.$

Par un calcul direct on obtient :

a) $|\Omega_\rho| \leq M(\sigma)$, pour tout $\rho \leq \sigma$;

b) $\displaystyle\int_{\Omega_\sigma} \theta^2 v(v - v_{\theta,\sigma})\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_\sigma} \theta^2 |v - v_{\theta,\sigma}|^2 \,\mathrm{d}x\,.$

c)
$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\sigma} |v - v_{\theta,\sigma}|^2 \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\Omega_\sigma} \Big| M(\sigma)^{-1} \int_{\Omega_\sigma} \theta^2(y)\big(v(x) - v(y)\big)\,\mathrm{d}y \Big|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq |\Omega_\sigma| M(\sigma)^{-1} \int_{\Omega_\sigma} |\Omega_\sigma|^{-1} \int_{\Omega_\sigma} \big|v(x) - v(y)\big|^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\leq C|\Omega_\sigma| M(\sigma)^{-1} \int_{\Omega_\sigma} \big|v(x) - v_\sigma\big|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq C\Big(\frac{\sigma}{\rho}\Big)^2 \int_{\Omega_\sigma} \big|v(x) - v_\sigma\big|^2 \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Majoration de $\int_{\Omega_\rho} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x$

On pose $\phi = \theta^2(v - v_{\theta,\sigma})$. Alors $\phi \in V_\sigma$. Comme $a(v,\phi) = 0$, on a :

$$\int_{\Omega_\sigma} \theta^2 |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x + \lambda \int_{\Omega_\sigma} \theta^2 |v - v_{\theta,\sigma}|^2 \,\mathrm{d}x = -2 \int_{\Omega_\sigma} \theta \cdot \nabla v \cdot \nabla\theta (v - v_{\theta,\sigma})\,\mathrm{d}x\,.$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\epsilon)$ telle que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\sigma} \theta^2 |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x + \Re\lambda \int_{\Omega_\sigma} \theta^2 |v - v_{\theta,\sigma}|^2 \,\mathrm{d}x \leq \\
&\quad \leq \epsilon \int_{\Omega_\sigma} \theta^2 |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x + C(\epsilon)(\sigma - \rho)^{-2} \int_{\Omega_\sigma} |v - v_{\theta,\sigma}|^2 \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Pour ϵ assez petit et $\Re\lambda > 0$, on déduit que :

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \le C(\sigma-\rho)^{-2} \int_{\Omega_\sigma} |v - v_{\theta,\sigma}|^2 \,\mathrm{d}x \,.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.2 grâce à c).

iii) Un lemme algébrique (cf. [6])

LEMME 3.3. — *Soient ϕ et Φ des fonctions positives définies sur $]0, d]$, Φ croissante, et soient A, γ, β des constantes positives avec $\beta < \gamma$. Supposons que pour tout t dans $]0, 1[$ et tout r dans $]0, d]$, on a :*

$$\phi(tr) \le At^\gamma \phi(r) + r^\beta \Phi(r)\,.$$

Alors pour tout $\epsilon \in]0, \gamma-\beta[$, pour tout t dans $]0, 1[$ et pour tout r dans $]0, d[$:

$$\phi(tr) \le At^{\gamma-\epsilon}\phi(r) + K(tr)^\beta \Phi(r)\,.$$

où K ne dépend ni de r ni de t.

iv) Une inégalité de Poincaré (cf. [10], [14])

Il existe une constante C telle que pour tout ouvert G de $\mathbb{R}^n$ borné non nécessairement convexe et tout $v \in H^1(G)$:

$$\|v - v_G\|_{L^2(G)} \le C(n)\, d_G \|\nabla v\|_{L^2(G)}\,.$$

4. Majoration préliminaire de la résolvante du laplacien dans des espaces de Sobolev relatifs à L^p

THÉORÈME 4.1. — *Soit Ω l'ouvert polygonal décrit au paragraphe 1. Soit $w \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème*

$$-\Delta w + \lambda w = f_0 + \partial_x f_1 + \partial_y f_2\,. \tag{4.1}$$

Il existe p avec :

$$2 < p \le \frac{2}{1-\nu} \tag{4.2}$$

tel que si $f_i \in L^p(\Omega)$, $i = 0, 1, 2$, alors $w \in W^{1,p}(\Omega)$.

De plus pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned} &|\lambda| \left\|w\right\|_{L^p(\Omega)} + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla w\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq C \left\{ \left\|f_0\right\|_{L^p(\Omega)} + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \left(\left\|f_1\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|f_2\right\|_{L^p(\Omega)} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

(∂_x est la dérivée partielle par rapport à x).

Démonstration.— On se restreint pour la démonstration à Ω_1 de la figure 1 ci-dessous.

- L'existence et l'unicité d'une solution sont démontrées dans [13].
- Lorsque f_1 et f_2 sont nulles, la majoration 4.3 est donnée dans [11].
- Les variables x et y étant interchangeables, on va supposer que $f_0 = f_2 = 0$, on note $f = f_1$ et on montre que :

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}} \left\|w\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\nabla w\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left\|f\right\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.4}$$

La méthode de dualité de Sobolevskii appliquée à l'équation en w permet d'avoir le comportement en λ de la norme de w dans L^p mais pas celui de son gradient.

Pour cela, on compare w à $\partial_x v$ où v est solution du problème

$$-\Delta v + \lambda v = f \text{ dans } L^p(\Omega), \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \quad \partial_x v = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_2. \tag{4.5}$$

Dans le cas où p vérifie (4.2), d'après [13], ce problème admet une solution unique $v \in W^{2,p}(\Omega)$ vérifiant :

i) $\partial_x v = w$;

ii) il existe une constante C telle que :

$$\begin{aligned} \left\|v\right\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq C \left\{ \left\|\Delta v\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|v\right\|_{L^p(\Omega)} \right\} = \\ &= C \left\{ \left\|f - \lambda v\right\|_{L^p(\Omega)} + \left\|v\right\|_{L^p(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Il suffit donc de majorer $\left\|v\right\|_{L^p(\Omega)}$ et par interpolation on aura celle pour le gradient.

Majoration de $\|v\|_{L^p(\Omega)}$

On multiplie l'équation (4.5) par la fonction de dualité $v^* = |v|^{p-2}\overline{v}$ et on intègre ensuite par parties. Comme $v \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $v^* \in W^{2,q}(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, $v^* = 0$ sur Γ_2.

$$\nabla v^* = \frac{p}{2}|v|^{p-2}\nabla\overline{v} + \left(\frac{p}{2}-1\right)|v|^{p-4}\overline{v}^2\nabla v\,.$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega(-\Delta v + \lambda v)\cdot v^*\,\mathrm{d}X &= \int_\Omega f\cdot v^*\,\mathrm{d}X\\ &= \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v^*\,\mathrm{d}X - \int_\Gamma(\partial_n v)\cdot v^*\,\mathrm{d}s + \lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v^*\,\mathrm{d}X =\\ &\quad = \frac{p}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2|v|^{p-2}\,\mathrm{d}X + \left(\frac{p}{2}-1\right)\int_\Omega |v|^{p-4}\overline{v}^2(\nabla v)^2\,\mathrm{d}X\,,\end{aligned}$$

$\partial_n v$ est la dérivée normale vers l'extérieur de v et $\partial_\tau v$ est la dérivée tangentielle de v. On pose :

$$R = \int_\Omega |\nabla v|^2|v|^{p-2}\,\mathrm{d}X \quad \text{et} \quad Z = \int_\Omega |v|^{p-4}\overline{v}^2(\nabla v)^2\,\mathrm{d}X\,.$$

On a :

$$|Z| \le R \quad \text{et donc} \quad R + \Re Z \ge 0\,.$$

Puisque $\partial_x v = \gamma\partial_n v - \alpha\partial_\tau v = 0$ sur Γ. Alors $\partial_n v = \beta\partial_\tau v$ sur Γ où $\beta = \alpha\gamma^{-1}$. Comme $v = 0$ sur Γ_2 alors $\partial_\tau v = 0$ sur Γ_2. On a :

$$\int_\Gamma(\partial_n v)v^*\,\mathrm{d}s = \beta\int_{\Gamma\setminus\Gamma_2}(\partial_\tau v)v^*\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma\setminus\Gamma_2}|v|^{p-2}\overline{v}(\partial_\tau v)\,\mathrm{d}s\,.$$

$$\Re\left(\int_{\Gamma\setminus\Gamma_2}|v|^{p-2}\overline{v}(\partial_\tau v)\,\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{p}\int_{\Gamma\setminus\Gamma_2}(\partial_\tau|v|^p)\,\mathrm{d}s = 0\,;$$

v étant nulle aux deux bouts de $\Gamma\setminus\Gamma_2$.

Pour $\lambda > 0$ on a :

$$\begin{aligned}R + \left(\frac{p}{2}-1\right)\Re(R+Z) + \lambda\|v\|^p_{L^p(\Omega)} &= \Re\int_\Omega f\cdot v^*\,\mathrm{d}X \le\\ &\le \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\|v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

D'où :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda^{-1}\|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.7}$$

L'inégalité (4.7) est vérifiée pour tout $\lambda > 0$ et avec une constante égale à 1. Par conséquent elle l'est aussi pour tout λ tel que $\Re\lambda > 0$.

Comme conclusion de (4.6) et (4.7) :

$$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C^{\mathrm{te}}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

et alors

$$\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq C^{\mathrm{te}}|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

D'où le résultat annoncé.

5. Une majoration au voisinage de l'origine

On se ramène ici au cas de l'ouvert

$$\Omega_1 = \{z = \rho\, e^{i\theta}\,,\ 0 < p < 1\,,\ 0 < \theta < \omega\}$$

et on va établir la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1.— *Il existe une constante C telle que pour tout t dans $]0\,,1[$ et u solution du problème de Dirichlet :*

$$u \in H_0^1(\Omega_1)\,, \quad -\Delta u + \lambda u = g \in C_0^\alpha(\overline{\Omega_1})\,.$$

On a :

$$t^{1+\alpha}\|u - u_t\|_{L^2(\Omega_t)} \leq C|\lambda|^{-1}\|g\|_{\alpha,\overline{\Omega_1}}. \tag{5.1}$$

Démonstration.— On sera amené à poser dans Ω_r, $r < 1$, $u = v + w$, où w vérifie le problème :

$$w \in H_0^1(\Omega_r)\,, \quad -\Delta w + \lambda w = g$$

et où v vérifie :

$$v \in H_\Gamma^1(\Omega_r)\,, \quad -\Delta v + \lambda v = 0\,. \tag{5.2}$$

Avec $H_\Gamma^1(\Omega_r) = \{v \in H^1(\Omega_r)\,,\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2\}\,.$

La majoration de la contribution de v à 5.1 utilise la proposition 5.2.

PROPOSITION 5.2. — *Il existe une constante C telle que pour tout $r < 1$, pour tout $t \in]0,1[$ et $v \in W^{1,p}(\Omega_1)$, $2 < p \leq 2/(1-v)$, solution de (5.2) on a :*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq C(p) t^{1-\frac{2}{p}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_r)} .$$

Démonstration. — Par homothétie, il suffit de démontrer la proposition pour $r = 1/2$.

- Soit $t < 1/2$ et $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\theta = 1$ sur $B(0\,;t/2)$, $\theta = 0$ en dehors de $B(0\,;1/2)$, $|\nabla\theta| \leq C$ et $|\Delta\theta| \leq C$ où C ne dépend pas de t. On pose $h = \theta v$. On a :

$$\begin{cases} h = \theta v \in W_0^{1,p}(\Omega_{1/2}) \\ -\Delta h + \lambda h = v\Delta\theta - 2D_x(vD_x\theta) - 2D_y(vD_y\theta) \in L^p(\Omega_{1/2}) . \end{cases}$$

Par Hölder : $$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{t/2})} &\leq C_1 t^{1-\frac{2}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega_{t/2})} \\ &\leq C_1 t^{1-\frac{2}{p}} \|\nabla h\|_{L^p(\Omega_{1/2})} . \end{aligned}$$

Par le théorème 4.1 et pour $\Re\lambda > 0$ et $|\lambda| > \epsilon$, $\epsilon > 0$ très petit :

$$\begin{aligned} \|\nabla h\|_{L^p(\Omega_{1/2})} &\leq C_2 \left\{ \|v\nabla\theta\|_{L^p(\Omega_{1/2})} + \|v\Delta\theta\|_{L^p(\Omega_{1/2})} \right\} \\ &\leq C_3 \left\{ \|v\|_{L^p(\Omega_{1/2})} \right\} . \end{aligned}$$

Par Sobolev et Poincaré :

$$\|v\|_{L^p(\Omega_{1/2})} \leq C_4 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{1/2})} \right\}$$

et donc : $$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{t/2})} \leq C t^{1-\frac{2}{p}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{1/2})} .$$

Où les constantes C_i et C ne dépendent pas de t. C'est le résultat annoncé pour $t < 1/2$.

- Pour $t > 1/2$ on a : $t^{-1+\frac{2}{p}} < 2^{1-\frac{2}{p}}$ et alors :

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{t/2})} &\leq 2^{1-\frac{2}{p}} \cdot t^{1-\frac{2}{p}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{1/2})} \\ &\leq C t^{1-\frac{2}{p}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{1/2})} . \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée pour $r = 1/2$.

• Pour r dans $]0\,,\,1[$, on va l'étabir par homothétie.

On pose $k(y) = v(2ry)$ avec $y \in \Omega_{1/2}$ et donc $x = 2ry \in \Omega_r$.

$$-\Delta k = (2r)^2\{-\Delta v(2ry) + \lambda v(2ry) - \lambda v(2ry)\} = -(2r)^2\lambda k(y)\,.$$

On a donc $-\Delta k + 4r^2\lambda k = 0$ dans $\Omega_{1/2}$ et $k = 0$ sur $\Gamma_{1/2}$. D'où :

$$\|\nabla k\|_{L^2(\Omega_{t/2})} \leq Ct^{1-\frac{2}{p}}\|\nabla k\|_{L^2(\Omega_{1/2})}\,.$$

Or pour tout t : $\|\nabla k\|_{L^2(\Omega_{t/2})} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{tr})}$

Donc :
$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq Ct^{1-\frac{2}{p}}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_r)}\,. \;\square$$

Démonstration de 5.1. — En ce qui concerne la *contribution* de v, on a l'inégalité de Poincaré :

$$\|v - v_{\Omega_{tr/2}}\|_{L^2(\Omega_{tr/2})} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{tr/2})}\,.$$

Par la proposition 5.2 : $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{tr/2})} \leq Ct^{1-\frac{2}{p}}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{r/2})}\,.$

Par Caccioppoli : $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_{r/2})} \leq Cr^{-1}\|v - v_{\Omega_r}\|_{L^2(\Omega_r)}\,.$

Au total :

$$\|v - v_{\Omega_{tr/2}}\|_{L^2(\Omega_{tr/2})} \leq Ct^{2-\frac{2}{p}}\|v - v_r\|_{L^2(\Omega_r)}\,.$$

Par la majoration habituelle de la solution d'un problème variationnel, la contribution de w est donnée par :

$$\|w - w_{tr}\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq C\|w\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq C|\lambda|^{-1}\|g\|_{L^2(\Omega_{tr})}\,.$$

Revenant à u, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|u - u_{tr}\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq \|v - v_{tr}\|_{L^2(\Omega_{tr})} + \|w - w_{tr}\|_{L^2(\Omega_{tr})}\\
&\leq C\left\{t^{2-\frac{2}{p}}\|v - v_r\|_{L^2(\Omega_r)} + \|w - w_{tr}\|_{L^2(\Omega_{tr})}\right\}\\
&\leq C\left\{t^{2-\frac{2}{p}}\|u - u_r\|_{L^2(\Omega_r)} + t^{2-\frac{2}{p}}\|w - w_r\|_{L^2(\Omega_r)} + \|w - w_{tr}\|_{L^2(\Omega_{tr})}\right\}\\
&\leq C\left\{t^{2-\frac{2}{p}}\|u - u_r\|_{L^2(\Omega_r)} + \|w - w_r\|_{L^2(\Omega_r)}\right\}
\end{aligned}$$

car de manière générale, si B est un ensemble de mesure positive et $B \subset A$, on a :

$$\left\|u - u_B\right\|_{L^2(B)} \leq \left\|u - u_A\right\|_{L^2(A)} . \tag{5.4}$$

• On conclut que :

$$\begin{aligned}
\left\|u - u_{tr}\right\|_{L^2(\Omega_{tr})} &\leq C\left\{t^{2-\frac{2}{p}}\left\|u - u_r\right\|_{L^2(\Omega_r)} + \left\|w - w_r\right\|_{L^2(\Omega_r)}\right\} \\
&\leq C\left\{t^{2-\frac{2}{p}}\left\|u - u_r\right\|_{L^2(\Omega_r)} + |\lambda|^{-1}\left\|g\right\|_{L^2(\Omega_{tr})}\right\} \\
&\leq Ct^{2-\frac{2}{p}}\left\|u - u_r\right\|_{L^2(\Omega_r)} + Cr^{1+\alpha}|\lambda|^{-1}\left[g\right]_{\alpha,\overline{\Omega_r}},
\end{aligned}$$

car $g(0) = 0$.

• À ce point, on applique le lemme 3.3 avec : $\gamma = 2 - {}^2/_p$, $\beta = 1 + \alpha$, $\varphi(r) = \left\|u - u_r\right\|_{L^2(\Omega_r)}$ et $\Phi(r) = C|\lambda|^{-1}\left[g\right]_{\alpha,\overline{\Omega_r}}$. On obtient :

$$\left\|u - u_{tr}\right\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq Ct^{2-\frac{2}{p}}\left\|u - u_r\right\|_{L^2(\Omega_r)} + C(tr)^{1+\alpha}|\lambda|^{-1}\left[g\right]_{\alpha,\overline{\Omega_r}}.$$

D'où pour $\alpha < \nu$:

$$(tr)^{-(1+\alpha)}\left\|u - u_{tr}\right\|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq Cr^{-(1+\alpha)}\left\|u - u_r\right\|_{L^2(\Omega_r)} + KC|\lambda|^{-1}\left[g\right]_{\alpha,\overline{\Omega_r}}.$$

En particulier si $r = 1$, on obtient (5.1). □

6. La démonstration du théorème 1.1

Elle consiste surtout en la majoration de la semi-norme $\left[u\right]_{\mathcal{L}^{2,2+2\alpha}(\Omega)}$, c'est-à-dire de $\rho^{-\mu}\int_{\Omega(x_0,\rho)}\left|u - u_{x_0,\rho}\right|^2 dx$, avec $x_0 \in \Omega$ quelconque et $0 < \mu < d_\Omega$.

Pour ce faire on se ramène au cas de l'ouvert :

$$\Omega_1 = \{z = \rho e^{i\theta}\,,\; 0 < \rho < 1\,,\; 0 < \theta < \omega\}\,.$$

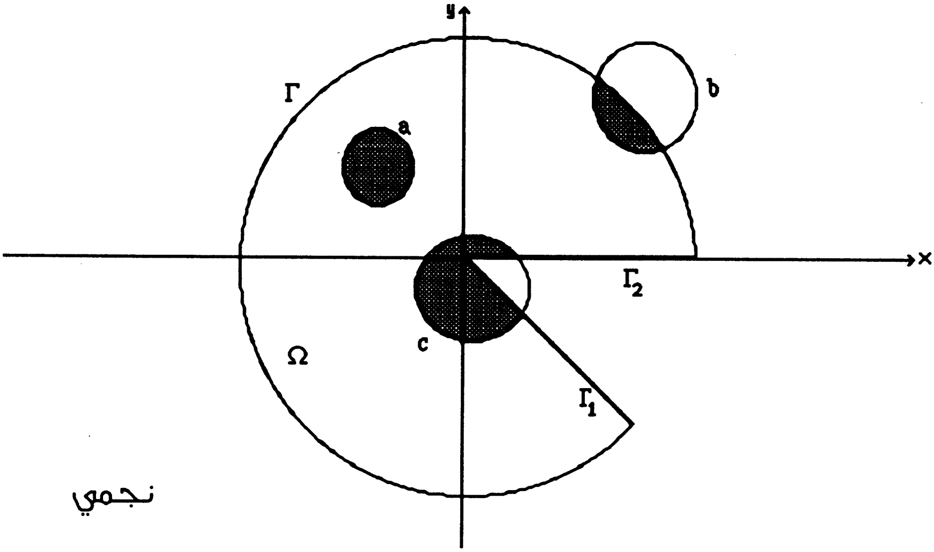
Il y a quatre cas possibles (voir figure 1, ci-dessous) :

a) $B(x_0, \rho) \subset \Omega_1$ et donc $\Omega(x_0, \rho) = B(x_0, \rho)$.

b) $x_0 \neq 0$ et $0 \notin B(x_0, \rho)$.

c) $x_0 \neq 0$ et $0 \in B(x_0, \rho)$.

d) $x_0 = 0$.



نجمي

Fig. 1

Les cas a) et b) ont été étudiés par Campanato [7], [8]. Le cas c) se ramène au cas d) en utilisant (5.4). Enfin le cas d) a été étudié au paragraghe 5.

Au total, on obtient :

$$\rho^{-2(1+\alpha)} \int_{\Omega(x_0,\rho)} \left|u(y) - u_{x_0,\rho}\right|^2 \mathrm{d}y \leq C|\lambda|^{-2} \|g\|^2_{C^\alpha(\Omega_1)} \quad \text{pour } x_0 \in \Omega_1 .$$

Le lemme 2.1 implique alors la majoration (1.1) □

Remarque 6.1.— Dans son article [12], Grisvard a montré le résultat suivant.

THÉORÈME 6.2.— *Pour $\delta > 0$, il existe une constante K telle que la solution u de :*

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta u + \lambda u = g \ \textit{dans}\ C(\overline{\Omega})$$

vérifie la majoration :

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u_R\|_\infty + |\lambda|\,\|u_R\|_\infty + |\lambda|^{1-\frac{\nu}{2}}|c| \le K\|g\|_\infty$$

pour tout λ tel que $|\arg\lambda| \le \pi - \delta$. c étant la constante intervenant dans la décomposition de u en partie régulière u_R et en partie singulière (cf. [12]).

Comme corollaire à ce théorème, on a :

COROLLAIRE 6.3.— *Pour tout $\beta < \nu$, tout $\delta > 0$ et tout λ tel que $|\arg\lambda| \le \pi - \delta$, il existe C telle :*

$$\|u\|_{C_0^\beta(\overline{\Omega})} \le C|\lambda|^{-1+\frac{\beta}{2}}\|g\|_\infty .$$

Comme conséquence du théorème 1.1 et du corollaire 6.3, on obtient par interpolation linéaire le théorème suivant :

THÉORÈME 6.4.— *Il existe une constante C telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re\lambda > 0$ et u solution du problème de Dirichlet :*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad et \quad -\Delta u + \lambda u = g\,, \quad avec\ g \in C_0^\alpha(\overline{\Omega})\,,\ 0 \le \alpha < \nu\,.$$

Alors :

$$\|u\|_{C_0^\beta(\overline{\Omega})} \le C|\lambda|^{-1+\frac{\beta-\alpha}{2}}\|g\|_{C_0^\alpha(\overline{\Omega})} .$$

En d'autres termes, le comportement en $|\lambda|$ de la résolvante du laplacien, en tant qu'opérateur de $C_0^\alpha(\overline{\Omega})$ dans $C_0^\beta(\overline{\Omega})$ est de l'ordre de $|\lambda|^{-1+\frac{\beta-\alpha}{2}}$. □

7. Appendice sur les ouverts fissurés

La propriété du cône n'est plus vérifiée dans le cas où G est le disque unité de $\mathbb{R}^2$ avec fissure ($\omega = 2\pi$) (cf. [10]). On a :

$$G = \{(x,y)\,,\ x^2+y^2 \le 1\,,\ x<0 \text{ si } y=0\}\,.$$

DÉFINITION 1.7.— *$C^\beta(G)$ est l'espace des fonctions continues sur G vérifiant : il existe une constante C telle que :*

$$|u(x) - u(y)| \le C d_G(x,y)^\beta$$

pour tous x et y dans G. d_G est la distance géodésique dans G ; c'est-à-dire que $d_G(x,y)$ est le plus court chemin qui joint x à y en restant dans G. □

On pose :

$$G_1 = \{z = r\,e^{i\theta}\,,\ 0 < r < 1\,,\ 0 < \theta < 3\pi/2\}$$
$$G_2 = \{z = r\,e^{i\theta}\,,\ 0 < r < 1\,,\ \pi/2 < \theta < 2\pi\}$$

et $G = G_1 \cup G_2$; et chacun des deux a la propriété du cône. On a :

$$u \in C^\beta(G) \quad \Leftrightarrow \quad u_i \in C^\beta(G_i)\,,\ i = 1,2 \text{ et } u_1(x,0) = u_2(x,0)\,,\ x < 0\,.$$

LEMME 7.1.— *Si G est le disque unité de $\mathbb{R}^2$ avec fissure, alors :*

$$u \in \mathcal{L}^{2,2+2\beta}(G) \Rightarrow u \in C^\beta(G) \quad et \quad \|u\|_{\beta,G} \le C[u]_{\mathcal{L}^{2,2+2\beta}(G)}\,.$$

Démonstration.— Soit u dans $\mathcal{L}^{2,\mu}(G)$, alors la restriction de u à G_i est dans $\mathcal{L}^{2,\mu}(G_i)$. En effet, il existe K telle que pour tout x dans G et tout r dans $]\,0\,,\,1\,[$

$$\int_{G(x,r)} \left|u(y) - u_{x,r}\right|^2 \mathrm{d}y \le Kr^\mu\,.$$

Montrons pour la même constante K, pour tout x dans G_i et tout r dans $]\,0\,,\,1\,[$ qu'on a :

$$\int_{G_i(x,r)} \left|u(y) - u_{G_i(x,r)}\right|^2 \mathrm{d}y \le 4Kr^\mu\,.$$

On pose $A = G(x,r)$ et $B_i = G_i(x,r)\cdot i = 1,2$. On a $A \supset B_i$. Sachant que :

$$\left(u - u_A\right)_{B_i} = u_{B_i} - u_A\,,$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\|u - u_{B_i}\|_{L^2(B_i)} &\le \|u - u_A\|_{L^2(B_i)} + \left\|\left(u - u_A\right)_{B_i}\right\|_{L^2(B_i)}\\ &\le \|u - u_A\|_{L^2(A)} + \left|\left(u - u_A\right)_{B_i}\right|\ |B_i|^{\frac12}\\ &\le \left(Kr^\mu\right)^{\frac12} + \|u - u_A\|_{L^2(B_i)}\\ &\le 2\left(Kr^\mu\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

D'où $u\big|_{G_i} \in \mathcal{L}^{2,\mu}(G_i)$ qui est inclus dans $C^{\frac{\mu}{2}-1}(\overline{G_i})$ et donc $u \in C^{\frac{\mu}{2}-1}(G)$.

Bibliographie

[1] ADEYEYE (J.O.) .— *Generation of analytic semi group in $L^p(\Omega)$ by the Laplace operator*, Bolletino U.M.I., Série VI, Vol. IV CNI (1985)

[2] ACQUISTAPACE (P.) and TERRENI (B.) .— *Characterization of some interpolation spaces*, Pubb. Dip. Math. Univ. Pisa (June 1984)

[3] AGMON (S.) .— *On the eigenfunctions and the eigenvalues...* Com. Pure. Appl. Math., **15** (1962) pp. 119-147

[4] AGMON (S.), DOUGLIS and NIRENBERG .— *Estimates near the boundary for...* Com. Pure. Appl. Math., **12** (1951) pp. 623-727

[5] BOLLEY, CAMUS, PHAM THE LAÏ .— *Estimation de la résolvante du problème de Dirichlet dans les espaces de Hölder*, C.R.A.S. Paris, **305** Série I (1987) pp. 253-256

[6] CAMPANATO (S.) .— *Sistemi ellitici in forma divergenza. Regularità all'interno*, Scuola Normale Superiore Quaderni, Pisa (1980)

[7] CAMPANATO (S.) .— *Generation of analytic semi group by elliptic operators of 2d order in Hölder spaces*, Ann. Scuola NOR. Sup. Pisa **8** (1981)

[8] CAMPANATO (S.) .— *Generation of analytic semi group in Hölder topology*, Le Mathematiche, **35** Fasc. I.II (1983)

[9] GIUSTI (E.) .— *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, (6) Pitagora editrice, Bologna (1978)

[10] GRISVARD (P.) .— *Elliptic problems in non smooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, **24** (1985) Pitman

[11] GRISVARD (P.) .— *Résolvante du laplacien dans un polygone et singularités des équations élliptiques et paraboliques*, CRAS. **301** Série I n° 5 (1985)

[12] GRISVARD (P.) .— *Majoration en norme du maximum de la résolvante du laplacien dans un polygone*, Preprint n° 217 Nice (janvier 1989)

[13] GRISVARD (P.) .— *Le problème de Dirichlet dans $W^{1,p}(\Omega)$*, Portugaline Mathematica, Vol. 43, **4** (1985-86)

[14] NEČAS (J.) .— *Nonlinear elliptic equations*, A Wiley Interscience Publ. Weley, New-York (1986)

[15] SOBOLEVSKII (P.E.) .— *On equations of parabolic type in Banach spaces*, Amer. Math. Soc. Trans., **49** (1965) pp. 1-62

[16] STAMPACCHIA (G.) .— *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus,...* Les Presses de l'Université de Montréal (été 1965)

[17] STEWART (H.B.) .— *Generation of analytic semi group by strongly elliptic operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **259** (1980) pp. 299-310

[18] TANABÉ (H.) .— *Equations of evolution*, Pitman, London/San-Fransisco, Melbourne (1979)

[19] VON WAHL .— *Gebrochene Potenzen eines elliptichen operators und paraboliche...* Nach. Akad. Wiss Gottingen Math-Phys., KL II (1972) pp. 231-258

[20] VON WAHL .— *Einige Bemerkungen su Meiner Arbeit "Gebrochene Potenzen eines..."*, Manuscripta Math., **11** (1974) pp. 199-201, Springer-Verlag.