ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MUSTAPHA MOKHTAR-KHARROUBI

Quelques applications de la positivité en théorie du transport

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 1 (1990), p. 75-99

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_1_75_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 1, 1990

Quelques applications de la positivité en théorie du transport

MUSTAPHA MOKHTAR-KHARROUBI[1]

RÉSUMÉ. — La motivation initiale de ce travail provient d'un problème linéaire classique de la théorie cinétique des gaz (modèle B.G.K. monodimensionnel). Ce problème a déjà été résolu à l'aide de différentes méthodes. Nous en proposons une autre découlant *très simplement* de résultats généraux d'estimation de la valeur propre dominante de l'opérateur de transport. Pour cela nous utilisons un résultat de comparaison *stricte* de rayons spectraux d'opérateurs positifs d'Ivo Marek. Ce résultat permet aussi de montrer que la valeur propre dominante croît *strictement* avec le domaine spatial et l'opérateur de collision. Indépendamment du résultat d'Ivo Marek nous donnons une minoration très fine de la valeur propre principale en dimension un, et proposons une nouvelle approche de l'irréductibilité du semigroupe de transport.

ABSTRACT. — This work was, initially, motivated by a classical linear problem in the kinetic theory of gases (one dimensional B.G.K. model). This problem has, already, been solved by different methods. We give another approach to this problem based on general estimates of the leading eigenvalue of transport operators. To this end we use a comparison result of spectral radii of positive operators by Ivo Marek. This result permits also to prove that the leading eigenvalue increases *strictly* with the spatial domain and the collision operator. Independently of Marek's result we give a very precise lower bound of the leading eigenvalue in one dimension, and another approach of the irreducibility of the transport semigroup.

0. Introduction

Nous utilisons un théorème de comparaison (stricte) de rayons spectraux d'opérateurs positifs, de I. Marek [1], pour montrer que le problème aux limites (apparaissant en cinétique des gaz) :

[1] Université de Franche-Comté Besançon, Faculté des Sciences et des Techniques, Laboratoire de Mathématiques, route de Gray, 25030 Besançon

$$\begin{cases} -v \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \psi(x,v) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v'^2} \psi(x,v')\,\mathrm{d}v' = S(x,v) \\ \text{avec } \psi(-a,v) \text{ et } \psi(a,-v) \text{ connus pour } v \text{ positif} \\ (\text{où } x \in\,]-a\,,\, a[\text{ et } a \text{ est fini}) \end{cases}$$

est bien posé dans un espace à poids convenable. Ce problème a déjà été résolu [2], [3], [4]. Nous en donnons, ici, une démonstration complètement différente découlant, *très simplement*, de résultats d'estimation de spectres d'opérateurs de Transport *généraux*, basés sur la positivité.

Nous utiliserons aussi le résultat d'I. Marek pour montrer que la plus grande valeur propre réelle d'un opérateur de Transport croît *strictement* avec le domaine (ou l'opérateur de collision). Nous proposons une approche directe de la stricte dominance de la valeur propre principale, en utilisant le résultat d'I. Marek. Nous donnons aussi une nouvelle approche de l'irréductibilité du semi-groupe de Transport. Enfin nous obtenons une minoration *très fine* de la première valeur propre, en dimension un.

La positivité a toujours joué un rôle important en neutronique depuis, notamment, G. Birkhoff [5]. Les problèmes de Transport ont même suscité des travaux sur les semi-groupes positifs (voir [6] et les références qui s'y trouvent). On trouvera dans le papier de J. Voigt [7] un exposé général sur la positivité dans les problèmes d'évolution de la neutronique.

Nous abordons, dans le présent article, des questions différentes liées, elles aussi, à la positivité. Nous commencerons, tout d'abord, par rappeler un problème de la cinétique des gaz qui a été la première motivation de ce travail.

L'équation de Boltzmann mono-dimensionnelle et stationnaire, linéarisée autour d'une maxwellienne conduit, lorsque le noyau de collision est remplacé par le modèle B.G.K., au problème suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} -v \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \psi(x,v) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v'^2} \psi(x,v')\,\mathrm{d}v' = S(x,v) \\ \psi(-a,v) = h_1(v) \qquad \text{pour } v > 0 \\ \psi(a,v) = h_2(v) \qquad \text{pour } v < 0 \end{cases}$$

où $x \in\,]-a\ a[$ et a est un paramètre positif *fini*.

Ce problème a déjà été résolu par R. Beals [2] et H.G. Kaper [3] à l'aide de techniques de décomposition spectrale d'opérateurs, très sophistiquées.

En fait, R. Beals [2] étudie un problème abstrait beaucoup plus général, contenant comme cas particuliers notamment l'équation de Fokker-Planck mono-dimensionnelle et le problème (1). J.L. Lions [4] en a donné une approche très différente, par "régularisation elliptique". Elle consiste, en gros, à perturber le problème (1) par le terme d'ordre supérieur $\epsilon v^2 \cdot \partial^2\psi/\partial x^2$. Le problème perturbé (P_ϵ) admettra une formulation variationnelle dans un espace à poids adéquat. Des estimations a priori sur la solution ψ_ϵ de (P_ϵ) permettent de passer à la limite et de résoudre (1). Enfin l'unicité se démontre directement par un argument de dissipativité.

Dans le présent papier, nous donnons un autre point de vue sur le problème (1). C'est une approche *très simple et très naturelle*. Notre idée, *très simple*, repose sur le fait que la plus grande valeur propre réelle d'opérateur de Transport général [sous une hypothèse de positivité stricte que l'on précisera par la suite], dans un domaine *borné*, est *strictement* plus petite que celle de la partie bornée de l'opérateur de Transport. Ceci nous permettra de résoudre de manière *immédiate* le problème (1).

Remarque 0. — Il existe un résultat analogue, pour un opérateur de transport particulier ([8], th. 1, p. 1199) basé sur une technique différente de la notre. □

Il est vrai que dans [2], [3], certains opérateurs liés à (1) sont finement analysés. Mais, si l'on se limite, uniquement, au problème de l'existence et l'unicité d'une solution de (1), notre approche est plus générale que les précédentes, puisqu'elle n'est pas liée à la forme du noyau de collision, ni au cadre hilbertien, ni, enfin (et surtout), à la *dimension un*.

Un résultat d'Ivo Marek ([1], th. 4.3) jouera, ici, un rôle crucial. En voici un *cas particulier* adapté aux problèmes que nous avons en vue.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$, et $E = L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$. On se donne deux opérateurs θ_1 et θ_2 dans $\mathcal{L}(E)$, positifs (= laissant invariant le cône des fonctions positives) et admettant une itérée compacte. On notera $r\sigma(\theta)$ le rayon spectral de tout opérateur borné θ. On a alors le :

THÉORÈME 0 ([1] th. 4.3). — *On suppose que $\theta_1 \leq \theta_2$ (i.e. $\theta_2 - \theta_1 \geq 0$). Si $r\sigma(\theta_1) > 0$ et s'il existe un entier N tel que :*

$$\theta_2^N u > 0 \textit{ presque partout pour tout } u \geq 0\,,\ u \neq 0\,,$$

alors : $r\sigma(\theta_2) > r\sigma(\theta_1)$ si $\theta_2 \neq \theta_1$. □

Le rôle joué par les rayons spectraux dans la caractérisation de la plus grande valeur propre en neutronique, rend le théorème 0 particulièrement précieux pour l'étude de celle-ci.

Le présent papier comprendra les sections suivantes :

I Une inégalité spectrale en théorie du Transport.

II Application à un problème de la cinétique des gaz.

III Une minoration explicite de la valeur propre principale en dimension 1.

IV Propriétés de croissance stricte de la valeur propre principale.

V Stricte dominance de la valeur propre principale.

VI Une nouvelle approche de l'irréductibilité en neutronique.

Dans la section I, on étudie l'opérateur de Transport homogène général dans L^p ($1 \leq p < +\infty$). On montrera que si *une itérée* de l'opérateur de collision est strictement positive (i.e. son noyau est > 0 presque partout), alors la valeur propre principale de l'opérateur de Transport, pour *un domaine borné*, est strictement plus petite que celle de la partie bornée de l'opérateur de Transport (théorème 1). Dans la section II, on appliquera le théorème 1 pour résoudre le problème (1) (théorème 2). Dans la section III, on complètera le théorème 1 par un théorème *très fin* d'existence et de minoration de la valeur propre principale, en dimension 1 lorsque $p = 2$ et l'opérateur de collision est positif dans L^2 (au sens du produit scalaire) [théorème 3]. Dans la section IV, on montre que si le noyau de collision est strictement positif sur une couronne, alors la valeur propre principale croît strictement avec le domaine (= l'espace des positions); on montre aussi qu'en présence de deux opérateurs de collision K_1 et K_2 tels que : $K_1 \leq K_2$, $K_1 \neq K_2$ et le noyau de K_2 strictement positif sur une couronne; alors la valeur propre principale de l'opérateur de Transport associé à K_1 est strictement plus petite que celle de l'opérateur de Transport associé à K_2 (théorème 4). Dans la section V, nous donnons une *approche directe* de l'existence d'une valeur propre strictement dominante, basée sur l'étude de l'*opérateur de Transport lui-même* (théorème 5) (généralement ce problème a été résolu par l'examen du *semigroupe de transport* [7]). Enfin, dans la section VI, nous proposons une *nouvelle* approche de l'irréductibilité du semi-groupe de Transport différente de celle de J. Voigt [7].

I. Une inégalité spectrale en théorie du Transport

Soit D un ouvert *borné* de $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$ et V un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$. On désigne par A l'opérateur de transport classique :

$$A\psi = -v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sigma(v)\psi(x,v) + \int_V K(v,v')\psi(x,v')\,\mathrm{d}v' = T\psi + K\psi$$

de domaine :

$$D(A) = \left\{ \psi \in L^p(D \times V) \mid v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \in L^p(D \times V)\,,\ \psi_{\Gamma_-} = 0 \right\}$$

où p est fini $(1 \leq p < +\infty)$
et $\Gamma_- = \{(x,v) \in \partial D \times V \mid v$ est rentrant en $x \in \partial D\}$.
K, l'opérateur de collision, désigne la partie intégrale de A.

Nous faisons les hypothèses classiques suivantes :

(2) $$\sigma(\,\cdot\,) \in L^\infty(V) \quad \text{et} \quad K \in \mathcal{L}(L^p(V))\,.$$

Nous faisons aussi l'hypothèse *importante* suivante :

(3) une itérée de K est strictement positive.

Enfin, on suppose que :

(4) K est compact dans $L^p(V)$.

Soit $\lambda^* = \inf \sigma(\,\cdot\,)$. On désigne par B la partie bornée de A :

$$B\varphi(v) = -\sigma(v)\varphi(v) + \int_V K(v,v')\varphi(v')\,\mathrm{d}v'\,, \quad \varphi(\,\cdot\,) \in L^p(V)\,.$$

Il s'ensuit de (4) que $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > -\lambda^*\}$ est formé, au plus, de valeurs propres isolées ([9] lemma 2.1). Il est aussi connu que la valeur propre de A de plus grande partie réelle est réelle ([10], th. 12.16, p. 281). Enfin, par le lemme de Weyl, $\sigma(B) \cap \{\Re\lambda > -\lambda^*\}$ est aussi formé, au plus, de valeurs propres isolées.

THÉORÈME 1.— *Soit $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > -\lambda^*\} \neq \emptyset$ et soit λ_1, la plus grande valeur propre réelle de A. Alors :*

$$\sigma(B) \cap \{\Re\lambda > -\lambda^*\} \neq \emptyset \quad et \quad \lambda_1 < \overline{\lambda}\,,$$

(quelle que soit la taille (finie) de D).
où $\overline{\lambda}$ est la plus grande valeur propre réelle de B. □

Remarque 1.— Nous avons déjà démontré ce théorème, mais avec l'inégalité *large* $\lambda_1 \leq \overline{\lambda}$ ([11] th. 2) sous l'hypothèse (plus faible que (3)) que $K(v,v') \geq 0$. C'est le problème (1) qui nous a poussé à *affiner* ce théorème. □

Preuve du théorème 1.— Considérons le problème spectral :

$$B\varphi = -\sigma(v)\varphi(v) + \int_V K(v,v')\varphi(v')\,\mathrm{d}v' = \lambda\varphi(v)\,, \quad (\lambda > -\lambda^*) \tag{5}$$

(5) est clairement équivalent à :

$$S_\lambda\varphi = \int_V \frac{K(v,v')\varphi(v')}{\lambda + \sigma(v)}\,\mathrm{d}v' = \varphi(v)\,. \tag{6}$$

Il est clair que S_λ est positif compact (en raison de (4)) dans $L^p(V)$. (6) montre que son rayon spectral $r\sigma(S_\lambda)$ est > 0. Par le théorème de Krein-Rutman, $r\sigma(S_\lambda)$ est une valeur propre de S_λ dépendant continuement de λ ([12] Chap. 0, th. 03). On vérifie facilement que $r\sigma(S_\lambda)$ décroît, au sens large, en λ. En fait cette décroissance est stricte. En effet : s'il existe $\lambda_1 > \lambda_2$ tels que $r\sigma(S_{\lambda_1}) = r\sigma(S_{\lambda_2})$, on aura $r\sigma(S_\lambda) = r\sigma(S_{\lambda_1}) \neq 0$ pour $\lambda \in [\,\lambda_1\,,\,\lambda_2\,]$, ce qui contredit le théorème de Gohberg-Shmulyan ([10], th. 11.4, p. 258). Ainsi :

$$\lambda \to r\sigma(S_\lambda) \text{ décroît strictement en } \lambda > -\lambda^*$$

de sorte que la plus grande valeur propre réelle $\overline{\lambda}$ de B, *si elle existe*, est caractérisée par l'égalité :

$$r\sigma(S_{\overline{\lambda}}) = 1\,. \tag{7}$$

Soit, maintenant, λ_1 la plus grande valeur propre réelle de A. Il existe $\psi \in L^p(D \times V)$ telle que $A\psi = \lambda_1\psi$. Donc :

$$\begin{aligned} \psi(x,v) &= (\lambda_1 - T)^{-1}K\psi = \\ &= \int_0^{s(x,v)} e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s}\,\mathrm{d}s \int_V K(v,v')\psi(x-sv,v')\,\mathrm{d}v'\,, \end{aligned} \tag{8}$$

où $s(x,v) = \inf\{s > 0 \mid x - sv \notin D\}$.

Prolongeons ψ par zéro en dehors de D, et notons :

$$\varphi(v) = \int_D |\psi(x,v)|\,\mathrm{d}x \quad (\varphi(\,\cdot\,) \in L^p(V))\,.$$

Sachant que $s(x,v) \leq {}^{d}/_{|v|}$, où d est le diamètre de D, on a :

$$
\begin{aligned}
\varphi(v) &= \int_D |\psi(x,v)| \,\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_D \mathrm{d}x \int_0^{d/|v|} e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s} \,\mathrm{d}s \int_V K(v,v')|\psi(x-sv,v')| \,\mathrm{d}v' \\
&= \int_0^{d/|v|} e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s} \,\mathrm{d}s \int_V K(v,v') \,\mathrm{d}v' \int_D \mathrm{d}x \,|\psi(x-sv,v')| \leq \\
&\leq \int_0^{d/|v|} e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s} \,\mathrm{d}s \int_V K(v,v') \,\mathrm{d}v' \int_{\mathbf{R}^n} |\psi(x-sv,v')| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{d/|v|} e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s} \,\mathrm{d}s \int_V K(v,v')\varphi(v') \,\mathrm{d}v' \\
&= \int_V K(d,\lambda_1,v,v')\varphi(v') \,\mathrm{d}v'
\end{aligned}
\tag{9}
$$

où $K(d,\lambda_1,v,v') = K(v,v') \int_0^{d/|v|} e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s} \,\mathrm{d}s$.

Notons K_d l'opérateur intégral dans $L^p(V)$, de noyau $K(d,\lambda_1,v,v')$. De (9), on déduit :

$$
r\sigma(K_d) \geq 1\,. \tag{10}
$$

Soit K_∞ l'opérateur intégral dans $L^p(V)$ de noyau :

$$
K(\infty,\lambda_1,v,v') = \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\sigma(v))s} \,\mathrm{d}s \cdot K(v,v') = \frac{K(v,v')}{\lambda_1+\sigma(v)}\,.
$$

On notera que K_∞ n'est rien d'autre que S_{λ_1}.

Il est clair que K_d et K_∞ sont compacts (en raison de (4)) et positifs (= laissent invariant le cône des fonctions positives). D'autre part, il est clair que $K_d \leq K_\infty$ et $K_d \neq K_\infty$.

Or en raison de (3), K_∞ admet une itérée strictement positive d'où ([1], th. 4.3) :

$$
r\sigma(K_d) < r\sigma(K_\infty) = r\sigma(S_{\lambda_1})\,. \tag{11}
$$

Comparant (10) et (11) on obtient :

$$
r\sigma(S_{\lambda_1}) > 1\,. \tag{12}
$$

Si l'on compare (12) à (7), on voit que $\sigma(B) \cap \{\lambda > -\lambda^*\} \neq \emptyset$ et que :

$$\lambda_1 < \overline{\lambda} \tag{13}$$

où $\overline{\lambda}$, la plus grande valeur propre réelle de B, est caractérisée par (7). Ceci achève la démonstration. □

Remarque 2. — On peut estimer supérieurement la plus grande valeur propre de A, en fonction du diamètre de D ([11], th. 3). □

Remarque 3. — Le type de condition aux limites considérées ici, joue un rôle fondamental dans la validité du théorème 1. Ce dernier est sûrement faux, en dimension 1, avec des conditions aux limites ***périodiques***, puisqu'on peut facilement vérifier que le spectre de la partie bornée ***fait alors partie*** du spectre de l'opérateur de Transport. □

II. Application à un problème de la cinétique des gaz

L'équation (1) suggère l'espace fonctionnel :

$$H = \left\{ \psi(x,v) \mid \int_{-a}^{+a} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi(x,v)\, e^{-\frac{v^2}{2}} \right|^2 \mathrm{d}v < +\infty \right\} =$$
$$= L^2\left((-a,a) \times (-\infty,\infty)\,;\ \mathrm{d}\rho(v)\,\mathrm{d}x\right)$$

où $\mathrm{d}\rho(v) = e^{-v^2}\,\mathrm{d}v$.

Il est clair que, dans cet espace, la partie intégrale de (1) définit un opérateur borné. La solution (éventuelle) de (1) sera donc dans :

$$W = \left\{ \psi \in H \mid v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \in H \right\}. \tag{14}$$

Les éléments de W admettent des traces en $-a$ de a. L'espace des traces en $-a$ est ([4]) :

$$Q = \left\{ g \text{ mesurables} \mid \int_{-\tau}^{\tau} |v|\, |g(v)|^2\, \mathrm{d}v + \int_{|v|>\tau} e^{-v^2} |g(v)|^2\, \mathrm{d}v < +\infty \right\} \tag{15}$$

où $\tau > 0$ est arbitraire. Au point a, on a aussi le même espace de traces.

En toute généralité, on devrait, compte-tenu de (15), étudier le problème (1) avec h_1 (prolongée par zéro pour $v < 0$) et h_2 (prolongée par zéro pour

$v > 0$) dans l'espace défini par (15). En fait, on se limitera (comme dans [4]) au cas où :

$$\int_0^\infty e^{-v^2}|h_1(v)|^2\,\mathrm{d}v + \int_{-\infty}^0 e^{-v^2}|h_2(v)|^2\,\mathrm{d}v < +\infty\,. \tag{16}$$

La formulation du problème (1) est donc :

trouver $\psi \in W$ telle que :

$$\begin{cases} -v\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \psi(x,v) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-v^2}\psi(x,v)\,\mathrm{d}v = S(x,v) & \\ \psi(-a,v) = h_1(v) & \text{si } v>0 \\ \psi(a,v) = h_2(v) & \text{si } v<0 \\ h_1 \text{ et } h_2 \text{ vérifiant (16)} & \\ S\in H\,. & \end{cases} \tag{17}$$

On définit :

$$\widetilde{\psi}(x,v) = \begin{cases} h_1(v) & \text{si } v>0 \\ h_2(v) & \text{si } v<0. \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{\psi} \in W$, admet les mêmes traces, en a et $-a$, que ψ. Ainsi ψ est solution du problème (17) si et seulement si $u = \psi - \widetilde{\psi}$ est solution du problème homogène :

trouver $u \in W$ telle que :

$$\begin{cases} -v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} - u(x,v) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-v^2}u(x,v)\,\mathrm{d}v = \widetilde{S}(x,v) & \\ u(-a,v) = u(a,-v) = 0 & \text{si } v>0 \end{cases} \tag{18}$$

où $\widetilde{S}(x,v) = S(x,v) + \widetilde{\psi}(v) - (1/\sqrt{\pi})\int_{\mathbf{R}} e^{-v^2}\widetilde{\psi}(v)\,\mathrm{d}v \in H$.

Les idées développées jusqu'ici sont classiques [4].

Soit $\varphi(x,v) = e^{-\frac{v^2}{2}}u(x,v)$ et $f(x,v) = e^{-\frac{v^2}{2}}\widetilde{S}(x,v)$. Il est clair que u est solution de (18) si et seulement si φ est solution du problème :

trouver $\varphi \in L^2\left((-a,a)\times(-\infty,\infty)\,;\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right) \mid$

$$v\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} \in L^2\left((-a,a)\times(-\infty,\infty)\,;\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right)$$

$$\begin{cases} -v\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi(x,v) + \displaystyle\int_{\mathbf{R}} K(v,v')\varphi(x,v')\,\mathrm{d}v' = f(x,v) & \\ \varphi(-a,v) = \varphi(a,-v) = 0 & \text{si } v>0 \\ f(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in L^2\left((-a,a)\times(-\infty,\infty)\,;\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right) = L^2 & \end{cases} \tag{19}$$

où $K(v,v') = (1/\sqrt{\pi})\, e^{-\frac{v^2}{2}} e^{-\frac{v'^2}{2}}$ définit un opérateur compact K (de rang un) dans $L^2(-\infty,\infty)$ (pour la mesure de Lebesgue usuelle).

On peut exprimer (19) de la manière abstraite suivante :

$$A\varphi = -v \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\varphi = f \tag{20}$$

où A désigne l'opérateur de transport complet dans $L^2\left((-a,a) \times (-\infty,\infty)\right)$ (muni de la mesure de Lebesgue) et où B désigne une partie bornée (dans L^2) de A.

Il est clair que (20) admet une unique solution pour tout $f \in L^2$, si et seulement si 0 n'appartient pas au spectre de A que l'on note $\sigma(A)$.

THÉORÈME 2.— *Le problème (19) (et par conséquent le problème (17)) admet une solution unique. Celle-ci est positive si les données le sont.*

Preuve.— La partie bornée, B, de l'opérateur de Transport A apparaissant dans (20), admet zéro comme unique valeur propre associée à la fonction propre $e^{-\frac{v^2}{2}}$ (résultat classique). D'après le théorème 1, on a $\sigma(A) \subset \{\Re\lambda < 0\}$ pour tout a positif *fini*. Ainsi A^{-1} existe et est positif ([6], th. 3.3 partie b)). □

III. Une minoration explicite de la valeur propre principale en dimension 1

Plaçons-nous dans un cadre hilbertien ($p = 2$), et considérons l'opérateur de Transport défini en section I, sous les hypothèses (2) et (4). Si l'on suppose de plus que V est symétrique par rapport à l'origine, que $\sigma(v)$ et $K(v,v')$ sont paires par rapport à v, et enfin que l'opérateur de collision K est positif dans $L^2(V)$ au sens du produit scalaire, alors on montre ([13], th. 2) le résultat suivant : si $\sigma(B) \cap \{\lambda > -\lambda^*\} \neq \emptyset$, alors il apparaitra de plus en plus de valeurs propres de A quand la taille de D augmente, et toutes ces valeurs propres tendent vers la plus grande valeur propre de B quand la taille de D tend vers l'infini.

Dans la présente section, on verra qu'en dimension 1 (la bande), une minoration *explicite et très précise* de la première valeur propre est possible.

On suppose donc :

$$D =]-a\,,a[\quad \text{et} \quad V =]-b\,,b[\,, \quad (0 < a < +\infty\,;\ 0 < b \leq +\infty)\,.$$

Nos hypothèses seront :

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} K(v,v') = K(-v,v')\,,\ \sigma(v) = \sigma \\ K \text{ est positif dans } L^2(-b,b) \text{ (au sens du produit scalaire).} \end{cases}$$

On notera que (21) est satisfaite dans l'exemple (19).

Soit $\overline{K}(v,v') = {K(v,v')}/{\sqrt{|v|}\sqrt{|v'|}}$.

On définit l'opérateur (non forcément borné) $\overline{K}$:

$$\overline{K}\varphi(v) = \int_{-b}^{b} \overline{K}(v,v')\varphi(v')\,\mathrm{d}v'\,.$$

Si l'on désigne par $\sqrt{K}({1}/{\sqrt{|\cdot|}})$, l'opérateur densément défini :

$$\varphi(\cdot) \to \sqrt{K}\left(\frac{\varphi(\cdot)}{\sqrt{|\cdot|}}\right)$$

alors on pourra définir $\overline{K}$ par :

$$\text{(22)} \qquad \overline{K} = \left[\sqrt{K}\left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right)\right]^* \left[\sqrt{K}\left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right)\right]$$

où $\sqrt{K}$ est la racine carrée positive de K.

THÉORÈME 2.— *Sous* (4) *et* (21) *on a :*

1) $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > -\sigma\} \neq \emptyset$ *pour tout* $a > 0$ *si et seulement si l'opérateur* $\overline{K}$ *n'est pas borné;*

2) si $\overline{K}$ *est borné, alors* $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > -\sigma\} \neq \emptyset$ *si et seulement si* $a\,\|\overline{K}\| > 1$*;*

3) si $a > \overline{a} = {2}/{\|K\|}$*, alors la plus grande valeur propre réelle de* A*, notée* $\lambda(a)$*, vérifie l'inégalité :*

$$-\sigma + \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{a\|K\|}}\right]\frac{\|K\|}{2} < \lambda(a) < -\sigma + \|K\|\,.$$

Preuve.— Sans perte de généralité, on pourra se restreindre au cas : $\sigma = 0$. Avant d'attaquer le cas d'un opérateur de collision K positif général, on va examiner le cas séparable : $\widetilde{K}(v,v') = f(v)f(v')$ (où $f(\cdot) \in L^2(-b,b)$).

Nous avons déjà étudié les propriétés spectrales de l'opérateur de transport $\widetilde{A}$ associé à $\widetilde{K}$ ([12], Chap. 1).

$\lambda > 0$ est une valeur propre de $\widetilde{A}$
si et seulement si il existe $\varphi(\,\cdot\,) \in L^2(-a,a)$ telle que :

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{a} E(\lambda|x-x'|)\varphi(x') = E_\lambda\varphi \tag{23}$$

(voir [12], p. 14), où :

$$E(\lambda|x|) = \int_0^b \frac{h(v)}{v}\, e^{-\frac{\lambda|x|}{v}}\, \mathrm{d}v$$

avec $h(v) = f(v)^2 = h(-v)$;
[les formules sont établies dans [12] pour $b = 1$; mais, en fait, elles sont valables pour tout b (même infini)].

On vérifie ([12], p. 15) que :

$$(E_\lambda\psi,\psi) = \int_{\mathbf{R}} \left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \int_{-b}^{b} \frac{\lambda h(v)\,\mathrm{d}v}{\lambda^2+\omega^2v^2} \tag{24}$$

où $\widehat{\psi}(\omega) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-a}^{a} e^{-ix\omega}\psi(x)\,\mathrm{d}x$.

On démontre aussi ([12], lemme 1.1, p. 17) que :

$$\lim_{\lambda\to 0} \|E_\lambda\| \geq a \int_{-b}^{b} \frac{h(v)}{|v|}\,\mathrm{d}v\,. \tag{25}$$

Enfin ([12], th. 1.11, p. 31), la plus grande valeur propre $\widetilde{\lambda}(a)$ de $\widetilde{A}$ vérifie l'inégalité :

$$\begin{cases} \widetilde{\lambda}(a) > \left[1+\sqrt{1-\dfrac{2}{a\|h\|_{L^1}}}\right]\dfrac{\|h\|_{L^1}}{2} \\ \text{si } a > \dfrac{2}{\|h\|_{L^1}}\,. \end{cases} \tag{26}$$

Considérons, maintenant, le problème spectral suivant :
(27)

$$-v\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-b}^{b} K(v,v')u(x,v')\,\mathrm{d}v' = \lambda u(x,v) = Tu + Ku = Au \quad (\lambda > 0)\,.$$

(27) équivaut à :

$$(28) \qquad (\lambda - T)^{-1} K u = u$$

lequel est équivalent à :

$$(29) \qquad \sqrt{K}(\lambda - T)^{-1}\sqrt{K} q = H_\lambda q = q$$

où $q = \sqrt{K} u$, et $\sqrt{K}$ est la racine carrée positive de K.

Utilisant des arguments identiques à ceux de [14] (section IV) on vérifie que $H_\lambda = \sqrt{K}(\lambda - T)^{-1}\sqrt{K}$ est positif compact dans $L^2\big((-a,a)\times(-b,b)\big)$, et que :

$$(30) \qquad (H_\lambda \varphi, \varphi) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\omega \int_{-b}^{b} \lambda \frac{|\sqrt{K}\widehat{\varphi}(\omega, v)|^2}{\lambda^2 + v^2\omega^2}\, \mathrm{d}v\,,$$

où $\widehat{\varphi}(\omega, v') = \big(1/\sqrt{2\pi}\big) \int_{-a}^{a} \varphi(x, v')\, e^{-ix\omega}\, \mathrm{d}x$.

Prenons des fonctions test $\varphi(x, v)$ de la forme :

$$\varphi(x, v) = \psi(x) g(v)$$

avec $\|\psi\|_{L^2(-a,a)} = \|g(\,\cdot\,)\|_{L^2(-b,b)} = 1$.

On voit, en utilisant (30), que :

$$(31) \qquad \|H_\lambda\| \geq (H_\lambda \varphi, \varphi) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\omega |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \int_{-b}^{b} \lambda \frac{|\sqrt{K} g(v)|^2}{\lambda^2 + v^2\omega^2}\, \mathrm{d}v\,.$$

Fixons $g(\,\cdot\,) \in L^2(-b, b)$ de norme 1. Si l'on compare (31) à (24) avec $h(v) = |\sqrt{K} g(v)|^2$, on en déduit que :

$$(32) \qquad \|H_\lambda\| \geq \|E_\lambda\|$$

et donc (voir (25)) :

$$(33) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \|H_\lambda\| \geq a \int_{-b}^{b} \left| \frac{\sqrt{K} g(v)}{\sqrt{|v|}} \right|^2 \mathrm{d}v$$

pour tout $g(\,\cdot\,) \in L^2(-b, b)$ de norme 1.

Si $\overline{K}$ n'est pas borné, alors $(^1/\sqrt{|\cdot|})\sqrt{K}$ ne peut pas l'être en raison de (22). D'où, par le théorème du graphe fermé, il existera $g(\cdot) \in L^2(-b,b)$ (de norme 1) telle que :

$$\frac{\sqrt{K}g(v)}{\sqrt{|v|}} \notin L^2(-b,b)\,.$$

Avec ce choix de $g(\cdot)$, (33) montre que :

$$\lim_{\lambda \to 0} \|H_\lambda\| = +\infty \quad \text{pour tout } a\,.$$

Donc, pour tout $a > 0$, $\exists\ \lambda = {}^{\lambda(a)}/_{\|H_\lambda\|} = 1$. Ce qui signifie que A admet toujours une valeur propre.

Maintenant, si $\overline{K}$ est borné, $(^1/\sqrt{|\cdot|})\sqrt{K}$ le sera, et donc (33) (valable pour tout $g(\cdot)$ de norme 1) montre que :

$$(34) \qquad \lim_{\lambda \to 0} \|H_\lambda\| \geq a \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right) \sqrt{K} \right\|^2 = a\|\overline{K}\|\,.$$

Ainsi A admettra une valeur propre si $a\|\overline{K}\| > 1$.

Inversement, supposons que l'on ait $a\|\overline{K}\| \leq 1$:

$H_\lambda = \sqrt{K}(\lambda - T)^{-1}\sqrt{K}$ peut s'écrire (on omet les détails)

$$(35) \qquad H_\lambda = \left[\sqrt{K}\left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right)\right] \theta_\lambda \left[\left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right)\sqrt{K}\right]$$

où θ_λ, défini pour tout $\lambda \geq 0$, vérifie :

$$(36) \qquad \|\theta_\lambda\| \leq a \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0\,.$$

Si l'on combine (35) et (36), on voit que :

$$(36') \qquad \|H_\lambda\| \leq a \left\|\sqrt{K}\left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right)\right\| \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{|\cdot|}}\right)\sqrt{K}\right\| = a\|\overline{K}\|\,.$$

D'autre part, on vérifie, facilement, que $\|H_\lambda\|$ décroît, au sens large, en λ. Comme H_λ est analytique en λ, cette décroissance est *stricte*, et donc :

$$(37) \qquad \|H_\lambda\| < a\|\overline{K}\| \quad \text{pour tout } \lambda > 0\,.$$

Ainsi $\sigma(A) \cap \{\lambda > 0\} = \emptyset$ si $a\|\overline{K}\| \leq 1$.

On a donc établi les parties 1) et 2) du théorème.

Voyons la partie 3).

On rappelle que la plus grande valeur propre réelle, $\widetilde{\lambda}(a)$, de $\widetilde{A}$ est caractérisée par :

$$\|E_{\widetilde{\lambda}(a)}\| = 1 .$$

De même, $\lambda(a)$, la plus grande valeur propre de A est caractérisée par :

$$\|H_{\lambda(a)}\| = 1 .$$

Ainsi (32) et (26) impliquent :

$$\lambda(a) \geq \widetilde{\lambda}(a) > \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{a\|h\|_{L^1}}}\right] \frac{\|h\|_{L^1}}{2} \tag{38}$$

où $h(v) = |\sqrt{K}\, g(v)|^2$ avec $g(\,\cdot\,)$ arbitraire de norme 1.

Prenant, pour $g(\,\cdot\,)$, la fonction propre de $\sqrt{K}$ associée à sa norme, on voit que :

$$\lambda(a) > \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2}{a\|K\|}}\right] \frac{\|K\|}{2} \tag{39}$$

pour tout $a > \overline{a} = {}^2/_{\|K\|}$.

On a donc achevé la preuve du théorème □

Remarque 4.— Pour le cas particulier (19), d'autres résultats fins sont possibles : réalité des valeurs propres ([12] cor. 1.2, p. 23) majoration de leur nombre ([12] th. 1.7, p. 23) etc... □

IV. Propriétés de croissance stricte de la valeur propre principale

On se restreindra (uniquement pour la simplicité de l'exposé) à des opérateurs de Transport homogènes dans des domaines convexes. Soient donc D_1 et D_2 deux ouverts convexes tels que :

$$D_1 \subset D_2 \quad \text{et} \quad D_1 \neq D_2 \tag{40}$$

et soient K_1 et K_2 deux opérateurs de collision tels que :

$$K_1(v,v') \leq K_2(v,v') \text{ presque partout et } \quad K_1 \neq K_2\,. \tag{41}$$

On suppose qu'il existe une couronne $V_0 = [{}^{v}/_{a} \leq |v| \leq b]$ telle que $V_0 \subset V$ et :

$$K_2(v,v') > 0 \quad \text{sur } (V \times V_0) \cup (V_0 \times V)\,. \tag{42}$$

On supposera que K_2 vérifie (4).

Soit T l'opérateur "d'absorption" :

$$T\psi = -v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \sigma(v)\psi(x,v) \tag{42'}$$

dans $L^p(D \times V)$ (avec les conditions aux limites habituelles).

T sera noté T_1 ou T_2 selon que $D = D_1$ ou $D = D_2$.

On notera A_1 et A_2 les opérateurs de Transport :

$$\begin{cases} A_1 = T_1 + K_1 \quad \text{et} \quad A_2 = T_1 + K_2 \\ \text{dans } L^p(D_1 \times V)\,. \end{cases} \tag{43}$$

Enfin, on notera $\widetilde{A}_2$ l'opérateur de Transport :

$$\begin{cases} \widetilde{A}_2 = T_2 + K_2 \\ \text{dans } L^p(D_2 \times V)\,. \end{cases} \tag{44}$$

Soit α le type de e^{tT} ([15], lemma 1.1) :

$$\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{si } 0 \notin \overline{V} \\ -\liminf\limits_{v \to 0} \sigma(v) & \text{si } 0 \in \overline{V}. \end{cases} \tag{45}$$

On remarquera qu'il ne dépend pas du domaine D.

$\lambda(\theta)$ désignera la plus grande valeur propre réelle (lorsqu'elle existe) supérieure à α, d'un opérateur θ.

THÉORÈME 4

(a) Si $\lambda(A_1)$ existe, alors, $\lambda(A_2)$ existe, et $\lambda(A_1) < \lambda(A_2)$

(b) Si $\lambda(A_2)$ existe, alors, $\lambda(\widetilde{A}_2)$ existe, et $\lambda(A_2) < \lambda(\widetilde{A}_2)$.

Preuve. — Commençons par (a).

K_2 étant compact dans $L^p(V)$, $(\lambda - T_1)^{-1}K_2$ admettra une itérée compacte ([9], lemma 2.1). Donc $\sigma(A_2) \cap \{\Re\lambda > \alpha\}$ est formé de valeurs propres isolées. Comme $(\lambda - T_1)^{-1}K_1 \leq (\lambda - T_1)^{-1}K_2$, $(\lambda - T_1)^{-1}K_1$ admettra une itérée compacte [16], et donc $\sigma(A_1) \cap \{\Re\lambda > \alpha\}$ sera aussi discret.

Soit $\lambda_1 = \lambda(A_1)$. On sait que λ_1 est caractérisée par :

$$r\sigma\Big[(\lambda_1 - T_1)^{-1}K_1\Big] = 1\,.$$

En raison de la convexité de D_1 et de (42), on vérifie facilement que $\Big[(\lambda_1 - T_1)^{-1}K_2\Big]^2$ est un opérateur intégral à noyau strictement positif presque partout.
On peut donc appliquer le théorème 0 avec $\theta_1 = (\lambda_1 - T_1)^{-1}K_1$, $\theta_2 = (\lambda_1 - T_1)^{-1}K_2$ et $N = 2$. On a donc :

$$r\sigma\Big[(\lambda_1 - T_1)^{-1}K_2\Big] > 1\,.$$

Ainsi il existe $\lambda_2 > \lambda_1$, unique tel que :

$$r\sigma\Big[(\lambda_2 - T_1)^{-1}K_2\Big] = 1$$

i.e. $\lambda_2 = \lambda(A_2)$. Ceci achève (a).

Examinons maintenant (b).

Supposons que $\lambda_2 = \lambda(A_2)$ existe. Il existe donc $\psi \in L^p(D_1 \times V)$ telle que :

$$\psi(x,v) = \int_0^{s_1(x,v)} e^{-(\lambda_2+\sigma(v))s}\,\mathrm{d}s \int_V K_2(v,v')\psi(x - sv\,,\,v')\,\mathrm{d}v' \tag{46}$$

où $s_1(x,v) = \inf\{s > 0 \mid x - sv \notin D_1\}$.

Soit $\widetilde{\psi}(x,v) \in L^p(D_2 \times V)$ égale à ψ pour $x \in D_1$, et nulle sur $D_2 - D_1$. Il est clair que (46) peut s'écrire :

$$\widetilde{\psi}(x,v) = \alpha(x) \int_0^{s_2(x,v)} e^{-(\lambda_2+\sigma(v))s}\,\mathrm{d}s \int_V K_2(v,v')\widetilde{\psi}(x - sv\,,\,v')\,\mathrm{d}v' \tag{47}$$

où $\alpha(\cdot)$ est l'indicatrice de D_1 et :

$$s_2(x,v) = \inf\{s > 0 \mid x - sv \notin D_2\} \geq s_1(x,v)\,.$$

On écrira (47) sous la forme abstraite :

$$\widetilde{\psi} = G\widetilde{\psi} \tag{48}$$

où G est un opérateur positif dans $L^p(D_2 \times V)$.

(48) implique :

$$r\sigma(G) \geq 1\,. \tag{49}$$

D'autre part, on a $G \leq (\lambda_2 - T_2)^{-1}K_2$, donc G admet une itérée compacte ([16]). Il est aussi très clair que $G \neq (\lambda_2 - T_2)^{-1}K_2$ puisque $D_1 \neq D_2$. Enfin, comme précédemment, $\left[(\lambda_2 - T_2)^{-1}K_2\right]^2$ est strictement positif. Ainsi, l'application du théorème 0 donne :

$$r\sigma\left[(\lambda_2 - T_2)^{-1}K_2\right]^2 > 1 \tag{50}$$

d'où l'existence de $\lambda_3 > \lambda_2$ unique tel que :

$$r\sigma\left[(\lambda_3 - T_2)^{-1}K_2\right]^2 = 1$$

i.e. $\lambda_3 = \lambda_2(\widetilde{A})$, (b) est donc établie. □

Remarque 5.— Il est clair que les inégalités larges, dans le théorème 4, sont triviales et classiques. Ce sont les inégalités *strictes* qui font tout l'intérêt et (à notre connaissance) la nouveauté du résultat. □

Remarque 5′.— On peut montrer à l'aide de raisonnements analogues que si $\sigma_1(\cdot) \geq \sigma_2(\cdot)$ et $\sigma_1(\cdot) \neq \sigma_2(\cdot)$ alors la valeur propre principale associée à $\sigma_1(\cdot)$ est strictement plus petite que celle qui correspond à $\sigma_2(\cdot)$. □

V. Stricte dominance de la valeur propre principale

On considère l'opérateur de transport général :

$$\left\{\begin{array}{l} A\psi = T\psi + K\psi = -v \cdot \dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \sigma(x,v)\psi(x,v) + \displaystyle\int_V K(x,v,v')\psi(x,v')\,\mathrm{d}v' \\ \text{assorti des conditions aux limites habituelles (flux rentrant nul),} \end{array}\right.$$

nous savons, depuis I. Vidav [17], que si :

(51) une itérée de $(\lambda - T)^{-1}K$ est compacte $(\Re\lambda > \alpha)$

(où α est le type de e^{tT}) et si :

((52) $\sigma(\cdot\,,\cdot)$ est réelle et $K(x,v,v') \geq 0$ p.p.,

alors, lorsque $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > \alpha\}$ n'est pas vide, il existe une valeur propre réelle *dominante*, i.e. supérieure ou égale à la partie réelle de toute valeur propre de A.

Il est important, en neutronique, de savoir qu'elle est, en fait *strictement dominante*, i.e. strictement plus grande que la partie réelle de toute autre valeur propre de A. Ce problème a été attaqué par une technique de semi-groupe qui consiste à étudier le *spectre périphérique du semi-groupe* e^{tA} (voir, par exemple, [18] et [7]).

Ici, nous proposons une *approche directe* du problème, consistant à étudier *le générateur* A lui-même.

Outre (51) et (52), nous ferons les hypothèses suivantes :

(53) D est convexe.

Il existe $V_0 \subset V$ jouissant de la propriété :

(54) $\left\{\begin{array}{l}\text{toute demi-droite } P\text{, issue de zéro, rencontre } V_0 \\ \text{suivant une partie (de } P\text{) de mesure non nulle.}\end{array}\right.$

On notera que V_0 peut être, par exemple, une couronne centrée en zéro. Enfin :

(55) $K(x,v,v') > 0$ p.p. sur $(D \times V_0 \times V) \cup (D \times V \times V_0)$.

Remarque 6.— L'hypothèse (55) est analogue à celle assurant l'irréductibilité de e^{tA} [(7], th. 3.2). □

THÉORÈME 5.— *On suppose* (51), (52), (53), (54), et (55).

Si $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > \alpha\} \neq \emptyset$, *alors il existe une valeur propre réelle strictement dominante.* □

Preuve.— Remarquons, tout d'abord, que $r\sigma\left[(\lambda - T)^{-1}K\right] > 0$ pour tout $\lambda > \alpha$. En effet :

$K(\lambda - T)^{-1}K$, pour tout $\Re\lambda > \alpha$, est un opérateur intégral dans $L^p(D \times V)$ dont le noyau est (grâce à la convexité de D) :

$$N(\lambda, x, x', v, v') = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \exp\left\{ - \int_0^s \sigma\left(x - \frac{\tau(x - x')}{t}, \frac{x - x'}{t}\right) \mathrm{d}\tau \right\} \times \\ \times K\left(x, v, \frac{x - x'}{t}\right) K\left(x', \frac{x - x'}{t}, v'\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

(les fonctions $\sigma(\cdot, \cdot)$ et $K(\cdot, \cdot, \cdot)$ sont prolongées par zéro en dehors de leurs domaines respectifs).

Le noyau de l'opérateur $\left[(\lambda - T)^{-1}K\right]^2$ est alors :

(56)

$$M(\lambda, x, x', v, v') = \int_0^{s(x,v)} e^{-\int_0^s \sigma(x - \tau' v, v)\, \mathrm{d}\tau'} N(\lambda, x - sv, x', v, v')\, \mathrm{d}s\,.$$

On voit, lorsque λ est réel, que $N(\lambda, x, x', v, v') > 0$ p.p. (en raison de l'hypothèse (55)). D'où $M(\lambda, x, x', v, v') > 0$ p.p. Ainsi ([19], th. 4) :

$$r\sigma\left(\left[(\lambda - T)^{-1}K\right]^2\right) > 0$$

et donc, par application du théorème de l'application spectrale :

$$r\sigma\left[(\lambda - T)^{-1}K\right] > 0\,.$$

L'application $\lambda \to r\sigma\left[(\lambda - T)^{-1}K\right]$ est alors continue et strictement décroissante ([12], Chap. 0), de sorte que la plus grande valeur propre réelle $\overline{\lambda}$, lorsqu'elle existe, est *caractérisée* par :

(57) $$r\sigma\left[(\overline{\lambda} - T)^{-1}K\right] = 1\,.$$

Si $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > \alpha\} \subset \mathbf{R}$, la plus grande valeur propre réelle est, évidemment, strictement dominante!

Supposons qu'il existe λ complexe (i.e. *non réel*) dans $\sigma(A) \cap \{\Re\lambda > \alpha\}$. On a $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ (λ_1, λ_2 dans $\mathbf{R}$) avec $\lambda_1 > \alpha$ et $\lambda_2 \neq 0$.

On a donc $[(\lambda - T)^{-1}K]^2\psi = \psi$ avec $\psi \neq 0$, $\psi \in L^p(D \times V)$, i.e. :

(58) $$\int_{D \times V} M(\lambda, x, x', v, v')\psi(x', v')\, \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}v' = \psi(x, v)$$

d'où :

$$\int_{D\times V} |M(\lambda,x,x',v,v')|\,|\psi(x',v')|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}v' \geq |\psi(x,v)|\,. \tag{59}$$

On notera $\left|\left[(\lambda-T)^{-1}K\right]^2\right|$ l'opérateur intégral (positif) de noyau : $|M(\lambda,x,x',v,v')|$. (59) implique donc que :

$$r\sigma\left[\left|\left[(\lambda-T)^{-1}K\right]^2\right|\right] \geq 1\,. \tag{60}$$

D'autre part, utilisant (56), on peut écrire $M(\lambda,x,x',v,v')$ sous la forme :
(61)

$$M(\lambda,x,x',v,v') = \int_0^{s(x,v)}\int_0^{\infty} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\, e^{-i\lambda_2(t+s)}\sqrt{f(s,t,x,x',v,v')}\times \\ \times\sqrt{f(s,t,x,x',v,v')}$$

où $f(s,t,x,x',v,v') \geq 0$.

On vérifie, aussi, *qu'à* (x,x',v,v') *fixé*, la fonction $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,x,x',v,v')$ n'est pas identiquement nulle.

Comme $\lambda_2 \neq 0$, et comme $e^{-i\lambda_2(t+s)}\sqrt{f(s,t)}$ et $\sqrt{f(s,t)}$ *ne sont pas proportionnelles*, l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à (61) est *stricte*, i.e. :

$$\left|M(\lambda,x,x',v,v')\right|^2 < \left[\int_0^{s(x,v)}\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\, f(s,t,x,x',v,v')\right]^2,$$

i.e.

$$\left|M(\lambda,x,x',v,v')\right| < M(\lambda_1,x,x',v,v') \text{ p.p.} \tag{62}$$

Donc :

$$\left|\left[(\lambda-T)^{-1}K\right]^2\right| \neq \left[(\lambda_1-T)^{-1}K\right]^2. \tag{63}$$

Il est clair, d'autre part, que $\left|\left[(\lambda-T)^{-1}K\right]^2\right| \leq \left[(\lambda_1-T)^{-1}K\right]^2$.

Appliquant le théorème 0, et tenant compte de (60), on obtient alors :

$$r\sigma\left(\left[(\lambda_1-T)^{-1}K\right]^2\right) > r\sigma\left(\left|\left[(\lambda-T)^{-1}K\right]^2\right|\right) \geq 1\,.$$

Par le théorème de l'application spectrale il s'ensuit que :

$$r\sigma\left((\lambda_1-T)^{-1}K\right) > 1\,.$$

Ainsi il existe $\overline{\lambda} > \lambda_1 = \Re\lambda$, unique, tel que :

$$r\sigma\Big((\overline{\lambda} - T)^{-1}K\Big) = 1\,.\,\square$$

Remarque 7.— En fait le théorème 5 est valable si (seulement) *une itérée de* $(\lambda - T)^{-1}K$ (pour $\lambda > \alpha$) est strictement positive. Nous avons introduit les hypothèses (53) et (55) afin de nous limiter à l'itérée d'ordre 2. □

VI. Une nouvelle approche de l'irréductibilité en neutronique

Considérons l'opérateur de transport général de la section précédente assorti des hypothèses (51) et (52). Rappelons que (51) est vérifiée si K est compact dans $L^p(V)$ à x fixé dans D ([9], lemma 2.1).

DÉFINITION 1.— *Un opérateur positif Q dans $L^p(D \times V)$ sera dit strictement positif si $Q\varphi$ est strictement positive presque partout pour tout* $\varphi \geq 0$, $\varphi \neq 0$. □

L'intérêt de l'irréductibilité de e^{tA} réside dans le fait qu'elle implique que la valeur propre principale (lorsqu'elle existe) est algébriquement simple et le projecteur spectral associé strictement positif. Ainsi si cette valeur propre est strictement dominante on récupère une description *très simple* du comportement asymptotique ($t \to +\infty$) de la solution du problème de Cauchy :

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = A\psi\,, \quad \psi(0) = \psi_0 \geq 0\,.$$

On dispose du critère de J. Voigt ([7], th. 3.2) suivant : si (55) est satisfaite avec $V_0 = \big\{v \mid 0 \leq a < |v| < b \leq +\infty\big\}$ alors e^{tA} est strictement positif pour $t > {}^{d}/_{b}$ (où d est le diamètre de D) *et donc* est irréductible. Nous proposons ici une approche différente du problème. Ainsi, on a le :

THÉORÈME 6.— *S'il existe un entier N tel que $\Big[(\lambda - T)^{-1}K\Big]^N$ est strictement positif* ($\lambda > \alpha$) *alors e^{tA} est irréductible.* □

Remarque 8.— Si D est convexe et si (55) est satisfaite, alors $N = 2$ répond à la question. On récupère, ainsi, une condition suffisante d'irréductibilité analogue à celle de J. Voigt par une démarche différente.

Preuve du théorème 6.— Partons de :

$$(\lambda - A)^{-1} = \left[1 - (\lambda - T)^{-1}K\right]^{-1}(\lambda - T)^{-1} \quad \text{si } \Re\lambda > \alpha \text{ et } \lambda \notin \sigma(A).$$

Comme $r\sigma\left[(\lambda - T)^{-1}K\right]$ est continue et strictement décroissante en $\lambda > \alpha$, alors $r\sigma\left[(\lambda - T)^{-1}K\right] < 1$ pour tout $\lambda > \lambda_0$ (où λ_0 est la borne spectrale de A), d'où :

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(\lambda - T)^{-1}K\right]^n(\lambda - T)^{-1} \quad \text{pour } \lambda > \lambda_0 .$$

Il est clair, alors, que :

$$(\lambda - A)^{-1} \geq \left[(\lambda - T)^{-1}K\right]^N(\lambda - T)^{-1} \quad \text{pour } \lambda > \lambda_0 .$$

Or e^{tA} est irréductible si $(\lambda - A)^{-1}$ est strictement positive pour tout $\lambda > \lambda_0$ ([20], p. 306). □

Remarque 9.— On notera que la preuve du théorème 6 est générale et peut donc s'adapter aux cas de semi-groupes positifs e^{tA} dans des Banachs abstraits orientés par un cône [où $A = T + K$ et sous l'hypothèse (51)]. □

Remarque 10.— Si l'on compare les hypothèses du théorème 6 à la remarque 7, on se rend compte que l'irréductibilité de e^{tA} semble *liée* à la stricte dominance de la valeur propre principale. □

Remarque finale.— Les résultats des sections I, IV, V et VI s'étendent sans difficulté au modèle multigroupe de l'équation de Transport. □

J'aimerai remercier mon ami M. Kirane d'avoir attiré mon attention sur [4], et d'avoir, ainsi, suscité le présent papier.

Références

[1] MAREK (I.) .— *Frobenius theory of positive operators : Comparison theorems and applications,*
Siam J. Appl. Math. Vol. **19**, n°3 (1970)

[2] BEALS (R.) .— *An abstract treatment of some Forward-Backward problems of Transport and Scattering,*
J. Funct. Anal. **34** (1979) pp. 1-20

[3] KAPER (H.G.) .— *Boundary value problems of mixed type arising in the kinetic theory of gases,*
Siam J. Math. Anal. Vol. **10**, n°1 (1979) pp. 161-179

[4] LIONS (J.L.) .— *A linear problem arising in kinetic theory of gases,*
dans Proc. Internat. Sympos. Inst. Mat. Univ. Federal Rio de Janeiro (1977) pp. 284-346, North-Holland Math. Studies **30** Amsterdam (1978)

[5] BIRKHOFF (G.) .— *Positivity and criticality. In the Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Nuclear reactor theory,*
Am. Math. Soc. (1961)

[6] GREINER (G.), VOIGT (J.) and WOLFF (M.) .— *On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators,*
J. Op. Theory **5** (1981) pp. 245-256

[7] VOIGT (J.) .— *Positivity in time dependent linear transport theory,*
Acta Applicandæ Mathematicæ **2** (1984) pp. 311-331

[8] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.L.) .— *Analyse mathématique et calcul numérique,*
Tome **3** Masson, Paris (1985)

[9] MOKHTAR-KHARROUBI (M.) .— *The time asymptotic behaviour and the compactness in neutron transport theory,*
Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique. Paris, 6. R. **86020** (1986)

[10] KAPER (H.G.), LEKKERKERKER (C.G.) and HEJTMANEK (J.) .— *Spectral methods in linear transport theory,*
Birkhäuser Verlag, Basel (1982)

[11] MOKHTAR-KHARROUBI (M.) .— *Some spectral properties of the neutron transport operator in bounded geometries,*
Transport theory and statistical Physics **16(7)** (1987) pp. 935-958

[12] MOKHTAR-KHARROUBI (M.) Thèse de 3$^{\text{ième}}$cycle, Univ. Paris 6 (1983)

[13] MOKHTAR-KHARROUBI (M.) .— *Spectral theory of the neutron transport operator in bounded geometries,*
Transport theory and statistical Phisics **16(4-6)** (1987) pp. 467-502

[14] MOKHTAR-KHARROUBI (M.) .— *Spectral theory of the multigroup neutron transport operator,*
Eur. J. Mech. B/Fluids **9**, n° 2 (1990) pp. 197-222

[15] J. VOIGT .— *Spectral properties of the neutron transport equation,*
J. Math. Anal. Appl. Vol. **106**, n°1 (1985)

[16] **ALIPRANTIS** (C.D.) and **BURKINSHAW** (O.) .— *Positive compact operators on Banach lattices,*
Math. **Z 174** (1980) pp. 289-298

[17] **VIDAV** (I.) .— *Existence and uniqueness of nonnegative eigenfunctions of the Boltzmann operator,*
J. Math. Anal. Appl. **22** (1968) pp. 144-155

[18] **ANGELESCU** (N.) and **PROTOPOPESCU** (V.) .— *On a problem in linear transport theory,*
Rev. Roumaine Phys. **22** (1977) pp. 1055-1061

[19] **VICTORY** (H.D.) .— *Jr. On linear integral operators with nonnegative kernels,*
J. Math. Anal. Appl. Vol **89**, n°2 (1982) pp. 420-441

[20] NAGEL (R.) et *al* .— *One parameter semigroups of positive operators,*
Lecture Notes in Mathematics **1184**, Springer Verlag (1986)