ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MOHAMMED ABLY

Mesure d'approximation simultanée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 2 (1989), p. 259-289

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_2_259_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n°2, 1989

Mesure d'approximation simultanée

MOHAMMED ABLY[1]

RÉSUMÉ. — En direction de la conjecture de Schanuel, P. Philippon a démontré que $\operatorname{degtr}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\big(e^{x_i y_j}\,(1\le i\le k, 1\le j\le l)\big) \ge \dfrac{kl}{k+l} - 1$, où $x_1, \ldots, x_k$ (resp. $y_1, \ldots, y_l$) sont des nombres complexes $\mathbf{Q}$-linéairement indépendants et vérifiant une condition technique de mesure d'indépendance linéaire.

Le but de ce texte est de démontrer l'analogue quantitatif de ce résultat en ce qui concerne les mesures d'approximation simultanées des nombres $e^{x_i y_j}\,(1\le i\le k, 1\le j\le l)$.

ABSTRACT. — In the direction of Schanuel's conjecture, P. Philippon proved that $\operatorname{trdeg}_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}\big(e^{x_i y_j}\,(1\le i\le k, 1\le j\le l)\big) \ge \dfrac{kl}{k+l} - 1$, where $x_1, \ldots, x_k$ (resp. $y_1, \ldots, y_l$) are complex numbers which are linearly independent over $\mathbf{Q}$ and satisfy a technical condition of linear independence measure. The aim of this paper is to prove a quantitative version of the result of P. Philippon concerning the simultaneous approximation measures of the $e^{x_i y_j}\,(1\le i\le k, 1\le j\le l)$.

I. Introduction

Le résultat principal de ce texte consiste à établir une mesure d'approximation simultanée, de certaines familles de nombres en dimension positive ou nulle.

Plus précisément, nous obtenons (cf. Corollaire 1) une mesure d'approximation simultanée, en dimension positive ou nulle, des nombres $e^{x_1 \cdot y_1}, \ldots, e^{x_p \cdot y_q}$ où $x_1, \ldots, x_p$ (resp. $y_1, \ldots, y_q$) sont des nombres complexes Q-linéairement indépendant et vérifiant une hypothèse technique de mesure d'indépendance linéaire.

(1) Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquée, 59655 -Villeneuve d'Ascq, France

Dans le cadre du problème de Gelfond Schneider, nous démontrons(cf. Corollaire 3) une mesure d'approximation simultanée de $\gamma^{\beta}, \ldots, \gamma^{\beta^{d-1}}$ où γ est un nombre algébrique différent de 0 et 1 et β un nombre algébrique de degré $d \geq 2$.

Dans le corollaire 4, nous obtenons une mesure d'approximation simultanée de $\left(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta(\omega)}{\omega}\right)$ où ω est une période primitive du réseau d'une fonction elliptique et $\eta(\omega)$ la quasi-période associée.

Notons que d'autres résultats quantitatifs, sur l'indépendance algébrique ont été démontrés par Yu. Nesterenko $[N_2]$, P. Philippon $[P_2]$, E.M. Jabbouri [J] et G. Philibert [Ph].

L'équivalence entre "mesure d'indépendance algébrique" et "mesure d'approximation simultanée" a été étudiée par P. Philippon dans $[P_2]$; mais une équivalence fine entre ces deux notions, en plusieurs variables, n'est pas établie.

P. Philippon obtient (cf. $[P_2]$, Corollaire 6) une mesure d'approximation simultanée d'une famille de nombres à partir d'une mesure d'indépendance algébrique de celle-ci. Dans ce travail, nous améliorons ce résultat en remplaçant l'exposant de la taille qui intervient dans cette mesure par un exposant plus naturel.

L'outil essentiel, pour la démonstration de ces résultats, est l'algèbre commutative et, en particulier, les techniques de "l'élimination" introduite par Nesterenko (cf. $[N_1]$) dans l'étude des nombres transcendants et développés par P. Philippon dans $[P_1]$.

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans la première partie, nous présentons les résultats auxiliaires et en particulier le lemme 8 qui permet de réduire les hypothèses.

Dans la seconde partie, nous énonçons le critère principal au paragraphe 1 et démontrons des corollaires de ce critère au paragraphe 2. Le paragraphe 3 est consacré à la démonstration du critère principal. Elle se fait en deux étapes; dans la première étape (lemme 9), on réduit les hypothèses. La deuxième étape (lemme 10) utilise essentiellement les techniques de l'élimination projective.

I - NOTATIONS ET RESULTATS AUXILIAIRES

1.— Définitions et notations.

1) Notions de hauteurs et tailles de polynômes à coefficients dans un corps de nombres.

Soit K un corps de nombres. On désigne par M_K l'ensemble des valeurs absolues de K et S_K l'ensemble des valeurs absolues archimédiennes.

Soit $v \in M_K$, on note K_v le complété de K pour la valeur absolue v, $\mathbf{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v, σ_v le plongement de K dans C_v étendant le plongement canonique de K dans K_v et n_v le degré de K_v sur $\mathbf{Q}_v$.

Soit $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_m]$ (resp. $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$) .

Si $v \in S_K$, on note $M_v(P)$ la mesure de Mahler de $\sigma_v(P)$ (resp. P); la mesure de Mahler d'un polynôme Q de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_m]$ est définie par :

$$M(Q) = \exp \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log |Q(e^{2i\pi u_1}, \ldots, e^{2i\pi u_m})| \, du_1 \cdots du_m \text{ si } Q \neq 0$$

et $M(0) = 0$.

Si $v \notin S_K$, on note $M_v(P)$ le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de $\sigma_v(P)$ (resp. P).

On définit les notions de hauteur, hauteur invariante, taille et taille v-adique de P par :

$$\overline{\underline{h}}(P) = \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(P))$$

$$\underline{h}(P) = \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v \cdot \log M_v(P)$$

$$t(P) = \max(1 + \deg P, \overline{\underline{h}}(P))$$

$$t_v(P) = \max(1 + \deg P, \log H_v(P))$$

où $H_v(P)$ désigne le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de $\sigma_v(P)$ (resp. P).

Remarquons que si $v \notin S_K$, $H_v(P) = M_v(P)$.

Remarques.—

Nous utiliserons souvent les inégalités suivantes (cf. [W], p. 26). Soit $v \in S_K$ et $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$, on a :

$$M_v(P) \leq (1 + \deg P)^m H_v(P)$$

$$\text{et} \qquad H_v(P) \leq 2^{\deg P} M_v(P) .$$

On déduit de ces inégalités :

$$t_v(P) \leq ([K : \mathbf{Q}] + 1) \cdot t(P) .$$

Remarquons que pour $P \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_m] \backslash \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} \underline{\overline{h}}(P) &= \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(P)) \\ &= \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in S_K} n_v \cdot \max(0, \log M(P)) \\ &= \log M(P) \end{aligned}$$

puisque $\sum_{v \in S_K} n_v = [K : \mathbf{Q}]$.

2) *Notion de taille sur une extension de* $\mathbf{Q}$ *de type fini.*

L'étude d'une mesure d'approximation d'un point $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbf{C}_v^n$ en dimension k, consiste à minorer, pour tout point $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de $\mathbf{C}_v^n$ dont les coordonnées appartiennent à une extension de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}_v$, de degré de transcendante k sur $\mathbf{Q}$, la quantité $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|_v$, en fonction des tailles (définies ci-dessous) de $\beta_1, \ldots, \beta_n$ dans cette extension.

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que cette extension est de la forme $L = \mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1})$ avec $(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathbf{C}_v^k$ algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et θ_{k+1} entier sur $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_k]$. Un tel système sera appelé un k-système.

Le polynôme minimal de θ_{k+1} sur $\mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ peut s'écrire sous la forme $R(\theta_1, \ldots, \theta_k, X_{k+1})$, où

$$R(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}) = X_{k+1}^{\delta} + R_1(X_1, \ldots, X_k) \cdot X_{k+1}^{\delta-1} + \ldots + R_\delta(X_1, \ldots, X_k)$$

avec $R_i \in \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_k]$, pour tout i, $(i = 1, \ldots \delta)$
et $\delta = [\mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}) : \mathbf{Q}(\theta_1, \ldots, \theta_k)]$.

Un élément B de L s'écrit de manière unique (à des facteurs ± 1 près) sous la forme $\beta = \sum_{i=0}^{\delta-1} \frac{P_i(\underline{\theta})}{Q_i(\underline{\theta})} \cdot \theta_{k+1}^i$ où $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, P_i et Q_i sont des polynômes de $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_k]$ premiers entre eux, pour tout i, $(i = 0, \ldots, \delta - 1)$.

Soient $Q =: \text{ppcm}\{Q_i, (i = 0, \ldots, \delta - 1)\}$ et $S_i =: \frac{Q \cdot P_i}{Q_i}$. On a :

$$Q(\underline{\theta}) \cdot \beta = \sum_{i=0}^{\delta-1} S_i(\underline{\theta}) \cdot \theta_{k+1}^i .$$

On définit, en suivant ([W_1], définition 4.2.1, p. 103) la taille $t(\beta)$ de β "relativement" au système de générateurs $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$ par :

$$t(\beta) = \max\{t(Q), t(S_0), \ldots, t(S_{\delta-1}), \delta\} .$$

Cette taille est indépendante, à une constante près, du système choisi; les tailles d'un élément de L, relativement à deux systèmes de générateurs de L, $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$ et $\{\theta'_1, \ldots, \theta'_{k+1}\}$, sont égales, à une constante $c = c(\underline{\theta}, \underline{\theta}')$ près (cf. [W], Lemme 4.2.22, p. 114). Cela nous amène à la définition suivante :

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}_v^n$ et $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction. On dira que φ est une mesure d'approximation simultanée en dimension k de $\underline{\alpha}$ si pour tout k-système $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ de $\mathbf{C}_v$, il existe $c = c(\underline{\theta}) > 0$ tel que pour tout point $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ appartenant à $(\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}])^n$ dont les coordonnées sont de tailles, relativement à $\underline{\theta}$, inférieures à T, on ait :

$$\max_{1 \le j \le n} |\alpha_j - \beta_j|_v \ge \exp(-\varphi(cT)) .$$

Pour une raison de commodité, nous ferons l'étude par rapport à un k-système $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$ avec $\max_{1 \le i \le k} |\theta_i|_v \le 1$.

On fixe ce système dans toute la suite; R désignera le polynôme minimal de θ_{k+1} sur $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_k]$. La taille d'un élément de $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ sera la taille "relativement au système $\{\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}\}$".

3) Hauteurs sur les variétés.

Dans ce travail, nous utiliserons les notations, définitions et résultats de [P_1].

Ainsi pour un idéal homogène I de $K[X_0, \ldots, X_k]$ de codimension $k+1-r$ et $\underline{d} \in \mathbf{N}^r$, on définit (cf. [$P_1$], définition 1.14), la hauteur d'indice $\underline{d}$ de I (resp. le degré d'indice $\underline{d}$ de I) par

$$Ht_{\underline{d}}(I) =: \underline{h}(f) \quad (\text{resp. } \text{Deg}_{\underline{d}}(I) =: d^\circ f)$$

où f est une forme U éliminante d'indice $\underline{d}$ de I. On note aussi :

$$\|I\|_{\underline{d},v} =: M_v(\widetilde{\delta}_{\underline{\theta},\underline{d}}(f))/M_v(f)$$

où $\underline{\theta} = (1, \theta_1, \ldots, \theta_k)$, $v \in M_K$ et $\widetilde{\delta}_{\underline{\theta},\underline{d}}$ désigne le morphisme défini dans ([P_1], définition 1.15).

Enfin, pour un polynôme $Q \in K[X_1, \ldots, X_k]$, on note ${}^hQ$ l'homogénéïsé de Q dans $K[X_0, \ldots, X_k]$.

4) Notation.

Soient f et g deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on écrira $f \ll g$ s'il existe deux nombres réels positifs x_0 et C tels que pour tout $x > x_0$, $f(x) \leq Cg(x)$.

2.— Résultats auxiliaires.

Les constantes c'_1, $c'_2 \ldots$ qui interviennent dans ces résultats sont explicités afin de rendre les résultats effectifs, mais ce ne sont pas les meilleures constantes possibles.

Rappelons que $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ (resp. R) est le système (resp. le polynôme) introduit dans le paragraphe précédent.

LEMME 1.— *Soient $P \in \mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbf{C}_v^m$. Soit $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{C}_v^m$ tel que $\max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i - z_i|_v \leq \varepsilon < 1$. Alors, on a :*

$$|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \leq \varepsilon \cdot \exp(c'_1 \cdot t_v(P))$$

où $c'_1 = m(2 + \log(1 + \max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i|_v))$.

Démonstration.—

$$|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \leq |P(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)|_v + \cdots + |P(z_1, \ldots, z_{m-1}, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v$$

En majorant les coefficients de P par $e^{t_v(P)}$ et $\max_{1 \leq i \leq m} |z_i|_v$ par $1 + \max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i|_v$, on obtient :

$$\begin{aligned} &|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \\ &\quad \leq (1 + \deg P)^{m-1} \cdot e^{t_v(P)} \cdot (1 + \max_{1 \leq i \leq m} |\gamma_i|_v)^{(m-1)\deg P} \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{m} \max_{0 \leq k \leq \deg P} |\gamma_j^k - z_j^k|_v \,. \end{aligned}$$

or
$$|\gamma_j^k - z_j^k|_v \le |\gamma_j - z_j|_v \cdot \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma_j|_v^i \cdot |z_j|_v^{k-1-i}$$
$$\le \varepsilon \cdot (1 + \max_{1\le j\le m} |\gamma_j|_v)^k .$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} &|P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) - P(z_1, \ldots, z_m)|_v \\ &\quad \le \varepsilon \cdot \exp[m \cdot t_v(P) + m \cdot \log(1 + \max |\gamma_i|_v) \cdot t_v(P) + \log m] \\ &\quad \le \varepsilon \cdot \exp(c_1' \cdot t_v(P)) . \end{aligned}$$

∎

LEMME 2.— *Soient* $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{C}_v^k$ *tel que* $\max_{(i=1,\ldots,k)} |z_i - \theta_i|_v \le \varepsilon < 1$. *Alors, il existe* $z_{k+1} \in \mathbf{C}_v$ *vérifiant :*

$$R(z_1, \ldots, z_{k+1}) = 0 \quad et \quad |z_{k+1} - \theta_{k+1}| \le (\varepsilon \cdot \exp(c_2' \cdot t_v(R)))^{\frac{1}{\delta}}$$

où $c_2' = (k+1)[2 + \log(2 + \max_{(i=1,\ldots,k)} |\theta_i|)]$.

Démonstration.— Soient $u_1, \ldots, u_\delta$ les racines de $R(z_1, \ldots, z_k, X)$, on a :

$$R(z_1, \ldots, z_k, X) = \prod_{i=1}^{\delta} (X - u_i)$$

d'où
$$|R(z_1, \ldots, z_k, \theta_{k+1})|_v \ge (\inf_{i=1,\ldots,\delta} |\theta_{k+1} - u_i|_v)^\delta .$$

Soit z_{k+1} une racine de $R(z_1, \ldots, z_k, X)$ vérifiant :

$$|\theta_{k+1} - z_{k+1}|_v = \inf_{(i=1,\ldots,\delta)} |\theta_{k+1} - u_i|_v .$$

On a, d'après le lemme 1,

$$|R(\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}) - R(z_1, \ldots, z_k, \theta_{k+1})|_v \le \varepsilon \cdot \exp(c_2' \cdot t_v(R))) .$$

Comme $R(\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}) = 0$, on en déduit le résultat. ∎

DÉFINITION .— *(Le semi-résultant de Cudnovskij)*

Soient

$$P(X) = a_0 X^p + \ldots + a_p = a_0 \prod_{i=1}^{p} (X - u_i) \; ; \; a_0 \ne 0$$

$$Q(X) = b_0 X^q + \ldots + b_q = b_0 \prod_{i=1}^{q} (X - t_i) \; ; \; b_0 \ne 0$$

deux polynômes de $\mathbf{C}_v[X]$. *Le semi-résultant de* P *et* Q, *noté* $r(P,Q)$ *est défini par*

$$r(P,Q) = a_0^q \cdot b_0^p \prod_{\substack{(i,j)\\ u_i \neq t_j}} (u_i - t_j) .$$

LEMME 3.— *Il existe un polynôme* G *de* $\mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_p, Y_0, \ldots, Y_q]$ *de hauteur majorée par* 5^{pq} *et de degré au plus* q *en* $(X_0, \ldots, X_p)$ *et, au plus,* p *en* $(Y_0, \ldots, Y_q)$ *et vérifiant :*

$$r(P,Q) = G(a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q) .$$

Démonstration.— Voir ([B], Lemme 2). ∎

LEMME 4.— *On suppose* P *non constant. Soit* ζ *une racine de* P *de multiplicité* s. *Si* $Q(\zeta) \neq 0$, *alors, on a :*

$$0 \neq |r(P,Q)|_v \leq |Q(\zeta)|_v^s \cdot \exp(6 \cdot t_v(P) \cdot t_v(Q)) .$$

Démonstration.— Voir ([R], Lemme 3.8). ∎

LEMME 5.— *Soient* $m \geq 2$ *et* $P \in K[X_1, \ldots, X_m]$. *Soient* $v \in M_K$, A *un nombre réel* ≥ 1 *et* $(z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbf{C}_v^{m-1}$ *tel que* $\max_{(i=1,\ldots,m-1)} |z_i|_v \leq A$. *Alors, on a :*

$$t_v(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)) \leq ([K : \mathbf{Q}] + \log 2A + m) \cdot t(P) .$$

Démonstration.— Si $v \notin S_k$, on a $M_v(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)) \leq A^{\deg P} \cdot M_v(P)$. Si $v \in S_k$, on a :

$$\begin{aligned} M_v(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)) &\leq (1 + \deg P) \cdot H_v(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)) \\ &\leq (1 + \deg P)^m \cdot A^{\deg P} \cdot H_v(P) \\ &\leq (1 + \deg P)^m \cdot A^{\deg P} \cdot 2^{\deg P} \cdot M_v(P) . \end{aligned}$$

Comme $\log M_v(P) \leq [K : \mathbf{Q}] \cdot \overline{h}(P)$, on en déduit le résultat. ∎

LEMME 6.— *Soient* $P_1, \ldots, P_l$ *des polynômes de* $\mathbf{C}_v[X_1, \ldots, X_m]$. *On a :*

si $v \in S_k$, $\quad M_v(\sum_{i=1}^{l} P_i) \leq \sum_{i=1}^{l}(m+1)^{\deg P_i} \cdot M_v(P_i)$

si $v \notin S_k$, $\quad M_v(\sum_{i=1}^{l} P_i) \leq \max_{(i=1,\ldots,l)} M_v(P_i)$.

Démonstration. — Voir [P_1], Lemme 1.13 pour le cas $l = 2$; on démontre de la même façon le résultat pour le cas $l > 2$. ∎

LEMME 7.— *Soient m un entier ≥ 2, P et Q deux polynômes de $K[X_1, \ldots, X_m]$ non nuls. Soient $(z_1, \ldots, z_{m-1}) \in \mathbf{C}_v^{m-1}$ et A un nombre réel ≥ 1 tels que : $\max_{(i=1,\ldots,m-1)} |z_i|_v \leq A$.*

On suppose que $P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)$ est non constant; soit $\zeta \in \mathbf{C}_v$ une racine de $P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)$ de multiplicité s. Si, $Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, \zeta) \neq 0$, alors, il existe $F \in K[X_1, \ldots, X_{m-1}] \backslash \{0\}$ vérifiant :

I) $F(z_1, \ldots, z_{m-1}) = r(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X), Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, X))$

II) $|F(z_1, \ldots, z_{m-1})|_v \leq |Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, \zeta)|_v^s \cdot \exp(c_3' \cdot t(P) \cdot t(Q))$

III) $t(F) \leq c_4' \cdot t(P) \cdot t(Q)$

où $c_3' = 6(\log 2A + m + [K : \mathbf{Q}])^2$ et $c_4' = (4m + 5)$.

Démonstration. — P et Q s'écrivent :

$$P(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{i=0}^{p} P_i(X_1, \ldots, X_{m-1}) X_m^i \text{ où } P_i \in K[X_1, \ldots, X_{m-1}]$$

$$Q(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{j=0}^{q} Q_j(X_1, \ldots, X_{m-1}) X_m^j \text{ où } Q_j \in K[X_1, \ldots, X_{m-1}] .$$

Posons
$$a_i = P_i(z_1, \ldots, z_{m-1}) \quad (i = 0, \ldots, p)$$
$$b_j = Q_j(z_1, \ldots, z_{m-1}) \quad (j = 0, \ldots, q) .$$

D'après le lemme 3, il existe un polynôme G de $\mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_p, Y_0, \ldots, Y_q] \backslash \{0\}$ tel que :
$r(P(z_1, \ldots, z_{m-1}, X), Q(z_1, \ldots, z_{m-1}, X)) = G(a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q)$.

Soit F le polynôme de $K[X_1, \ldots, X_{m-1}]$ défini par :

$$F(\underline{X}) = G(P_0(\underline{X}), \ldots, P_p(\underline{X}), Q_0(\underline{X}), \ldots, Q_q(\underline{X})) .$$

On a bien l'égalité I) du lemme. L'inégalité II) découle du lemme 4 et du lemme 5.

Estimons, maintenant, la taille de F.

On a $\deg F \leq 2 \deg P \cdot \deg Q$. Si $v \in S_K$, on déduit du lemme 6, que :

$$\begin{aligned} M_v(F) \leq & m^{2\deg P \cdot \deg Q} \cdot 5^{\deg P \cdot \deg Q} \cdot (1+\deg P)^{\deg Q} \cdot (1+\deg Q)^{\deg P} \times \\ & \times \big(\max_{(i=0,\ldots,p)} M_v(P_i)\big)^{\deg Q} \times \big(\max_{(j=0,\ldots,q)} M_v(Q_j)\big)^{\deg P} \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} M_v(P_i) & \leq (1+\deg P)^{m-1} \cdot H_v(P) \\ & \leq (1+\deg P)^{m-1} \cdot 2^{\deg P} \cdot M_v(P) \quad \text{pour tout } i, \ (i=0,\ldots,p) . \end{aligned}$$

de même, $M_v(Q_j) \leq (1+\deg Q)^{m-1} \cdot 2^{\deg Q} \cdot M_v(Q)$, pour tout j, $(j = 0, \ldots, q)$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} M_v(F) \leq & m^{2\deg P \cdot \deg Q} \cdot 20^{\deg P \cdot \deg Q} \cdot (1+\deg P)^{m \deg Q} \times \\ & \times (1+\deg Q)^{m \deg P} \cdot (M_v(P))^{\deg Q} \cdot (M_v(Q))^{\deg P} . \end{aligned}$$

Si $v \notin S_K$, $M_v(F) \leq (M_v(P))^{\deg Q} \cdot (M_v(Q))^{\deg P}$.

Or,

$$\begin{aligned} \overline{\underline{h}}(F) = & \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} + \sum_{v \in S_k} n_v \cdot \max(0, \log M_v(F)) + \\ & + \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{v \notin S_K} n_v \cdot \max(0, \log M_v(F)) . \end{aligned}$$

Comme $\sum_{v \in S_K} n_v = [K:\mathbf{Q}]$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \overline{\underline{h}}(F) \leq & 2 \cdot \deg P \cdot \deg Q \cdot \log m + \deg P \cdot \deg Q \log 20 + \\ & + m \cdot \deg Q \cdot \log(1+\deg P) + m \cdot \deg P \cdot \log(1+\deg Q) + \\ & + \deg Q \cdot \overline{\underline{h}}(P) + \deg P \cdot \overline{\underline{h}}(Q) . \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$t(F) \leq c_4' \cdot t(P) \cdot t(Q) \text{ où } c_4' = (4m+5) .$$

LEMME 8.— *Soient* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}_v^n$,

P un polynôme de $K[X_1,\ldots,X_n]$ vérifiant : $|P(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|_v \leq \varepsilon_2 < \dfrac{1}{2}$.

Soient $(\beta_1,\ldots,\beta_n) \in (\mathbf{Z}[\theta_1,\ldots,\theta_{k+1}])^n$ *vérifiant :*

$$\max_{1\leq i\leq n} t(\beta_i) \leq T \ \textit{et} \ \max_{1\leq i\leq n} |\alpha_i-\beta_i|_v \leq \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\ .$$

On suppose que P n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon ε_3 de $\mathbf{C}_v^n$, avec $2\varepsilon_1 \leq \varepsilon_3 < 1$.

Alors, il existe un polynôme P^* (dépendant de P) de $K[Y_1,\ldots,Y_k]$ tel que :

IV) $|P^*(\theta_1,\ldots,\theta_k)|_v \leq (\varepsilon_2+\varepsilon_1)\cdot\exp(c'_8\cdot t(P)\cdot T)$.

V) $t(P^*) \leq c'_9\cdot t(P)\cdot T$

VI) *P^* n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon* $\varepsilon_3^\delta\cdot\exp(-c'_{10}\cdot T)$

$$\begin{aligned}
\textit{où}\quad c'_8 &= 7(4k+n+8)\cdot\left(k+[K:\mathbf{Q}]+\log(2+|\theta_{k+1}|_v)+5\right)^2\cdot t(R)\\
c'_9 &= (4k+10)\cdot(4k+n+8)\cdot t(R)\\
\textit{et}\quad c'_{10} &= 12(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v))\cdot t(R)\ .
\end{aligned}$$

Démonstration. — Rappelons que pour tout i, $(i=1,\ldots,n)$ β_i s'écrit :

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\delta-1} P_{i,j}(\theta_1,\ldots,\theta_k)\cdot\theta_{k+1}^j,\ \text{avec}\ P_{i,j}\in\mathbf{Z}[Y_1,\ldots,Y_k]$$

tel que : $\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq\delta-1}} t(P_{i,j}) \leq T$.

Posons, pour tout i, $(i=1,\ldots,n)$, $S_i(\underline{Y}) = \sum_{j=0}^{\delta-1} P_{i,j}(Y_1,\ldots,Y_k)\cdot Y_{k+1}^j$.

Soit $\widetilde{P}$ le polynôme de $K[Y_1,\ldots,Y_{k+1}]$ défini (en fonction de P) par

$$\widetilde{P}(\underline{Y}) = P\left(S_1(\underline{Y}),\ldots,S_n(\underline{Y})\right)\ .$$

Montrons que $\widetilde{P}(\underline{\theta})$ est "petit". Par définition, $\widetilde{P}(\underline{\theta}) = P(\underline{\beta})$. En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$|P(\underline{\beta})-P(\underline{\alpha})|_v \leq \varepsilon_1\cdot\exp\left(c(\underline{\beta})\cdot t_v(P)\right) \leq \varepsilon_1\cdot\exp[c(\beta)\cdot([K:\mathbf{Q}]+1)\cdot t_v(P)]$$

où $c(\beta) = n\cdot\left(2+\log(1+\max_{(i=1,\ldots,n)}|\beta_i|_v)\right)$.

Or, compte tenu de l'inégalité, $\max_{(i=1,\dots,k)} |\theta_i|_v \leq 1$, on a :

$$|\beta_i|_v \leq \max_{0\leq j\leq \delta-1} H_v(P_{i,j}) \cdot (\deg P_{i,j}+1)^k \cdot (1+|\theta_{k+1}|_v)^\delta \,.$$

Comme $P_{i,j} \in \mathbf{Z}[Y]$,

si $v \notin S_K$, $H_v(P_{i,j}) \leq 1$

si $v \in S_K$, on a (cf. Introduction, remarques)

$$\begin{aligned} H(P_{i,j}) &\leq 2^{\deg P_{i,j}} \cdot M(P_{i,j}) \\ &\leq 2^{\deg P_{i,j}} \cdot e^{\overline{h}(P_{i,j})} \\ &\leq e^{2t(P_{i,j})} \,. \end{aligned}$$

Puisque $\max_{i,j} t(P_{i,j}) \leq T$, on en déduit que :

$$|\beta_i|_v \leq \exp[(k+2+\log(1+|\theta_{k+1}|_v)) \cdot T] \,.$$

Par conséquent, on obtient :

$$|P(\underline{\beta}) - P(\underline{\alpha})|_v \leq \varepsilon_1 \cdot \exp(c_5' \cdot t(P) \cdot T) \,,$$

avec $c_5' = n \cdot (5+k+\log(1+|\theta_{k+1}|_v))([K:\mathbf{Q}]+1)$.

Comme $|P(\underline{\alpha})|_v \leq \varepsilon_2$, on en déduit :

(a) $$|\widetilde{P}(\underline{\theta})|_v \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \exp(c_5' \cdot t(P) \cdot T) \,.$$

Estimation de la taille de $\widetilde{P}$.

Si P s'écrit $P(\underline{X}) = \sum_{j_1,\dots,j_n} p_{j_1,\dots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n}$ $(p_{j_1,\dots,j_n} \in K)$, on a par définition :

$$\widetilde{P}(\underline{Y}) = \sum_{j_1,\dots,j_n} p_{j_1,\dots,j_n} S_1^{j_1}(Y) \cdot \dots \cdot S_n^{j_n}(Y) \,.$$

On a évidemment :

$$\deg \widetilde{P} \leq \deg P \cdot \max_{(l=1,\dots,n)} \deg S_l \leq 2 \cdot \deg P \cdot T \,.$$

En utilisant le lemme 6, on obtient : si

$$v \notin S_K, \quad M_v(\widetilde{P}) \leq M_v(P) \cdot \max_{j_1,\dots,j_n} M_v(S_1^{j_1} \times \ldots \times S_n^{j_n}) \,.$$

Or, puisque pour tout i, $(i=1,\dots,n), S_i \in \mathbf{Z}[\underline{Y}]$, on a donc

$$\max_{j_1,\dots,j_n} M_v(S_1^{j_1}\times\dots\times S_n^{j_n}) \le 1\,,$$

on déduit que : $M_v(\widetilde{P}) \le M_v(P)$.

Si $v \in S_K$, on a :

$$\begin{aligned} M_v(\widetilde{P}) &\le (2+k)^{2\deg P\cdot T}\cdot \sum_{j_1,\dots,j_n} M_v(p_{j_1,\dots j_n} S_1^{j_1}\cdot\dots\cdot S^{j_n}) \\ &\le (2+k)^{2\deg P\cdot T}\cdot H_v(P)\cdot(\max_{1\le i\le n} M_v(S_i))^{\deg P}\cdot(\deg P+1)^n\,. \end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned} M_v(S_i) &\le (1+\deg S_i)^{k+1}\cdot H_v(S_i) \\ &\le (1+\deg S_i)^{k+1}\cdot \max_{0\le j\le\delta-1} H_v(P_{i,j}) \\ &\le (1+\deg S_i)^{k+1}\cdot 2^T\cdot \max_{0\le j\le\delta-1} M_v(P_{i,j}) \\ &\le (2T)^{k+1}\cdot 2^T\cdot e^T \end{aligned}$$

et $H_v(P) \le 2^{\deg P}\cdot M_v(P)$, d'où

$$\begin{aligned} \overline{\underline{h}}(\widetilde{P}) &\le \log[(2+k)^{2\deg P\cdot T}\cdot 2^{\deg P}\cdot(2T)^{k+1}(2e)^T\cdot(\deg P+1)^n]+ \\ &+\sum_{v\in S_K} n_v\cdot\max(0,\log M_v(P)) + \sum_{v\notin S_K} n_v\cdot\max(0,\log M_v(P)) \\ &\le (4k+n+7)\cdot t(P)\cdot T + \overline{\underline{h}}(P)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que :

(b) $$t(\widetilde{P}) \le c'_6\cdot t(P)\cdot T \quad \text{où} \quad c'_6 = (4k+n+8)\,.$$

Posons $\varepsilon_4 = \dfrac{1}{2}\varepsilon_3\cdot\exp(-c'_7\cdot T)$ avec $c'_7 = 2(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v))$.

Montrons que $\widetilde{P}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\theta}$ et de rayon ε_4 de $\mathbf{C}_v^{k+1}$. En effet, supposons qu'il existe $(\theta'_1,\dots,\theta'_{k+1}) \in \mathbf{C}_v^{k+1}$ tel que : $\widetilde{P}(\underline{\theta}') = 0$ et $\max_{1\le j\le k+1} |\theta'_j - \theta_j| \le \varepsilon_4$.

Posons, pour tout i, $(i=1,\dots,n)$, $\beta'_i = S_i(\underline{\theta}')$. On a, par définition, $P(\underline{\beta}'_i) = \widetilde{P}(\underline{\theta}')$.

Pour tout i, $(i=1,\dots,n)$, on a :

$$|\beta'_i - \beta_i|_v = |S_i(\underline{\theta}') - S_i(\underline{\theta})|_v\,.$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}|\beta_i'-\beta_i|_v &\le \varepsilon_4\cdot\exp[(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v))\cdot\max_{1\le i\le n}t_v(S_i)]\\ &\le \varepsilon_4\cdot\exp[2(k+1)\cdot(2+\log(2+|\theta_{k+1}|_v))\cdot T]\\ &\le \varepsilon_4\cdot\exp(c_7'\cdot T)\\ &\le \frac{\varepsilon_3}{2}\end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}|\beta_i'-\alpha_i|_v &\le \max_{1\le i\le n}|\beta_i'-\beta_i|_v+\max_{1\le i\le n}|\alpha_i-\beta_i|_v\\ &\le \frac{\varepsilon_3}{2}+\varepsilon_1\\ &\le \varepsilon_3\,.\end{aligned}$$

$\underline{\beta}'$ est donc un zéro de P et β' appartient à la boule de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon ε_3, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc la propriété (d) suivante :

(d) $\widetilde{P}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $\underline{\theta}$ et de rayon ε_4 de $\mathbf{C}_v^{k+1}$.

Définissons, maintenant le polynôme P^*. Posons :

$$\varepsilon_5=\varepsilon_4^{\delta}\cdot\exp(-c_7'\cdot t_v(R))\,.$$

Soient $(z_1,\dots,z_k)\in\mathbf{C}_v^k$ vérifiant $\max_{(i=1,\dots,k)}|z_i-\theta_i|_v\le\varepsilon_5$. Il existe, d'après le lemme 2, $z_{k+1}\in\mathbf{C}_v$ tel que : $R(z_1,\dots,z_{k+1})=0$ et

$$\begin{aligned}|z_{k+1}-\theta_{k+1}|_v &\le (\varepsilon_5\cdot\exp(c_7'\cdot t_v(R))^{\frac{1}{\delta}}\\ &\le \varepsilon_4\,.\end{aligned}$$

D'après (d), $\widetilde{P}(z_1,\dots,z_{k+1})\neq 0$. Par suite, le lemme 7 assure l'existence d'un polynôme P^* de $K[X_1,\dots,X_n]$ tel que :

$$P^*(z_1,\dots,z_k)=r\big(\widetilde{P}(z_1,\dots,z_k,X),R(z_1,\dots,z_k,X)\big)\,.$$

Puisque pour tout $(z_1,\dots,z_k)$ dans la boule de centre $(\theta_1,\dots,\theta_k)$ et de rayon ε_5 il existe z_{k+1} tel que

$$\widetilde{P}(z_1,\dots,z_{k+1})\neq 0\quad\text{et}\quad R(z_1,\dots,z_{k+1})=0$$

On en déduit que P^* n'a pas de zéro dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $(\theta_1,\dots,\theta_k)$ et de rayon ε_5. Ceci entraîne l'inégalité vi) du lemme.

L'inégalité iv) du lemme découle de l'inégalité ii) du lemme 7 et des inégalités (a) et (b) vérifiées par $\widetilde{P}$.

L'inégalité v) du lemme découle de l'inégalité iii) du lemme 7 et de l'estimation (b) vérifiée par $t(\widetilde{P})$. ∎

II - LE CRITERE PRINCIPAL ET SES COROLLAIRES

On rappelle, qu'on désigne, dans toute la suite, par $\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}$ (resp. R), le système (resp. le polynôme) introduit dans le paragraphe 1 du I.

1.— Enoncé du critère principal.

Soit K un corps de nombres et $v \in M_K$. Soient $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue et strictement croissante et $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue, croissante telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\psi(x) \geq 1$.

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{C}_v^n$. Soient c_1, c_2 et c_3 des constantes > 0 ne dépendant que de $\underline{\alpha}$, k, n et $[K : \mathbf{Q}]$.

THÉORÈME .— *(Critère principal). (H_1) On suppose que pour tout réel $M \geq M_0$, il existe un idéal $I_M = (P_{M,1}, \ldots, P_{M,m(M)})$ de $K[X_1, \ldots, X_n]$ vérifiant :*

I) *l'ensemble des zéros de I_M dans la boule de $\mathbf{C}_v^n$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon*

$$\exp\left(-c_1 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot \psi(M)^{k+2}\right)$$

de $\mathbf{C}_v^n$ est vide.

II) $\max_{1 \leq j \leq m(M)} |P_{M,j}(\underline{\alpha})|_v \leq \exp\left(-c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot \psi(M)^{k+1}\right)$

III) $\max_{1 \leq j \leq m(M)} t(P_{M,j}) \leq c_3 \cdot M$.

Alors, il existe une constante $c = c(\underline{\alpha}, k, n, [K : \mathbf{Q}], t(R)) > 0$ (effectivement calculable) telle que, pour tout point $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de $(\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}])^n$ vérifiant : $\max_{1 \leq i \leq n} t(\beta_i) \leq T$, on ait :

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|_v \geq \exp\left(-cT^{k+1} \cdot [\psi \circ w(cT^{k+1})]^{k+2} \cdot [w(cT^{k+1})]^{k+1}\right)$$

où w est la fonction inverse de u.

Remarque. — P. Philippon a démontré dans [P_2, Corollaire 6], un résultat, moins fort, avec l'exposant n à la place de $k+1$. Ce théorème améliore donc le résultat de P. Philippon, puisque sous l'hypothèse (H_1) du théorème, on a $k < n$ (cf. $[P_1]$, critère principal).

2.— Corollaires.

On déduit du critère principal, des résultats quantitatifs sur les grands degrés de transcendance liés à la fonction exponentielle, on considère $x_1, \ldots, x_p$ (resp. $y_1, \ldots, y_q$) des nombres complexes vérifiant l'hypothèse technique suivante : (HT) Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $X \geq X(\varepsilon)$ et tout p-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ (resp. tout q-uplet $(\nu_1, \ldots, \nu_q)$) d'entiers rationnels, non tous nuls, tels que $|\lambda_i| \leq X$ $(i = 1, \ldots, p)$ (resp. $|\nu_j| \leq X$ $(j = 1, \ldots, q)$), on ait :

$$|\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i| \geq \exp(-X^{\varepsilon}) \text{ (resp. } |\sum_{j=1}^{q} \nu_j y_j| \geq \exp(-X^{\varepsilon})) .$$

Posons $\kappa_1 = \dfrac{pq}{p+q}$, $\qquad \kappa_2 = \dfrac{p(q+1)}{p+q}$.

COROLLAIRE 1.— *Soit k un entier ≥ 0. Il existe une constante $c_1 = c(p, q, k, \underline{x}, \underline{y}) > 0$ telle que :*

i) $\varphi_1(T) = \exp(c_1 \cdot T^{k+1})$ soit une mesure d'approximation simultanée, en dimension k, du point $(e^{x_1 y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$ de $\mathbf{C}^{pq}$, si $\kappa_1 = k+1$ et $\kappa_1 > 1$.

ii) $\varphi_2(T) = c_1 T^{\frac{\kappa_1 \cdot (k+1)}{\kappa_1 - k - 1}} \cdot (\log T)^{\frac{-(k+1)}{\kappa_1 - k - 1}}$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $(e^{x_1 y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$, si $\kappa_1 > k+1$.

Démonstration.— Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{pq})$, où $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{pq}\} = \{e^{x_r y_s}, (r = 1, \ldots, p), (s = 1, \ldots, q)\}$. En utilisant une fonction auxiliaire à une variable et un lemme de zéros géométrique, Diaz démontre (cf. [D], p. V.28) la proposition suivante :

PROPOSITION 1.— *Si $\kappa_1 > 1$. Alors, pour tout réel X, $X \geq X_0$, il existe une famille de polynômes $P_{X,1}, \ldots, P_{X,m(X)}$ de $\mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_{pq}]$ vérifiant :*

a) pour tout j, $(j = 1, \ldots, m(X))$ $P_{X,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}^{pq}$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon $\exp(-c_7 X^{\kappa_1} \cdot \log X)$,

b) $\max_{1 \leq j \leq m(X)} |P_{X,j}(\underline{\alpha})| \leq \exp(-c_8 X^{\kappa_1} \cdot \log X)$,

c) $\max_{1 \leq j \leq m(X)} t(P_{X,j}) \leq c_9 X$,

où c_7, c_8 et c_9 sont des constantes > 0 ne dépendant que de $p, q, \underline{x}$ et $\underline{y}$.

Si $\kappa_1 > 1$ et $\kappa_1 = k+1$, la proposition entraîne que $\underline{\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère principal dans $\mathbf{Q}$ avec $u(X) = \log X$, $\psi = 1$. On en déduit, par conséquent, la partie i) du corollaire.

Si $\kappa_1 > k+1$, la proposition 1 entraîne que $\underline{\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère principal avec $u(X) = X^{\kappa_1-(k+1)} \cdot \log X$ et $\psi = 1$. La fonction inverse de u, notée w dans le critère, vérifie dans ce cas

$$w(T) \ll \left(\frac{T}{\log T}\right)^{\frac{1}{\kappa_1-k-1}} .$$

On a, par conséquent, la partie ii) du corollaire. ∎

Remarque. — Si on applique le corollaire 1 ii) avec $p = 2$, $q = 3$ et $k = 0$, on obtient un résultat, similaire à celui de M. Waldschmidt et M. Mignotte (cf. $[W-M]$, Corollaire 1) :

Soient $\beta_{1,1}, \ldots, \beta_{2,3}$ des nombres algébriques de tailles inférieurs à T, on a :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{s=1}^{3} |e^{x_r y_s} - \beta_{rs}| \geq \exp[-cT^6 \cdot (\log T)^{-5}] .$$

Le résultat de M. Waldschmidt et M. Mignotte est plus fin, puisqu'il sépare le degré et la hauteur dans la mesure d'approximation.

COROLLAIRE 2. — *Soit k un entier ≥ 0. On suppose $p \geq 2$. Alors, il existe une constante $c_2 = c(k,p,q,\underline{x},\underline{y})$ telle que :*

iii) $\varphi_3(T) = \exp(c_2 T^{\frac{(p+q)(k+1)}{q}})$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $(x_1, \ldots, x_p, e^{x_1 y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$ de $\mathbf{C}^{p(1+q)}$, si $\kappa_2 = k+1$.

iv) $\varphi_4(T) = c_2 T^{\frac{\kappa_2 \cdot (k+1)}{\kappa_2-k-1}} \cdot (\log T)^{\frac{-(k+1)q}{(p+q)(\kappa_2-k-1)}}$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $(x_1, \ldots, x_p, e^{x_1, y_1}, \ldots, e^{x_p y_q})$ de $\mathbf{C}^{p+pq}$, si $\kappa_2 > k+1$.

Démonstration. — On utilise la proposition (cf. [D], p. V.21, V.22) suivante :

PROPOSITION 2. — *Si $p \geq 2$, alors on a : Pour tout $X \geq X_0$, il existe une famille de polynômes $Q_{X,1}, \ldots, Q_{X,m(X)}$ de $\mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_{p(q+1)}]$ vérifiant :*

a) pour tout j, $(j = 1, \dots, m(X))$, $Q_{X,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}^{p(q+1)}$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon $\exp[-c_{10}X^{\kappa_2} \cdot (\log X)^{\frac{q}{p+q}}]$;

b) $\max_{1 \le j \le m(X)} |Q_{X,j}(\underline{\alpha})| \le \exp(-c_{11}X^{\kappa_2} \cdot (\log X)^{\frac{q}{p+q}})$;

c) $\max_{1 \le j \le m(X)} t(Q_{X,j}) \le c_{12}X$ *où c_{10}, c_{11} et c_{12} ne dépendent que de p, q, $\underline{x}$ et y.*

Si $\kappa_2 = k+1$, la proposition 2 implique que $\underline{\gamma}$ vérifie les hypothèses du critère principal avec $u(X) = (\log X)^{\frac{q}{p+q}}$, $\psi = 1$ et $K = \mathbf{Q}$.

On en déduit iii).

Si $\kappa_2 > k+1$, $\underline{\alpha}$ vérifie les hypothèses du critère principal avec $u(X) = X^{\kappa_2 - k - 1} \cdot (\log X)^{\frac{q}{p+q}}$ et $\psi = 1$.

Dans ce cas, w la fonction inverse de u, vérifie :

$$w(T) \ll \left(T/(\log T)^{\frac{q}{p+q}}\right)^{\frac{1}{\kappa_2 - k - 1}} .$$

On obtient comme sous corollaire du corollaire 2, un résultat concernant le problème de Gel'fond Schneider :

COROLLAIRE 3.— *Soient γ un nombre algébrique différent de 0 et 1, β un nombre algébrique de degré $d \ge 2$. Soit k un entier ≥ 0. Alors, il existe un réel $c_3 = c_3(k, d, \gamma, \beta) > 0$ tel que :*

VI*)* $\varphi_5(T) = \exp(c_3 T^{2(k+1)})$ *soit une mesure d'approximation simultanée, en dimension k, de $(\gamma^\beta, \dots, \gamma^{\beta^{d-1}})$, si $d = 2k+1$.*

VII*)* $\varphi_6(T) = c_3 T^{\frac{(d+1)(k+1)}{d-2k-1}} \cdot (\log T)^{\frac{-(k+1)}{d-2k-1}}$ *soit une mesure d'approximation simultanée, en dimension k, de $(\gamma^\beta; \dots, \gamma^{\beta^{d-1}})$, si $d > 2k+1$.*

Démonstration.— On suppose β entier algébrique; le résultat se déduit de ce cas particulier.

Posons : $K = \mathbf{Q}(\gamma, \beta)$, $\underline{\alpha} = (\gamma^\beta, \dots, \gamma^{\beta^{d-1}})$, $\underline{\widetilde{\alpha}} = (\gamma, \gamma^\beta, \dots, \gamma^{\beta^{2(d-1)}})$, $x_i = \beta^{i-1}, (i = 1, \dots, d)$, $x_i = \beta^{i-1}$ $(i = 1, \dots, d)$, $y_j = \beta^{j-1} \cdot \log \gamma$, $(j = 1, \dots, d)$.

β étant algébrique, on déduit de l'inégalité de la taille (cf. [W] que $x_1, \dots, x_d$ (resp. $y_1, \dots, y_d$) vérifie l'hypothèse (HT).

En utilisant le corollaire 2, on déduit qu'il existe $c' = c(k, d, \gamma, \beta)$ tel que :

a) $\varphi_1(T) = \exp(cT^{2(k+1)})$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $\underline{\widetilde{\alpha}}$, si $d = 2k+1$.

b) $\varphi_2(T) = cT^{\frac{(d+1)(k+1)}{d-2k-1}} \cdot (\log T)^{-\frac{(k+1)}{d-2k-1}}$ soit une mesure d'approximation simultanée en dimension k, du point $\underline{\widetilde{\alpha}}$, si $d > 2k+1$.

Pour conclure, il suffit de montrer que si φ est une mesure d'approximation de $\underline{\widetilde{\alpha}}$, en dimension k, alors il existe $c = c(k, d, \gamma, \beta)$ telle que $c \cdot \varphi$ soit une mesure d'approximation de $\underline{\alpha}$ en dimension k. Puisque la mesure d'approximation est indépendante à une constante près du k-système choisi; on choisit un k-système $\theta_1, \dots, \theta_{k+1}$ tel que $\gamma \in \mathbf{Z}[\theta_1, \dots, \theta_{k+1}]$.

Soient $w_1, \dots, w_{d-1}$ des nombres appartenant à $\mathbf{Z}[\theta_1, \dots, \theta_{k+1}]$ tels que :

$$\max_{1 \leq i \leq d-1} t(w_i) \leq T \text{ et } \max_{1 \leq i \leq d-1} |\gamma^{\beta^i} - w_i| \leq \exp(-\varphi(T)) .$$

β étant entier algébrique de degré d; pour tout j, $d \leq j \leq 2(d-1)$ il existe $\lambda_{i,j} \in \mathbf{Z}$ $(i = 0, \dots, d-1)$ tels que : $\beta^j = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_{i,j} \cdot \beta^i$. On a donc

$$\gamma^{\beta^j} = \prod_{i=0}^{d-1} (\gamma^{\beta^i})^{\lambda_{i,j}} .$$

Posons :

$$\widetilde{w}_j = w_j \text{ si } 1 \leq j \leq d-1$$
$$\widetilde{w}_j = \prod_{i=0}^{d-1} (w_i)^{\lambda_{i,j}} \text{ si } d \leq j \leq 2(d-1)$$
$$\widetilde{w}_0 = \gamma .$$

On a $\max_{0 \leq j \leq 2(d-1)} t(\widetilde{w}_j) \leq c_1 T$

$$\text{et} \qquad \max_{0 \leq j \leq 2(d-1)} |\gamma^{\beta^j} - \widetilde{w}_j| \leq \exp(-\frac{1}{c_2}\varphi(T))$$

où $c_1 = c(k, d, \gamma, \beta)$ et $c_2 = c(k, d, \gamma, \beta)$. ∎

On en déduit aussi du théorème un résultat lié aux fonctions elliptiques :

COROLLAIRE 4.— *Soit $\wp$ une fonction elliptique d'invariants g_2 et g_3, Ω le réseau des périodes de $\wp$. Soient ω une période primitive de Ω et η la quasi-période associée et $K = \mathbf{Q}(g_2, \wp(\frac{\omega}{2}))$. Alors, il existe une constante $c = c(\omega, \Omega, K) > 0$ telle que :*

a) $\varphi_7(T) = cT^{\frac{3}{2}} \cdot (\log T)^{\frac{3}{2}}$ soit une mesure d'approximation en dimension 0 *de $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$.*

b) $\varphi_8(T) = cT^6 \cdot (\log T)^6$ *soit une mesure d'approximation en dimension 1 de* $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$.

Démonstration. — On utilise la proposition (cf. [PH], proposition 2) suivante :

PROPOSITION 4.— *Pour tout réel* $M \geq M_0$, *il existe une famille de polynômes* $P_{M,1}, \dots, P_{M,m(M)}$ *dans* $K[X,Y]$ *vérifiant :*

i) pour tout j, $(j = 1, \dots, m(M))$, $P_{M,j}$ *n'a pas de zéros dans la boule de centre* $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$ *et de rayon* $\exp(-c_{16}M^3)$*;*

ii) $\max |P_{M,j}(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})| \leq \exp(-c_{17}M^3)$*;*

iii) $\max t(P_{M,j}) \leq c_{18}M \cdot \log M$

où c_{16}, c_{17} *et* c_{18} *sont des constantes positives non nulles, ne dépendant que de* ω, Ω *et* K.

On pose $S = M \log M$.; on a :

$$\frac{S}{\log S} \ll M \ll \frac{S}{\log S}\,.$$

Soit $P_{S,j}$ le polynôme de $K[X,Y]$ défini par $P_{S,j} = P_{M,j}$. D'après i) $P_{S,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de centre $(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$ et de rayon $\exp\left(-c_{19}\frac{S^3}{(\log S)^3}\right)$.

On déduit de ii) que $\max_j |P_{S,j}(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})| \leq \exp\left(-c_{20}\frac{S^3}{(\log S)^3}\right)$ et de iii) que $\max_j t(P_{S,j}) \leq c_{21}S$.

$(\frac{2i\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega})$ vérifie donc les hypothèses du critère principal avec

$$(1)\quad k = 0,\ u(S) = \frac{S^2}{(\log S)^3},\ \psi = 1,\ \text{d'une part}$$

$$(2)\quad k = 1,\ u(s) = \frac{S}{(\log S)^3}\ \text{et}\ \psi = 1,\ \text{d'autre part.}$$

Dans le cas (1), w (la fonction inverse de u) vérifie :

$$w(T) \ll T^{\frac{1}{2}} \cdot (\log T)^{\frac{3}{2}}\,.$$

On déduit du critère principal la partie a) du corollaire.

Dans le cas (2), w (la fonction inverse de u) vérifie :

$$w(T) \ll T(\log T)^3 .$$

Du critère principal, on déduit la partie b) du corollaire. ∎

3.— Démonstration du critère principal.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le théorème pour $T \geq T_0$, avec T_0 assez grand, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres de $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ de tailles inférieures à T_0.

Pour démontrer le théorème, nous allons procéder par l'absurde. On considère la propriété (S) suivante.

(S) Soit c une constante suffisamment grande en fonction de n, k, $[K:\mathbf{Q}]$, $t(R)$ et $\underline{\alpha}$.

Soit T_0 un nombre réel vérifiant

$$(*) \qquad T_0^{k+1} \cdot w(T_0^{k+1}) \cdot \psi \circ w(T_0^{k+1}) \geq M_0^{k+1} \cdot u(M_0) \cdot (\psi(M_0))^{k+2} .$$

Soit T un nombre réel $\geq T_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres appartenant à $\mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}]$ tels que :

$$\max_{(i=1,\ldots,n)} t(\beta_i) \leq T \quad \text{et} \quad \max_{(i=1,\ldots,n)} |\alpha_i - \beta_i|_v \leq \exp(-\varphi(T)),$$
$$\text{où } \varphi(T) = cT^{k+1} \cdot [\psi \circ w(cT^{k+1})]^{k+2} \cdot [w(cT^{k+1})]^{k+1} .$$

Posons $M_2 = w(c'T^{k+1})$, avec $c' = \dfrac{c}{2(c_1+c_2)}$. Soit M_1 le nombre réel défini par :

$$(**) \quad 2(\delta c_1 + 1)M_1^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2} = M_2 \cdot (u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) .$$

M_1 existe, puisque la fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ définie par $f(x) = 2(\delta c_1 + 1)x^{k+1} \cdot u(x)(\psi(x))^{k+2}$, est continue strictement croissante donc inversible dans $\mathbf{R}^*$.

La démonstration se fait en 2 étapes.

Dans la première étape, nous allons montrer que, sous les hypothèses (H_1) et (S) le point $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ vérifie une propriété (H_2) analogue à (H_1); dans l'intervalle $[M_1, M_2]$.

Dans la deuxième étape, la propriété (H_2) jointe aux techniques d'élimination nous permettront d'obtenir la contradiction qui établira le théorème.

Notons que l'égalité (**) assure que l'intervalle $[M_1, M_2]$ est suffisamment grand afin de pouvoir appliquer "l'élimination" .

1$^{\text{ère}}$ étape. *Réduction des hypothèses.*

LEMME 9.— *Si (H_1) et (S) sont vérifiés, alors on a la propriété (H_2) suivante :*

(H_2) *Pour tout $M \in [M_1, M_2]$, il existe un idéal $\mathcal{I}_M = (Q_{M,1}, \ldots, Q_{M,m(M)})$ de $K[Y_1, \ldots, Y_k]$ vérifiant :*

VII*) L'ensemble des zéros de $\mathcal{I}_M$ dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ et de rayon $\exp\left(-c_4 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}\right)$ est vide;*

VIII*)* $\max_{1 \leq j \leq m(M)} |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \leq \exp(-c_5 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1})$;

IX*)* $\max_{1 \leq j \leq m(M)} t(Q_{M,j}) \leq c_6 M \cdot T$

où $c_4 = \delta c_1 + 1$, $c_5 = \dfrac{c_2}{2}$ *et* $c_6 = (4k + n + 8) \cdot (3k + 10) \cdot t(R) \cdot c_3$.

Démonstration.— Soit $M \in [M_1, M_2]$. Les inégalités (*) et (**) de la propriété (S) impliquent que $M_1 \geq M_0$. Par suite, l'hypothèse (H_1) assure l'existence d'un idéal $I_M = (P_{M,1}, \ldots, P_{M,m(M)})$ de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ vérifiant I), II) et III) du théorème.

Posons, pour j, $(j = 1, \ldots, m(M))$, $Q_{M,j} = P^*_{M,j}$ où $P^*_{M,j}$ désigne le polynôme de $K[Y_1, \ldots, Y_k]$ définie, en fonction de $P_{M,j}$, par le lemme 8.

En utilisant les inégalités II) et III) de l'hypothèse (H_1), les inégalités de (S) et les inégalités IV) et V) du lemme 8, on obtient

$$\max_j |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \leq [\exp\left(-c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot \psi(M)^{k+1}\right) + \exp(-\varphi(T))] \times$$
$$\times \exp(c_8' \cdot c_3 \cdot M \cdot T) \, .$$

Or, pour tout $M \in [M_1, M_2]$, $c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1} < \varphi(T)$, d'après la définition de M_2. On en déduit que :

$$\max_j |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \leq 2 \cdot \exp[-c_2 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}] \cdot \exp(c_8' \cdot c_3' M T) \, .$$

D'autre part, on a, d'après la définition de M_1

$$\begin{aligned} 2c_4 M_1^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2} &= M_2 \cdot (u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{k+1} \\ &= c'^{\frac{1}{k+1}} M_2 \cdot T \cdot (\psi(M_2))^{k+1} . \end{aligned}$$

Puisque c' est assez grand, on peut supposer que :

$$c'^{\frac{1}{k+1}} > \frac{8c_4}{c_2}(c'_8 \cdot c_3 + \log 2) .$$

D'autre part, $\psi \geq 1$, on en déduit que :

$$\max_j |Q_{M,j}(\underline{\theta})|_v \leq \exp[-\frac{c_2}{2} M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}]$$

d'où l'inégalité VIII) de (H_2).

L'inégalité IX) de (H_2) résulte de l'inégalité III) de H_1 et l'inégalité V) du lemme 8.

Montrons que VII) est vérifiée.

D'après (H_1) I), pour tout $M \geq M_0$ et tout j, $(j = 1, \dots, m(M))$, $P_{M,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^n$ de centre $\underline{\alpha}$ et de rayon

$\exp[-c_1 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}]$;

comme $2c_1 \cdot M_2^{k+1} \cdot u(M_2) \cdot (\psi(M_2))^{k+2} \leq \varphi(T)$, on en déduit, grâce au lemme 8 VI), que $Q_{M,j}(= P^*_{M,j})$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp[-\delta \cdot c_1 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}] \cdot \exp(-c'_{10} T)$, pour tout $M \in [M_1, M_2]$. Or, on $M_1^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2} > c'^{k+1} T$ et comme on peut supposer que $c'^{\frac{1}{k+1}} > c'_{10}$, puisque c' est suffisamment grand, on peut conclure que $Q_{M,j}$ n'a pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp[-(\delta \cdot c_1 + 1) \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}]$ pour tout $M \in [M_1, M_2]$, d'où la propriété VII) de (H_2) .

2ème étape. *Elimination.*

On utilise les notations, définitions et résultats de $[P_1]$. Pour simplifier les notations, nous omettrons l'indice v, qui désigne la valeur absolue considérée, dans celles-ci.

Soit r un entier tel que $0 \leq r \leq k + 1$. Considérons l'assertion (A_r) suivante.

(A_r) Il existe $\mathcal{P}_r$ un idéal premier homogène de $K[Y_1, \ldots, Y_k]$, de codimension $k+1-r$, vérifiant, avec $\underline{d}_r = ([c_6 \cdot M_2 \cdot T] + 1, \ldots, [c_6 \cdot M_2 \cdot T] + 1) \in \mathbf{N}^r$, les inégalités suivantes :

XI) $Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \leq c_{22}^{k-r+2}(M_2 \cdot T)^{k+1}$ et $\mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \leq c_{22}(M_2 \cdot T)^k$.

XII) $\|\mathcal{P}_r\|_{\underline{d}_r} \leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(C\mathcal{P}_r))]$ où $c_6 = (4k+n+8)(3k+10) \cdot t(R) \cdot c_3$, $c_{22} = 8(k+2) \cdot \log(k+1) \cdot c_6$ et $[c_6 M_2 \cdot T]$ désigne la partie entière de $c_6 M_2 \cdot T$.

LEMME 10.— *On a les implications suivantes :*

(a) $(H_2) \Rightarrow \big($*pour tout entier r tel que* $1 \leq r \leq k+1$; $(A_r) \Rightarrow (A_{r-1})\big)$;

(b) $(H_2) \Rightarrow (A_0)$.

Démonstration.— Supposons (H_2) et (A_r) vérifies pour r, $1 \leq r \leq k+1$. Montrons que (A_{r-1}) est vérifiée.

Considérons l'idéal $(\mathcal{P}_r)$ qui vérifie (A_r); nous allons montrer que, $\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)}\{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\}$ est "suffisamment petit".

Posons $d_1 = [c_6 M_2 T] + 1$. En utilisant le lemme 2.7 de $[P_1]$ et l'inégalité XII) de (A_r), on obtient les inégalités suivantes :

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) \leq \|\mathcal{P}_r\|_{\underline{d}_r}^{\frac{1}{\mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)}} \cdot \exp(c'_{11} M_2 \cdot T)$$

où $c'_{11} = 20(k+1) \cdot \log(k+1) \cdot c_6$. Par suite,

$$\begin{aligned}\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{\underline{d}_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) &\leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r (\frac{Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)}{\mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)} \\ &\qquad + M_2 \cdot T)] \cdot \exp(c'_{11} M_2 \cdot T) \\ &\leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot M_2 \cdot T + c'_{11} M_2 \cdot T] \\ &\leq \exp[-(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) \cdot M_2 + c'_{11} M_2 \cdot T] .\end{aligned}$$

Comme $u(M_2) = c' T^{k+1}$, avec c' "suffisamment grand", on peut donc supposer que $c' > (4c'_{11})^{k+1}$ et par suite, on a :

$$(1) \qquad \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) \leq \exp(-c'_{11} M_2 \cdot T) .$$

Soit $\underline{x} \in Z(\mathcal{P}_r)$ tel que :

$$\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{x}, \underline{\theta}) = \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\} .$$

On a $x_0 \neq 0$; en effet, si $x_0 = 0$, puisque $\|\underline{\theta}\| \leq 1$, on tire du lemme 1.16 (i) de $[P_1]$ l'inégalité : $\mathrm{Dist}(\underline{x}, \underline{\theta}) \geq (k+1)^2$. D'autre part, le lemme 2.9 de $[P_1]$ entraîne que :

$$\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{x}, \underline{\theta}) \geq \mathrm{Dist}(\underline{x}, \underline{\theta}) \cdot (2(k+1))^{-2(d_1+1)} .$$

On aurait, alors :

$$\mathrm{Dist}_{\underline{d}_1}(\underline{x}, \underline{\theta}) \geq \exp(-4(k+1) \cdot c_6 \cdot M_2 \cdot T) > \exp(-c'_{11} \cdot M_2 T) .$$

Cette dernière inégalité est absurde, d'après (1), on a donc $x_0 \neq 0$. Par suite, en utilisant à nouveau le lemme 1.16 ii) et le lemme 2.9 de $[P_1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\underline{x} - \underline{\theta}\| &\leq 3(k+1)^2 \cdot \mathrm{Dist}(\underline{x}, \underline{\theta}) \\ &\leq \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{x}, \underline{\theta}) \cdot \exp[8(k+1)c_6 \cdot M_2 T] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (2) \quad \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} &\leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\} \exp[8(k+1) \cdot c_6 \cdot M_2 \cdot T] \\ &\leq \exp[-(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) \cdot M_2 + 2c'_{11} \cdot M_2 \cdot T] . \end{aligned}$$

Comme, $u(M_2) = c' T^{k+1}$ et on peut supposer que $c' > (4c'_{11})^{k+1}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} &\leq \exp[-\frac{1}{2} M_2 \cdot (u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2)] \\ &\leq \exp[-c_4 {M_1}^{k+1} \cdot u(M_1) \cdot (\psi(M_1))^{k+2}] \end{aligned} .$$

Considérons S l'ensemble des nombres réels M tels que $M_1 \leq M \leq M_2$ et

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \leq \exp[-c_4 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}] .$$

S est non vide, puisqu'il contient M_1. Soit M sa borne supérieure, S étant fermé, on a $M \in S$.

La propriété (H_2) assure l'existence d'un polynôme $Q_{j,M}$ de $K[Y_1, \ldots, Y_k]$ n'ayant pas de zéros dans la boule de $\mathbf{C}_v^k$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $\exp[-c_4 \cdot$

$M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}]$. On déduit, grâce à l'inégalité précédente que ${}^hQ_{j,M} \notin \mathcal{P}_r$, et par suite que, codim $(\mathcal{P}_r, {}^hQ_{j,M}) = k - r + 2$.

Soit $\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}$ l'idéal défini formellement par :

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1} = I_1^{e_1} \cdot \dots \cdot I_\ell^{e_\ell}$$

où, $I_1, \dots, I_\ell$ sont les idéaux premiers minimaux, de codimension $k+2-r$, associés à $(\mathcal{P}_r, {}^hQ_{j,M})$ et $e_1, \dots, e_\ell$ les longueurs des idéaux primaires correspondants.

Soit Y_i $(i = 0, \dots, k)$ tel que $Y_i \notin \mathcal{P}_r$ et soit ρ le $K[Y_0, \dots, Y_k][\underline{d}_{r-1}]$ homomorphisme défini par :

$$\begin{aligned} \rho : K[Y_0, \dots, Y_r][\underline{d}_r] &\to K[Y_0, \dots, Y_r][\underline{d}_{r-1}] \\ U_r &\to Y_i^{d_1 - \deg Q_{j,M}} \cdot {}^hQ_{j,M} \, . \end{aligned}$$

Si f est une forme U-éliminante d'indice $\underline{d}_r$ de $\mathcal{P}_r$ alors $\rho(f)$ s'écrit (cf. Proposition 2.4 de $[P_1]$) :

$$\rho(f) = \lambda \cdot \prod_{s=1}^{\ell} f_s^{e_s} \, ,$$

où $\lambda \in K$ et f_s est une forme U-éliminante d'indice $\underline{d}_{r-1}$ de I_s.

$\rho(f)$ est donc une forme U-éliminante d'indice $\underline{d}_{r-1}$ de $\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}$. En utilisant le lemme 2.1 de $[P_1]$ et l'inégalité XI) de (A_r), on obtient :

$$\mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) \le \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \le c_{22}(M_2 \cdot T)^k$$

$$\begin{aligned} \text{et } Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) &\le Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + [\underline{\overline{h}}(Q_{j,M}) \\ &\quad + 6(k+2) \cdot \log(k+1) \cdot c_6 \cdot M_2 \cdot T] \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \\ &\le Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + [6(k+2) \cdot \log(k+1) + 1] \cdot c_6 (M_2 \cdot T)^{k+1} \\ &\le c_{22}^{k-r+3} \cdot (M_2 \cdot T)^{k+1} \, . \end{aligned}$$

Pour majorer $\|\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}}$, nous allons distinguer deux cas, suivant que $Z(\mathcal{P}_r)$ a un point "très proche" de $\underline{\theta}$ ou tous les points de $Z(\mathcal{P}_r)$ sont relativement éloignés de $\underline{\theta}$.

1$^{\text{er}}$ cas $M = M_2$.

En utilisant le corollaire 2.3 de $[P_1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \le [\|\mathcal{P}_r\|_{\underline{d}_r} &+ |Q_{j,M}(\underline{\theta})|] \cdot \exp[c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \\ &+ M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] \end{aligned}$$

où $c'_{12} = 32 \cdot (k+1) \cdot \log(k+1) \cdot c_6$.

Les inégalités XII) de (A_2) et l'inégalité VIII) de H_2 jointes à l'inégalité précédente, entraînent :

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq & \Big[\exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \\ & \times \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] + \exp[-c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}]\Big] \times \\ & \times \exp[c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] .\end{aligned}$$

Or, nous avons démontré (voir p. 26) :

$$\begin{aligned}Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1} & \leq c_{22}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) \\ & + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r} \mathcal{P}_r)) \leq c_{22}^{k-r+3}(M_2 \cdot T)^{k+1} .\end{aligned}$$

D'autre part, comme $u(M_2) = c'T^{k+1}$ et c' est "suffisamment grand" pour qu'on puisse supposer $c'^{\frac{1}{k+1}} > (c_{22}^{k+2} + c'_{12}c_{22}^{k+1} + \log 2)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}& (\psi(M_2))^r \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}}[Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)] \\ & \geq (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}}[Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1})] + \\ & + c'_{12}\big(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_r)\big) + \log 2 .\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1} & \geq M_2^{k+1}(u(M_2))^{\frac{k}{k+1}} \cdot (u(M_2))^{\frac{1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{k+1} \\ & \geq (M_2 \cdot T)^{k+1}(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{k}{k+1}} \cdot \frac{(u(M_2))^{\frac{1}{k+1}}}{T} \cdot (\psi(M_2))^{k+1} .\end{aligned}$$

Comme $u(M_2) = c'T^{k+1}$ et c' est suffisamment grand pour qu'on puisse supposer :

$$c'^{\frac{1}{k+1}} \cdot c_5 \geq (c_{22}^{k+2} + c'_{12} \cdot c_{22}^{k+1} + \log 2)$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}& c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M)(\psi(M))^{k+1} \\ & \geq (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1}[Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1})] + \\ & + c'_{12}\big(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)\big) + \log 2 .\end{aligned}$$

On en conclut :

$$\|\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}))] .$$

2[ème] cas : $M < M_2$.

u et ψ étant continues en M; il existe $\eta > 0$ tel que : pour tout N vérifiant : $M \leq N \leq M + \eta < M_2$, on a :

$$u(N) \leq u(M) + 1 \quad \text{et} \quad \psi(N) \leq \psi(M) + 1 .$$

Soit M' tel que : $M < M' < M + \eta$. Comme M est la borne supérieure de S, on a :

$$\exp[-c_4 {M'}^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2}] < \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \leq \exp[-c_4 M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+2}] .$$

D'autre part, nous avons montré (voir les inégalités (1) et (2), p. 25) que :

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta}) \leq \exp(-c'_{11} \cdot M_2 \cdot T)$$

et $$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\} \cdot \exp(\frac{c'_{11}}{2} \cdot M_2 \cdot T) .$$

On en déduit que :

$$\min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\|\underline{y} - \underline{\theta}\|\} \leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\}^{\frac{1}{2}} .$$

Par suite, on obtient :

$$\exp[-c_4 \cdot {M'}^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2}] \leq \min_{\underline{y} \in Z(\mathcal{P}_r)} \{\mathrm{Dist}_{d_1}(\underline{y}, \underline{\theta})\}^{\frac{1}{2}} .$$

En utilisant (H_2) VIII) et l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} |Q_{j,M}(\underline{\theta})| &\leq \exp[-c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}] \\ &\leq \exp[-c_4 \cdot {M'}^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2} \cdot \lambda] \\ &\leq \min_{\underline{y} \in (\mathcal{P}_r)} \{1, (\mathrm{Dist}(\underline{y}, \underline{\theta}))^{\lambda/2}\} \end{aligned}$$

où
$$\lambda = \frac{c_5 \cdot M^{k+1} \cdot u(M) \cdot (\psi(M))^{k+1}}{c_4 \cdot M'^{k+1} \cdot u(M') \cdot (\psi(M'))^{k+2}} .$$

Remarquons qu'on peut supposer sans restriction que l'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $c_2 \leq 4(\delta c_1 + 1)$ et par suite que $c_5 \leq 2c_4$. On a alors $\frac{\lambda}{2} \leq 1$. D'autre part, le choix de M' implique

$$\frac{\lambda}{2} \geq \frac{c_5}{16c_4}(\psi(M))^{-1} \geq \frac{c_5}{16c_4}(\psi(M_2))^{-1} .$$

En utilisant la proposition 2.5 de $[P_1]$ et l'inégalité XII) de (A_r), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} &\leq \|\mathcal{P}_r\|^{\frac{\lambda}{2}} \exp[c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] \\ &\leq \exp[-\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r \cdot (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) \\ &\quad + c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r))] .\end{aligned}$$

Or $\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{1}{k+1}} \cdot \psi(M_2) \geq \frac{c_5}{16c_4} \cdot c'^{\frac{1}{k+1}}$ et c' est suffisamment grand pour qu'on puisse supposer que : $c_5 \cdot c'^{\frac{1}{k+1}} \geq 16c_4 \cdot c'_{12}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^r (Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) \\ &\geq (\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + \\ &+ M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1})) + c'_{12}(Ht_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_r}(\mathcal{P}_r)) .\end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \exp\Bigg[&- \left(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}}\right)^{\frac{r-1}{k+1}} \cdot (\psi(M_2))^{r-1} \cdot \times \\ &\times \left(Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) + M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1})\right)\Bigg] .\end{aligned}$$

Dans les deux cas mentionnés plus haut, on obtient la même majoration, vue la définition de $\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}$, il existe un idéal premier homogène I_s, $1 \leq s \leq k$ que nous noterons $\mathcal{P}_{r-1}$, de codimension $k + r - 2$ vérifiant :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}_{r-1}\|_{\underline{d}_{r-1}} \leq \exp[-(\frac{u(M_2)}{T^{k+1}})^{\frac{r-1}{k+1}} \times (\psi(M_2))^{r-1} \cdot (&Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}) \\ &+ M_2 \cdot T \cdot \mathrm{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}))] .\end{aligned}$$

On a évidemment :

$$\operatorname{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}) \leq \operatorname{Deg}_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) \leq c_{22} \cdot (M_2 \cdot T)^k$$

et

$$Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\mathcal{P}_{r-1}) \leq Ht_{\underline{d}_{r-1}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{r-1}) \leq c_{22}^{k-2+3} \cdot (M_2 \cdot T)^{k+1} .$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{r-1}$ vérifie l'assertion (A_{r-1}), ce qui entraîne le lemme 10 a).

Montrons le lemme 10 b), l'assertion (A_{k+1}) est vérifiée avec $\mathcal{P}_{k+1} = (0)$. L'inégalité XII) est évidemment vérifiée et les inégalités XI) découlent de la proposition 2.8 de $[P_1]$. On déduit donc du a) que si (H_2) est vérifiée alors (A_0) l'est aussi. ∎

FIN de démonstration du théorème : si l'hypothèse (H_1) et la propriété (S) sont vérifiées; le lemme 9 entraîne que (H_2) est vérifiée et, par suite, que (A_0) l'est aussi grâce au lemme 10.

Comme l'assertion (A_0) est évidemment fausse, puisqu'elle est équivalente à $1 \leq \|\mathcal{P}_0\| < 1$. On a donc une contradiction. On en déduit donc que si (H_1) est vérifiée alors la propriété (S) n'est jamais vérifiée, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BROWNAWELL (B.). — *Some remarks on semi-results,* in : Trancendence theory : advances and applications (Eds. Baker and Masser), London, 1977.

[D] DIAZ (G.). — *Grands degrés de transcendance pour des familles d'exponentielles,* dans : Séminaire d'arithmétique, Saint Etienne, 1986, 1987.

[J] JABBOURI (E.M.). — *Mesure d'indépendance algébrique sur les groupes algébriques commutatifs,* (manuscrit).

[N_1] NESTERENKO (Yu). — Estimates for the orders of zeros of functions of certain class and their applications in the theory of transcendental numbers, *Izv. Akad. Nauk, U.S.S.R.*, Ser Math., **41**, 1977 Math. U.S.S.R. Izv, **11** 1977, p. 239-270.

[N_2] NESTERENKO (Yu). — *Measures of algebraic independence of numbers and functions,* dans Journées Arithmétiques de Besançon, Société Mathématique de France, Astérique 147-148, 1987, p. 141-149.

[P_1] PHILIPPON (P.). — Critères d'indépendance algébrique, *Publications mathématiques,* I.H.E.S. **64**, 1987, p. 5-52.

[P_2] PHILIPPON (P.). — *Sur les mesures d'indépendance algébrique,* dans Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1983, 1984, ed. C. Goldstein (C) 1985, Birkhauser PM **59**, p. 219-233.

[PH] PHILIBERT (G.). — Une mesure d'indépendance algébrique, *Annales de l'Institut Fourier,* (à paraître).

[R] REYSSAT (E.). — Un critère d'indépendance algébrique, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* (Crelle **329**, 1981, p. 66-81.

[W] WALDSCHMIDT (M.). — Nombres transcendants, *Springer Verlag,* LN *n°* **402**, 1974.

[W-M] WALDSCHMIDT (M.), MIGNOTTE (M.). — Approximation simultanée de valeurs de la formation exponentielle, *Compositio Mathematica,* Vol. **34**, Fasc. **2**, 1977, p. 127-139.

(Manuscrit reçu le 28 octobre 1988)