ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PASCAL MARONI

L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 10, nº 1 (1989), p. 105-139

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_1_105_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. X, n°1, 1989

L'orthogonalité et les récurrences de polynomes d'ordre supérieur à deux

PASCAL MARONI(*)

RÉSUMÉ. — On établit les propriétés d'une suite de polynômes orthogonaux par rapport à d formes linéaires; en particulier une telle suite est caractérisée par le fait qu'elle vérifie une récurrence d'ordre $d+1$.

Lorsque $d = 1$, on donne plusieurs caractérisations d'une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre s.

ABSTRACT. — We give the properties of a set of orthogonal polynomials with respect to d linear functionals; a set of this kind will verify an $d+1$ order recurrence relation.

If $d = 1$, we give caracterizations of set of strictly quasi-orthogonal polynomials.

Introduction

La notion d'orthogonalité de dimension d, introduite dans sa thèse par J. VAN ISEGHEM [5], à propos de la recherche des approximants de Padé (vectoriels) de d séries formelles simultanées, se présente comme la notion adéquate dans l'étude des récurrences de polynômes d'ordre $d+1$.

On expose ici les premières propriétés d'une suite orthogonale de dimension d, c'est-à-dire vérifiant des propriétés d'orthogonalité par rapport à d formes linéaires. Le résultat fondamental qui justifie une telle étude est qu'une suite orthogonale de dimension d vérifie une récurrence d'ordre $d+1$ et réciproquement [5]. A partir de là, on pourra envisager ultérieurement le problème de déterminer les suites vérifiant une récurrence d'ordre $d+1$ et

(*) Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire du Centre National de la Recherche Scientifique associé à l'Université Pierre et Marie Curie, Tour 55-65 – $5^{\text{ème}}$ étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, Laboratoire d'Analyse Numérique (U.A. 189)

dont la suite des dérivées vérifie également une récurrence d'ordre $d+1$: ce sera une généralisation des polynômes orthogonaux classiques obtenus lorsque $d=1$.

On introduit également la notion de quasi orthogonalité de dimension d. On se borne ici, lorsque $d=1$, à étudier le cas d'une suite strictement quasi-orthogonale d'odre s. On donne un théorème de caractérisation d'une telle suite qui généralise le résultat de DICKINSON obtenu dans le cas $s=1$ [8].

On a utilisé de façon systématique la notion de suite duale d'une suite de polynômes. Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $\mathbf{C}$. A toute suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ de polynômes normalisés ($B_n(x)=x^n+\ldots$), on peut associer sa suite duale $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$, $\mathcal{L}_n\in\mathcal{P}'$ définie par

$$\mathcal{L}_m(B_n)=\delta_{m,n} \quad , \quad m,n\geq 0.$$

La suite duale permet de mesurer, en quelque sorte, le degré d'organisation de la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$.

Sommaire

1. La suite duale

Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes normalisés, c'est-à-dire tels que $B_n(x)=x^n+\ldots, n\geq 0$.

Il existe toujours une suite unique $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ et un tableau unique $\chi_{n,\nu}, 0\leq \nu\leq n, n\geq 0$ tels que :

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &B_0(x)=1\ ,\ B_1(x)=x-\beta_0,\\ &B_{n+2}(x)=(x-\beta_{n+1})B_{n+1}(x)-\sum_{\nu=0}^{n}\chi_{n,\nu}B_\nu(x)\ ,\ n\geq 0.\end{aligned}$$

DÉFINITION 1.1.— *On appelle suite duale de la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ la suite de formes linéaires $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$ définie par :*

$$(1.2)\qquad \mathcal{L}_n(B_m)=<\mathcal{L}_n,B_m>=\delta_{n,m} \quad , \quad n,m\geq 0$$

La suite $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$ *est libre et elle est unique [1]. De (1.1) et (1.2), on a :*

$$\mathcal{L}_m(xB_{n+1}(x)) = \chi_{n,m} \qquad 0 \leq m \leq n \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}_m(xB_m(x)) = \beta_m \quad , \qquad m \geq 0 \tag{1.4}$$

Le lemme suivant est fondamental dans toute la suite [2].

LEMME 1.1.— *Soit* $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'$ *et soit* $p \geq 1$ *un entier. Pour que* $\mathcal{F}$ *vérifie :*

$$\mathcal{F}(B_{p-1}) \neq 0 \quad , \quad \mathcal{F}(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq p \tag{1.5}$$

il faut et il suffit qu'il existe $\lambda_\nu \in \mathbf{C}, 0 \leq \nu \leq p-1, \lambda_{p-1} \neq 0$, *tels que :*

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \lambda_\nu \mathcal{L}_\nu \tag{1.6}$$

Il est intéressant de déterminer la suite duale de certaines suites qu'on peut associer à la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$.

On traitera ici le cas de la suite associée relativement à une forme u et le cas de la suite des dérivées.

DÉFINITION 1.2.— *[3]. Soit* $u \in \mathcal{P}'$ *telle que* $u_0 = u(1) =< u, 1 > \neq 0$. *On appelle suite associée de la suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *relativement à la forme* u, *la suite* $\{B_n^{(1)}(u)\}_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$u_0 B_n^{(1)}(u)(x) = u\left(\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(\xi)}{x - \xi}\right) \ , \ n \geq 0 \tag{1.7}$$

Chaque polynôme $B_n^{(1)}(u)$ est normalisé. Notons $\{\mathcal{L}_n^{(1)}(u)\}_{n\geq 0}$ la suite duale de la suite $\{B_n^{(1)}(u)\}_{n\geq 0}$.

Pour chaque $f(x) = \sum_{\nu=0}^{p} a_\nu x^\nu$, on définit :

$$uf(x) = \sum_{n=0}^{p} \left(\sum_{\nu=n}^{p} a_\nu u_{\nu-n}\right) x^n$$

avec $u_n =< u, x^n >, n \geq 0$. La transposée de $f \to uf$ permet de définir le produit multiplicatif de deux formes linéaires :

$$< vu, f >=< v, uf > \quad , \quad v, u \in \mathcal{P}' \ , \ f \in \mathcal{P}$$

Avec l'opérateur θ_0 défini par

$$\theta_0 f(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

et dont la transposée se définit par $u \to x^{-1}u$, on peut écrire (1.7) sous la forme : [4]

$$u_0 B_n^{(1)}(u)(x) = u\theta_0 B_{n+1}(x)\ ,\ n \geq 0. \tag{1.8}$$

PROPOSITION 1.1.— *On a :*

$$\mathcal{L}_n^{(1)}(u) = u_0(x\mathcal{L}_{n+1})u^{-1} \quad , \quad n \geq 0. \tag{1.9}$$

Par définition, on a :

$$< \mathcal{L}_n^{(1)}(u), B_m^{(1)}(u) >= \delta_{n,m} \quad , \quad n, m \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$< \mathcal{L}_n^{(1)}(u), u\theta_0 B_{m+1} >= u_0 \delta_{n,m}$$

soit :

$$< \mathcal{L}_n^{(1)}(u)u, \theta_0 B_{m+1} >= u_0 \delta_{n,m}$$

et

$$< x^{-1}\left(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u\right), B_{m+1} >= u_0 \delta_{n,m} \tag{1.10}$$

En particulier :

$$< x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_{n+1} >= u_0\,;\, < x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_m >= 0\,,\, m \geq n+2$$

D'après le lemme 1.1, cela implique :

$$x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u) = \sum_{\nu=0}^{n+1} \lambda_\nu^n \mathcal{L}_\nu$$

D'où

$$x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), B_m >= \lambda_m^n \quad , \quad 0 \leq m \leq n+1$$

ce qui entraîne, d'après (1.10) et $< x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u), 1 >= 0$

$$\lambda_m^n = 0 \quad , \quad 0 \leq m \leq n$$

Finalement :

$$x^{-1}(\mathcal{L}_n^{(1)}(u)u) = u_0\mathcal{L}_{n+1}$$

d'où (1.9).

Considérons maintenant la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ avec $Q_n(x) = B'_{n+1}(x)/n+1$. Notons $\{\mathcal{L}'_n\}_{n\geq 0}$ la suite duale de la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$.

PROPOSITION 1.2.— *On a :*

$$D\mathcal{L}'_n = -(n+1)\mathcal{L}_{n+1} \quad , \quad n \geq 0. \tag{1.11}$$

Par définition, on peut écrire :

$$< \mathcal{L}'_n, Q_m >= \delta_{n,m} \quad , \quad n,m \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$< \mathcal{L}'_n, B'_{m+1} >= (m+1)\delta_{n,m}$$

ou

$$- < D\mathcal{L}'_n, B_{m+1} >= (m+1)\delta_{n,m}$$

d'où, d'après le lemme 1.1 :

$$D\mathcal{L}'_n = \sum_{\nu=0}^{n+1} \lambda_\nu^n \mathcal{L}_\nu$$

avec

$$\lambda_\nu^n = 0 \ , \ 0 \leq \nu \leq n \ , \ \lambda_{n+1}^n = -(n+1).$$

2. L'orthogonalité de dimension d

Dans sa thèse [5], J. VAN ISEGHEM a introduit une notion d'orthogonalité vectorielle qu'on peut présenter de la façon suivante : soit d formes linéaires sur $\mathcal{P}, \Gamma^1, \Gamma^2, \ldots \Gamma^d$ $(d \geq 1)$ et soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes.

DÉFINITION 2.1.— *On dit que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à $\Gamma = (\Gamma^1, \ldots \Gamma^d)$ lorsqu'elle vérifie :*

$$\Gamma^\alpha(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq md+\alpha \quad , \quad m \geq 0 \tag{2.1}$$

$$\Gamma^\alpha(x^m B_{md+\alpha-1}(x)) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0 \tag{2.2}$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$

Remarques.—

1. La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est alors nécessairement libre et on peut toujours la normaliser. Elle est alors unique.
2. On dira que la fonctionnelle Γ est de dimension d lorsque $\Gamma \in (\mathcal{P}')^d$.
3. D'après le lemme 1.1, on a :

$$\Gamma^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \lambda_\nu^\alpha \mathcal{L}_\nu \quad , \quad \lambda_{\alpha-1}^\alpha \neq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d, \tag{2.3}$$

c'est-à-dire, de façon équivalente :

$$\mathcal{L}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{d} \zeta_\alpha^\nu \Gamma^\alpha \quad , \quad \zeta_{\nu+1}^\nu \neq 0 \quad , \quad 0 \leq \nu \leq d-1 \tag{2.4}$$

4. Lorsque $d = 1$, on retrouve bien la notion habituelle d'orthogonalité régulière.

DÉFINITION 2.2.— *On dit que la fonctionnelle* Γ *de dimension* d *est régulière s'il existe une suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *vérifiant (2.1) et (2.2).*

Le critère suivant est donné dans [5] :

LEMME 2.1.— *Pour que la fonctionnelle* Γ *de dimension* d *soit régulière, il faut et il suffit que les déterminants suivants soient non nuls :*

$$(2.5)\quad H_{md+\nu} = \begin{vmatrix} \Gamma_0\Gamma_1 & \cdots & \Gamma_{md+\nu-1} \\ \Gamma_1\Gamma_2 & \cdots & \Gamma_{md+\nu} \\ & & \\ \Gamma_{m-1}\Gamma_m & \cdots & \Gamma_{m-1+md+\nu-1} \\ \Gamma^1_m\Gamma^1_{m+1} & \cdots & \Gamma^1_{(m+1)d+\nu-1} \\ & & \\ \Gamma^\nu_m\Gamma^\nu_{m+1} & \cdots & \Gamma^\nu_{(m+1)d+\nu-1} \end{vmatrix} \neq 0, m \geq 0, 0 \leq \nu \leq d-1$$

On a posé $\Gamma_n = \Gamma(x^n), n \geq 0$. Chaque déterminant $H_{md+\nu}$ est d'ordre $md+\nu$ si $md+\nu \geq 1$. Par convention $H_0 = 1$. Chacune des m premières lignes du déterminant (2.5) représente en fait d lignes. On a :

$$(2.6) H_{md+\nu} = \Pi_{\mu=0}^{m-1} \Pi_{\alpha=1}^{d} \Gamma^\alpha(x^\mu B_{\mu d+\alpha-1}(x)) \Pi_{\alpha=1}^{\nu} \Gamma^\alpha(x^m B_{md+\alpha-1}(x)),$$
$$m \geq 1, 1 \leq \nu \leq d-1$$

(2.7) $H_{md} = \Pi_{\mu=0}^{m-1}\Pi_{\alpha=1}^{d}\Gamma^{\alpha}(x^{\mu}B_{\mu d+\alpha-1}(x))\ ,\ m \geq 1$

(2.8) $H_{\nu} = \Pi_{\alpha=1}^{d}\Gamma^{\alpha}(B_{\alpha-1})\ ,\ 1 \leq \nu \leq d$

(2.9) $\Gamma^{\alpha}(x^{n}B_{nd+\alpha-1}(x)) = H_{nd+\alpha}/H_{nd+\alpha-1}\ ,\ n \geq 0\ ,\ 1 \leq \alpha \leq d$

Les déterminants (2.5) généralisent les déterminants de Hankel qu'on retrouve lorsque $d = 1$.

THÉORÈME 2.1.— *Pour chaque suite normalisée* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *les énoncés suivants sont équivalents :*

a) La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *vérifie une récurrence d'ordre* $d+1 (d \geq 1)$ *:*
(2.10)

$$B_{m+d+1}(x) = (x - \beta_{m+d})B_{m+d}(x) - \sum_{\nu=0}^{d-1} \gamma_{m+d-\nu}^{d-1-\nu} B_{m+d-1-\nu}(x)\ ,\ m \geq 0$$

avec les conditions initiales

(2.11) $$B_0(x) = 1\ ,\ B_1(x) = x - \beta_0 \text{ et si } d \geq 2 :$$

(2.12) $$B_n(x) = (x - \beta_{n-1})B_{n-1}(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \gamma_{n-1-\nu}^{d-1-\nu} B_{n-2-\nu}(x)\ ,\ 2 \leq n \leq d$$

et les conditions de régularité :

(2.13) $$\gamma_{m+1}^{0} \neq 0\ ,\ m \geq 0$$

b) La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *est orthogonale de dimension* d *par rapport à* $\Gamma = (\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \ldots \mathcal{L}_{d-1})$.

c) Pour chaque $(n, \nu), n \geq 0, 0 \leq \nu \leq d-1$, *il existe* d *polynômes* $\Lambda^{\mu}(n, \nu), 0 \leq \mu \leq d-1$ *tels que :*

(2.14) $$\mathcal{L}_{nd+\nu} = \sum_{\mu=0}^{d-1} \mathcal{L}_{\mu}(\Lambda^{\mu}(n, \nu).)\ ,\ n \geq 0\ ,\ 0 \leq \nu \leq d-1$$

et vérifiant

$$\begin{array}{lll}
\deg \Lambda^{\nu}(n,\nu) = n & , & 0 \leq \nu \leq d-1 \\
\deg \Lambda^{\mu}(n,\nu) \leq n & , & 0 \leq \mu \leq \nu - 1 \quad si \quad 1 \leq \nu \leq d-1 \\
\deg \Lambda^{\mu}(n,\nu) \leq n-1 & , & \nu + 1 \leq \mu \leq d-1 \quad si \quad 0 \leq \nu \leq d-2
\end{array}$$

a) $\Rightarrow$ b). Dans (1.1), changeons n en $n+d-1$ et écrivons
(2.15)

$$xB_{n+d}(x) = B_{n+d+1}(x) + \beta_{n+d}B_{n+d}(x) + \sum_{\nu=0}^{n+d-1} \chi_{n+d-1,\nu}B_\nu(x), n \geq 0.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$\chi_{n+d-1,\nu} = 0 \ , \ 0 \leq \nu \leq n-1 \ , \ n \geq 1$$
$$\chi_{n+d-1,n+\nu} = \gamma_{n+1+\nu}^{\nu} \ , \ 0 \leq \nu \leq d-1 \ , \ n \geq 0$$

C'est-à-dire, selon (1.3) :

$$\mathcal{L}_\nu(xB_{n+d}(x)) = 0 \ , \ 0 \leq \nu \leq n-1 \ , \ n \geq 1 \tag{2.16}$$

$$\mathcal{L}_{n+\nu}(xB_{n+d}(x)) = \gamma_{n+1+\nu}^{\nu} \ , \ 0 \leq \nu \leq d-1 \ , \ n \geq 0 \tag{2.17}$$

De plus, selon (2.13) et (2.16), on a

$$\mathcal{L}_n(xB_{n+d}(x)) \neq 0 \ , \ n \geq 0 \tag{2.18}$$

Montrons qu'on a :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\nu(x^m B_{md+\nu}(x)) \neq 0 \ , \ m \geq 0 \\ &\mathcal{L}_\nu(x^m B_n(x)) \neq 0 \ , \ n \geq md+\nu+1 \ , \ m \geq 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

pour chaque $0 \leq \nu \leq d-1$.

Fixons $0 \leq \nu \leq d-1$. Par définition de la suite duale, les relations (2.19) sont vérifiées pour $m=0$ et d'après (2.16) et (2.18) pour $m=1$. Supposons qu'elles soient vérifiées jusqu'à l'indice $m \geq 1$. Alors de (2.15) où on change n en $md+\nu+1+n$, on a

$$\mathcal{L}_\nu(x^{m+1}B_{(m+1)d+\nu+1+n}(x)) = 0 \ , \ n \geq 0$$

et de (2.15) où on change n en $md+\nu$, on trouve :

$$\mathcal{L}_\nu(x^{m+1}B_{(m+1)d+\nu}(x)) = \chi_{(m+1)d+\nu-1,md+\nu}\mathcal{L}_\nu(x^m B_{md+\nu}(x)).$$

Or d'après l'hypothèse de régularité $\chi_{md+\nu+d-1,md+\nu} \neq 0$ d'où le résultat.

b) $\Rightarrow$ c). Considérons ***a priori*** les formes suivantes :

$$\mathcal{F}_{n,\nu} = \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{d-1} \tau_{\mu,k}^{n,\nu} \mathcal{L}_k(B_\mu .) + \sum_{k=0}^{\nu} \tau_{n,k}^{n,\nu} \mathcal{L}_k(B_n .)$$

pour chaque $n \geq 1, 0 \leq \nu \leq d-1$.

D'après l'hypothèse, on a

$$\mathcal{F}_{n,\nu}(B_m) = 0 \ , \ m \geq nd + \nu + 1.$$

Ensuite, on peut déterminer de proche en proche de façon unique les coefficients $\tau_{n,k}^{n,\nu}$ de sorte que :

$$\mathcal{F}_{n,\nu}(B_m) = 0 \ , \ 0 \leq m \leq nd + \nu - 1$$
$$\mathcal{F}_{n,\nu}(B_{nd+\nu}) = 1.$$

En particulier, on a :

$$1 = \tau_{n,\nu}^{n,\nu} \mathcal{L}_\nu(B_n B_{nd+\nu}). \tag{2.20}$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{F}_{n,\nu} = \mathcal{L}_{nd+\nu}.$$

Compte-tenu de (2.20), on a tout de suite le résultat annoncé.

c) $\Rightarrow$ b). Montrons que les relations (2.19) sont vérifiées.

Écrivons (2.14) sous la forme :

$$\mathcal{L}^\nu(\Lambda^\nu(m,\nu).) = \mathcal{L}_{md+\nu} - \sum_{\mu \neq \nu} \mathcal{L}_\mu(\Lambda^\mu(m,\nu).). \tag{2.21}$$

Montrons d'abord que $\mathcal{L}_0(xB_{d+n}(x)) = 0, n \geq 1$ et $\mathcal{L}_0(xB_d(x)) \neq 0$. Or de (2.21), on a :

$$\mathcal{L}_0(\Lambda^0(1,0)B_{d+n}(x)) = \mathcal{L}_d(B_{d+n}) - \sum_{\mu=1}^{d-1} \mathcal{L}_\mu(\Lambda^\mu(1,0)B_{d+n}) = 0$$

pour $n \geq 1$, d'où le résultat puisque $\deg \Lambda^0(1,0) = 1$.

Ensuite, on a :

$$\mathcal{L}_0(\Lambda^0(1,0)B_d) = \mathcal{L}_d(B_d) = 1 \ , \ \text{soit } \mathcal{L}_0(xB_d(x)) \neq 0.$$

Pour $1 \leq \nu \leq d-1$, on a de (2.21) :

$$\mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(1,\nu)B_{d+\nu+n}) = \mathcal{L}_{d+\nu}(B_{d+\nu+n}) - \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \mathcal{L}_\mu(\Lambda^\mu(1,\nu)B_{d+\nu+n}) = 0$$

pour $n \geq 1$ en procédant par récurrence et pour $n = 0$:

$$\mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(1,\nu)B_{d+\nu}) = \mathcal{L}_{d+\nu}(B_{d+\nu}) = 1$$

Les relations (2.19) sont vérifiées pour $m = 0, 1$. Supposons qu'elles soient vérifiées jusqu'à l'indice $m \geq 1$. Alors de (2.21), on a :

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(m+1,\nu)B_{(m+1)d+\nu+n}) = 0 \;,\; n \geq 1 \\ &\mathcal{L}_\nu(\Lambda^\nu(m+1,\nu)B_{(m+1)d+\nu}) = 1. \end{aligned}$$

Donc les relations (2.19) sont vérifiées pour l'indice $m+1$. D'où le résultat.

b) $\Rightarrow$ a). La démonstration est faite dans [5].

Remarques.— Ce résultat constitue la généralisation naturelle du théorème de Shohat-Favard. Lorsque l'un quelconque des énoncés a), b), c) est réalisé, la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à $\Gamma = (\Gamma^1, \ldots \Gamma^d)$ où :

$$\Gamma^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \lambda_\nu^\alpha \mathcal{L}_\nu \quad , \quad \lambda_{\alpha-1}^\alpha \neq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

On a les relations :

$$\text{(2.22)} \qquad \gamma_{nd+\alpha}^0 = \frac{\Gamma^\alpha(x^{n+1}B_{(n+1)d+\alpha-1}(x))}{\Gamma^\alpha(x^n B_{nd+\alpha-1}(x))}, n \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

$$\text{(2.23)} \quad \frac{\Gamma^\alpha(x^{n+1}B_{(n+1)d+\alpha-1}(x))}{\Gamma^\alpha(B_{\alpha-1})} = \Pi_{\nu=0}^n \gamma_{\nu d+\alpha}^0 \quad , \quad n \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

Lorsque $\alpha = d$ dans (2.23), on a :

$$\text{(2.24)} \qquad \Gamma^d(x^n B_{(nd+d-1)}(x)) = \Pi_{\nu=0}^n \gamma_{\nu d}^0 \quad , \quad n \geq 0$$

où, par définition, on a posé :

$$\text{(2.25)} \qquad \gamma_0^0 = \Gamma^d(B_{d-1}).$$

Les éléments de (2.12) sont donnés par :

(2.26)
$$\beta_\nu = \mathcal{L}_\nu(xB_\nu(x)) \quad , \quad 0 \le \nu \le d-1$$
$$\gamma_\alpha^{\alpha+\mu} = \mathcal{L}_{\alpha-1}(xB_{d-1-\mu}(x)) \quad , \quad 1 \le \alpha \le d-1-\mu \quad , \quad 0 \le \mu \le d-2$$

DÉFINITION 2.3.— *Soit $d, s \ge 1$ entiers et $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$. On dit que la suite $\{B_n\}_{n\ge 0}$ est strictement s/d orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$ si elle vérifie :*

(2.27) $$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \ge md+s \quad , \quad m \ge 0$$

(2.28) $$\mathcal{L}(B_m B_{md+s-1}) \ne 0 \quad , \quad m \ge 0$$

Une telle suite est nécessairement libre et on peut donc toujours la normaliser. Lorsque $s = 1$, on retrouve la notion de suite strictement $1/d$ orthogonal [6]. Lorsque $d = 1$, cela signifie que la suite est strictement quasi-orthogonale d'ordre $s-1$ par rapport à $\mathcal{L}$.

Si la suite $\{B_n\}_{n\ge 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à Γ, alors elle est strictement α/d orthogonale par rapport à $\Gamma^\alpha, 1 \le \alpha \le d$ et réciproquement.

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2.— *Pour chaque suite $\{B_n\}_{n\ge 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ, les énoncés suivants sont équivalents :*

a) il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$ et $s \ge 1$ entier tels que :

(2.29) $$\mathcal{L}(B_{s-1}) \ne 0 \quad , \quad \mathcal{L}(B_n) = 0 \quad , \quad n \ge s.$$

b) Il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{P}', s \ge 1$ entier et d polynômes $\Phi^\alpha, 1 \le \alpha \le d$ tels que :

(2.30) $$\mathcal{L} = \sum_{\alpha=1}^{d} \Gamma^\alpha(\Phi^\alpha\ .)$$

avec les propriétés suivantes : si $s-1 = qd+r, 0 \le r \le d-1$, on a :

$$\deg \Phi^{r+1} = q$$

$$\deg \Phi^\alpha \le q \quad , \quad 1 \le \alpha \le r \quad si \quad 1 \le r \le d-1$$
$$\deg \Phi^\alpha \le q-1 \quad , \quad r+2 \le \alpha \le d \quad si \quad 0 \le r \le d-2$$

c) Il existe $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'$ et $s \ge 1$ entier tels que la suite $\{B_n\}_{n\ge 0}$ soit strictement s/d orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$.

a) $\Rightarrow$ b). D'après le lemme 1.1, il existe $\lambda_\nu \in \mathcal{C}, 0 \leq \nu \leq s-1$, tels que

$$\mathcal{L} = \sum_{\nu=0}^{s-1} \lambda_\nu \mathcal{L}_\nu \quad , \quad \lambda_{s-1} \neq 0$$

c'est-à-dire, puisque $s-1 = qd+r$:

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu=0}^{q-1}\sum_{\varrho=0}^{d-1} \lambda_{\mu d+\varrho}\mathcal{L}_{\mu d+\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{r} \lambda_{qd+\varrho}\mathcal{L}_{qd+\varrho}$$

d'où le résultat, d'après le point c) du théorème 2.1.

b) $\Rightarrow$ c). D'après (2.30), on a, compte-tenu des propriétés des Φ^α :

$$\mathcal{L}(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq md+s$$
$$\mathcal{L}(x^m B_{md+s-1}(x)) = \Gamma^{r+1}(x^m \Phi^{r+1}(x) B_{md+s-1}(x)) \neq 0$$

c) $\Rightarrow$ a). C'est évident.

3. La quasi-orthogonalité de dimension d

DÉFINITION 3.1.— *On dit que la suite libre $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s et de dimension $d \geq 1$ par rapport à Γ, si pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$, il existe des entiers $s_\alpha \geq 0$ et $\sigma_\alpha \geq s_\alpha$ tels que :*

$$\Gamma^\alpha(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq (m+s_\alpha)d+\alpha \quad , \quad m \geq 0 \tag{3.1}$$
$$\Gamma^\alpha(x^{\sigma_\alpha - s_\alpha} B_{\sigma_\alpha d+\alpha-1}(x)) \neq 0 \tag{3.2}$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$. On pose $s = \max_{1\leq\alpha\leq d} s_\alpha$.

Remarques.—

Lorsque $d=1$, on retrouve la notion habituelle de quasi-orthogonalité d'ordre s [7] [9].

Lorsque $s=0$, c'est-à-dire $s_\alpha = 0$, $1 \leq \alpha \leq d$, la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale de dimension d par rapport à Γ non nécessairement régulière : c'est une définition plus générale que celle donnée dans le paragraphe 1.

LEMME 3.1.— *Pour Γ et s donnés, le système d'entiers s_α, $1 \leq \alpha \leq d$ est unique.*

Supposons qu'il existe un autre système d'entiers s'_α et $\sigma'_\alpha \geq s'_\alpha$ tels que $s = \max_{1\leq\alpha\leq d} s'_\alpha$ et vérifiant :

$$(3.3) \qquad \begin{array}{l} \Gamma^\alpha(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq (m+s'_\alpha)d+\alpha \quad , \quad m \geq 0 \\ \Gamma^\alpha(x^{\sigma'_\alpha - s'_\alpha} B_{\sigma'_\alpha d+\alpha-1}(x)) \neq 0 \end{array}$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$.

Il suffit de montrer que $s'_\alpha \geq s_\alpha, 1 \leq \alpha \leq d$, car ensuite par échange du rôle de s'_α et s_α, on a $s_\alpha \geq s'_\alpha$.

Supposons qu'il existe un indice α_0 tel que

$$s'_{\alpha_0} < s_{\alpha_0} \leq s.$$

D'après (3.3) :

$$(3.4) \qquad \Gamma^{\alpha_0}(x^m B_{(m+s'_{\alpha_0})d+\alpha_0+\nu}(x)) = 0 \quad , \quad m, \nu \geq 0.$$

D'après (3.2), il existe $m_{\alpha_0} \geq 0$ tel que :

$$\Gamma^{\alpha_0}(x^{m_{\alpha_0}} B_{(m_{\alpha_0}+s'_{\alpha_0})d+\alpha_0+1}(x)) \neq 0.$$

Dans (3.4), prenons $\nu = (s_{\alpha_0} - s'_{\alpha_0})d - 1$ et $m = m_{\alpha_0}$:

$$\Gamma^{\alpha_0}(x^{m_{\alpha_0}} B_{(m_{\alpha_0}+s_{\alpha_0})d+\alpha_0-1}(x)) \neq 0.$$

C'est contradictoire, d'où le résultat.

LEMME 3.2.— *Une suite libre $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifiant (3.1) et (3.2) ne peut par être quasi-orthogonale d'ordre $s-1$ et de dimension d par rapport à Γ.*

Car si c'était le cas, on aurait :

$$(3.5) \qquad \Gamma^\alpha(x^m B_{(m+\widetilde{s}_\alpha)d+\alpha+\nu}(x)) = 0 \quad , \quad m, \nu \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

avec $s - 1 = \max_{1\leq\alpha\leq d} \widetilde{s}_\alpha$.

En particulier, pour $\nu \to \nu + d$:

$$\Gamma^\alpha(x^m B_{(m+\widetilde{s}_\alpha+1)d+\alpha+\nu}(x)) = 0 \quad , \quad m, \nu \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

Cela entraîne, d'après le lemme précédent :

$$\widetilde{s}_\alpha + 1 = s_\alpha \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d.$$

Prenons alors $\nu = d - 1$ dans (3.5) :

$$\Gamma^\alpha(x^m B_{(m+s_\alpha)d+\alpha-1}(x)) = 0 \quad , \quad m \geq 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

contrairement à l'hypothèse (3.2).

DÉFINITION 3.2.— *On dit que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s et de dimension d par rapport à Γ si elle vérifie :*

$$\Gamma^\alpha(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq (m + s_\alpha)d + \alpha \quad , \quad m \geq 0 \tag{3.6}$$

$$\Gamma^\alpha(B_m B_{(m+s_\alpha)d+\alpha-1}(x)) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0 \tag{3.7}$$

pour chaque $1 \leq \alpha \leq d$, avec $s = \max\limits_{1\leq\alpha\leq d} s_\alpha$.

Remarques.— Une telle suite est nécessairement libre.

Dans les définitions 3.1 et 3.2, la fonctionnelle Γ n'est pas nécessairement régulière.

Regardons maintenant dans quelle condition une suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ peut être quasi-orthogonale d'ordre s et de dimension $\widetilde{d}$ par rapport à une autre fonctionnelle $\widetilde{\Gamma}$.

PROPOSITION 3.1.— *Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite orthogonale de dimension d par rapport à Γ. Supposons qu'il existe $\widetilde{\Gamma}$ de dimension $\widetilde{d}$ telle que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\widetilde{\Gamma}$. Alors nécessairement, on a $\widetilde{d} \geq d$.*

Par hypothèse, on a :

$$\widetilde{\Gamma}^\beta(x^m B_n(x)) = 0 \quad , \quad n \geq (m + s_\beta)\widetilde{d} + \beta \tag{3.8}$$

Il existe $\sigma_\beta \geq s_\beta$ tel que :

$$\widetilde{\Gamma}^\beta(x^{\sigma_\beta - s_\beta} B_{\sigma_\beta \widetilde{d}+\beta-1}(x)) \neq 0 \tag{3.9}$$

pour chaque $1 \leq \beta \leq \widetilde{d}$.

De (3.8), on a en particulier :

$$\widetilde{\Gamma}^{\beta}(B_n)=0 \quad , \quad n\geq s_\beta\widetilde{d}+\beta \quad , \quad 1\leq\beta\leq\widetilde{d}.$$

En vertu de (3.9), il existe $0\leq\nu_\beta\leq s_\beta\widetilde{d}+\beta-1$ tel que :

$$\widetilde{\Gamma}^{\beta}(B_{\nu_\beta})\neq 0 \quad , \quad \widetilde{\Gamma}^{\beta}(B_n)=0 \quad , \quad n\geq\nu_\beta+1. \tag{3.10}$$

Écrivons

$$\nu_\beta=q_\beta d+r_\beta \quad , \quad 0\leq r_\beta\leq d-1$$

D'après le théorème 2.2, b), il existe $d\times\widetilde{d}$ polynômes $\Phi^{\alpha,\beta}, 1\leq\alpha\leq d$, $1\leq\beta\leq\widetilde{d}$ tels que :

$$\widetilde{\Gamma}^{\beta}=\Sigma_{\alpha=1}^{d}\Gamma^{\alpha}(\Phi^{\alpha,\beta}\,.) \quad , \quad 1\leq\beta\leq\widetilde{d} \tag{3.11}$$

où

$$\begin{gathered}\deg\Phi^{r_\beta+1,\beta}=q_\beta\\ \deg\Phi^{\alpha,\beta}\leq q_\beta \quad , \quad 1\leq\alpha\leq r_\beta \quad \text{si} \quad 1\leq r_\beta\leq d-1\\ \deg\Phi^{\alpha,\beta}\leq q_\beta-1 \quad , \quad r_\beta+2\leq\alpha\leq d \quad \text{si} \quad 0\leq r_\beta\leq d-2\end{gathered}$$

Définissons μ_β par :

$$s_\beta\widetilde{d}+\beta-1=q_\beta d+r_\beta+\mu_\beta \tag{3.12}$$

Supposons maintenant que $1\leq\widetilde{d}<d$.

Par division euclidienne, on a :

$$\mu_\beta=m_\beta(d-\widetilde{d})+n_\beta \quad , \quad 0\leq n_\beta\leq d-\widetilde{d}-1.$$

D'après (3.12), on a pour chaque $m\geq 0$:

$$(m_\beta+m+s_\beta)\widetilde{d}+\beta-1+m(d-\widetilde{d})-n_\beta=(m_\beta+m+q_\beta)d+r_\beta=P_m.$$

Pour tous les indices m tels que $m(d-\widetilde{d})-n_\beta\geq 1$, on a

$$\widetilde{\Gamma}^{\beta}(x^{m_\beta+m}B_{p_m}(x))=0 \quad 1\leq\beta\leq\widetilde{d}.$$

Mais d'autre part, on a aussi de (3.11) :

$$\Gamma^{\beta}(x^{m_\beta+m}B_{p_m}(x))=\Gamma^{r_\beta+1}(x^{m_\beta+m}\Phi^{r_\beta+1,\beta}(x)B_{p_m}(x))\neq 0$$

c'est contradictoire et donc nécessairement $\widetilde{d} \geq d$.

Étudions plus précisément le cas où $\widetilde{d} \geq d$. On a toujours (3.11) et (3.12). On a alors :

$$\mu_\beta = 0 \qquad 1 \leq \beta \leq \widetilde{d}.$$

Car soit $m\widetilde{d} = \widetilde{P}_m d + \theta_m, 0 \leq \theta_m \leq d-1, m \geq 0$.

On peut écrire :

$$(m+s_\beta)\widetilde{d} + \beta - 1 = (\widetilde{P}_m + q_\beta)d + \theta_m + r_\beta + \mu_\beta.$$

Si $\mu_\beta \geq 1$, on a de (3.11) pour chaque $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^\beta(x^m B_{(m+s_\beta)\widetilde{d}+\beta-1}(x)) &= \Sigma_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(x^m \Phi^{\alpha,\beta}(x) B_{(\widetilde{P}_m+q_\beta)d+\theta_m+r_\beta+\mu_\beta}(x)) \\ &= 0\end{aligned}$$

(car $\widetilde{P}_m \geq m$) contrairement à l'hypothèse (3.9), d'où la conclusion annoncée.

Distinguons les deux cas :

a) $\widetilde{d} > d$. On a :

$$\begin{aligned}&\sigma_\beta = s_\beta \\ &\widetilde{\Gamma}^\beta(x^{\sigma-s_\beta} B_{\sigma\widetilde{d}+\beta-1}(x)) = 0 \quad , \quad \sigma \geq s_\beta + 1.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Car on a :

$$\Gamma^\alpha(x^m \Phi^{\alpha,\beta}(x) B_{\widetilde{P}_m+q_\beta)d+\theta_m+r_\beta}(x)) = 0 \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq d$$

si $m \geq 1$: en effet, si $\widetilde{P}_m > m$, c'est évident et si $\widetilde{P}_m = m$ alors $m(\widetilde{d} - d) = \theta_m \geq 1$.

Mais pour $m = 0$, on a :

$$\widetilde{\Gamma}^\beta(B_{s_\beta d+\beta-1}) = \Gamma^{r_\beta+1}(\Phi^{r_\beta+1,\beta}(x) B_{q_\beta d+r_\beta}) \neq 0$$

b) $\widetilde{d} = d$. On a de (3.12) :

$$\left.\begin{aligned}&q_\beta = s_\beta \\ &r_\beta = \beta - 1\end{aligned}\right\} \quad 1 \leq \beta \leq d \tag{3.14}$$

de sorte que :

$$\widetilde{\Gamma}^{\beta}(x^m B_{(m+s_\beta)d+\beta-1}(x)) = \Gamma^{\beta}(x^m \Phi^{\beta,\beta}(x) B_{(m+s_\beta)d+\beta-1}(x)) \neq 0$$

pour chaque $m \geq 0$.

Dans ce cas, la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est nécessairement strictement quasi-orthogonale d'ordre s.

PROPOSITION 3.2.— *Si la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ vérifie de plus : il existe $\widetilde{\Gamma}$ de dimension $\widetilde{d}$ telle que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit quasi-orthogonaled'ordre $s = \max\limits_{\beta} s_\beta$ par rapport à $\widetilde{\Gamma}$ avec la condition*

$$\exists \sigma_\beta > s_\beta \quad \textit{tel que} \quad \widetilde{\Gamma}^{\beta}(x^{\sigma_\beta - s_\beta} B_{\sigma_\beta \widetilde{d}+\beta-1}(x)) \neq 0 \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \widetilde{d} \quad ,$$

alors nécessairement $\widetilde{d} = d$ et la suite $\{B_n\}_{n\geq}0$ est strictement orthogonale d'ordre s par rapport à Γ.

Lorsque $\widetilde{d} = d$, on peut préciser à l'aide des énoncés suivants :

THÉORÈME 3.1.— *Pour chaque suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale de dimension d par rapport à Γ, les énoncés suivants sont équivalents :*

a) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ de dimension d tel que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\widetilde{\Gamma}$.

b) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ de dimension d et $s_\beta \geq 0, \sigma_\beta \geq s_\beta$ entiers, $1 \leq \beta \leq d$ tels que :

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{\Gamma}^{\beta}(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s_\beta d + \beta \\ &\widetilde{\Gamma}^{\beta}(x^{\sigma_\beta - s_\beta} B_{\sigma_\beta d+\beta-1}(x)) \neq 0 \end{aligned}\right. \quad , \qquad 1 \leq \beta \leq d$$

c) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ de dimension d et d^2 polynômes $\Phi^{\alpha,\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq d$ tels que :

$$\widetilde{\Gamma}^{\beta} = \Sigma_{\alpha=1}^{d} \Gamma^{\alpha}(\Phi^{\alpha,\beta}\ .) \quad , \quad 1 \leq \beta \leq d \tag{3.15}$$

où
$$deg\ \Phi^{\beta,\beta} = s_\beta$$

$$\begin{aligned} &deg\ \Phi^{\alpha,\beta} \leq s_\beta \quad &, \quad 1 \leq \alpha \leq \beta - 1 \quad si \quad 2 \leq \beta \leq d \\ &deg\ \Phi^{\alpha,\beta} \leq s_\beta - 1 \quad &, \quad \beta + 1 \leq \alpha \leq d \quad si \quad 1 \leq \beta \leq d-1 \end{aligned}$$

d) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ *de dimension* d *telle que la suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *soit strictement quasi-orthogonale d'ordre* s *par à* $\widetilde{\Gamma}$.

e) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ *de dimension* d *et* $s_\beta \geq 0$ *entiers,* $1 \leq \beta \leq d$ *tels que :*

$$\widetilde{\Gamma}^\beta(B_{s_\beta d+\beta-1}) \neq 0 \quad , \quad \widetilde{\Gamma}^\beta(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s_\beta d + \beta$$

pour chaque $1 \leq \beta \leq d$.

a) $\Rightarrow$ *b) D'après la définition 3.1.*

b) $\Rightarrow$ *c) D'après ce qui suit la proposition 3.1.*

c) $\Rightarrow$ *d) D'après (3.15) et posant* $s = \max\limits_{1\leq\beta\leq d} s_\beta$

d) $\Rightarrow$ *a) C'est évident.*

d) $\Rightarrow$ *e) D'après la définition 3.2.*

e) $\Rightarrow$ *c) D'après le théorème 2.2.*

Remarque. — Lorsque $d = 1$, on retrouve un résultat donné dans [7]. Lorsque $\widetilde{d} > d$, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Pour chaque suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *orthogonale de dimension* d *par rapport à* Γ*, les énoncés suivants sont équivalents :*

a) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ *de dimension* $\widetilde{d} > d$ *telle que la suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *soit quasi-orthogonale d'ordre* s *par rapport à* $\widetilde{\Gamma}$.

b) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ *de dimension* $\widetilde{d} > d$ *et* $s_\beta \geq 0$ *entiers,* $1 \leq \beta \leq \widetilde{d}$ *tels que :*

$$\widetilde{\Gamma}^\beta(B_{s_\beta \widetilde{d}+\beta-1}) \neq 0 \quad , \quad \widetilde{\Gamma}^\beta(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s_\beta \widetilde{d} + \beta \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \widetilde{d}.$$

c) Il existe $\widetilde{\Gamma}$ *de dimension* $\widetilde{d} > d$*, des entiers* $s_\beta \geq 0, 1 \leq \beta \leq \widetilde{d}$ *et* $d \times \widetilde{d}$ *polynômes* $\Phi^{\alpha,\beta}, 1 \leq \alpha \leq d, 1 \leq \beta \leq \widetilde{d}$ *tels que :*

$$\widetilde{\Gamma}^\beta = \Sigma_{\alpha=1}^d \Gamma^\alpha(\Phi^{\alpha,\beta}\ .) \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \widetilde{d} \tag{3.16}$$

où si on pose $s_\beta \widetilde{d} + \beta - 1 = q_\beta d + r_\beta \quad , \quad 0 \leq r_\beta \leq d-1$*, on a :*

$$deg\ \Phi^{r_\beta+1,\beta} = q_\beta \quad , \quad 1 \leq \beta \leq \widetilde{d}$$

$$deg\ \Phi^{\alpha,\beta} \leq q_\beta \quad , \quad 1 \leq \alpha \leq r_\beta \quad si \quad 1 \leq r_\beta \leq d-1$$
$$deg\ \Phi^{\alpha,\beta} \leq q_\beta - 1 \quad , \quad r_\beta + 2 \leq \alpha \leq d \quad si \quad 0 \leq r_\beta \leq d-2$$

a) $\Rightarrow$ b) D'après ce qui suit la proposition 3.1

b) $\Rightarrow$ c) D'après le théorème 2.2.

c) $\Rightarrow$ a) D'après (3.16) et posant $s = \max\limits_{1\leq\beta\leq\widetilde{d}} s_\beta$

4. La quasi-orthogonalité stricte (de dimension un)

On peut caractériser le fait pour la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ d'être $s+1/_d$ orthogonale strictement à l'aide de sa suite duale $\{\mathcal{L}_n\}_{n\geq 0}$.

THÉORÈME 4.1.— *Pour que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit strictement $s+1/_d$ orthogonale par rapport à $\mathcal{L}$, il faut et il suffit qu'il existe $s+1$ suites $\{\sigma_m\}_{m\geq 0}$, $\sigma_m \neq 0$, $\{\zeta_m^\tau\}_{m\geq 0}, 0 \leq \tau \leq s-1, d-1$ tableaux $(\xi_{m,\mu}^\nu), 0 \leq \mu \leq m-1, m \geq 1, 0 \leq \nu \leq d-2$ et une suite de polynômes normalisés $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$ tels que :*

$$\mathcal{L}_s = \sigma_0 \mathcal{L}(\Phi_0\ .) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_0^\tau \mathcal{L}_\tau \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}_{md+s} = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m\ .) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau + \sum_{\nu=0}^{d-2} \sum_{\mu=0}^{m-1} \xi_{m,\mu}^\nu \mathcal{L}_{\mu d+s+1+\nu}\ ,\ m \geq 1. \tag{4.2}$$

Remarques.— On peut convenir qu'une somme est nulle dès que l'indice supérieur $\sum\limits^{n}$ est négatif. Lorsque $d = 1$, on a en particulier :

$$\mathcal{L}_{m+s} = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m\ .) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau\ ,\ m \geq 0, \tag{4.3}$$

c'est le cas d'une suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\mathcal{L}$.

Lorsque $s = 0$, on retrouve le résultat classique :

$$\mathcal{L}_m = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m\ .)$$

avec $\Phi_m = B_m$ et $\sigma_m = (\mathcal{L}(B_m^2))^{-1}$, $m \geq 0$.

On étudiera plus loin (4.3) lorsque $s \geq 1$.

Les conditions sont suffisantes. Car de (4.1), on a

$$\sigma_0 \mathcal{L}(\Phi_0 B_n) = 0 \quad , \quad n \geq s+1$$

et de (4.2) :

$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_m) = 0 \quad , \quad n \geq md+s+1 \quad , \quad m \geq 1$$

ce qui entraîne :

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq md+s+1 \quad , \quad m \geq 0$$

D'autre part, de $(4,1)$ et $(4,2)$:

$$1 = \sigma_0 \mathcal{L}(\Phi_0 B_s)$$
$$1 = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{md+s})$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(B_m B_{md+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

Les conditions sont nécessaires. Supposons que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie :

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq md+s+1 \quad , \quad m \geq 0$$
$$\mathcal{L}(B_m B_{md+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

D'après le lemme 1.1, il existe des coefficients λ_m^ν tels que

$$(4.3) \qquad \mathcal{L}(B_m \,.) = \sum_{\nu=0}^{md+s} \lambda_m^\nu \mathcal{L}_\nu \quad , \quad \lambda_m^{md+s} \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

Pour $m = 0$, on en déduit :

$$\mathcal{L}_s = (\lambda_0^s)^{-1} \mathcal{L}(B_0 \,.) - \sum_{\nu=0}^{s-1} (\lambda_0^s)^{-1} \lambda_0^\nu \mathcal{L}_\nu$$

c'est (4.1), avec $\sigma_0 = (\lambda_0^s)^{-1}, \zeta_0 = -(\lambda_0^s)^{-1}\lambda_0^\nu, 0 \leq \nu \leq s-1$.

Supposons qu'on ait établi la formule (4.2) pour $0 \leq n \leq m$. De (4.3), on a :

$$\mathcal{L}_{(m+1)d+s} = \sigma_{m+1} \mathcal{L}(B_{m+1} \,.) - \sum_{\nu=0}^{(m+1)d+s-1} \widetilde{\lambda}_{m+1}^\nu \mathcal{L}_\nu$$

avec

$$\sigma_{m+1} = (\lambda_{m+1}^{(m+1)d+s})^{-1} \quad , \quad \widetilde{\lambda}_{m+1}^{\nu} = \sigma_{m+1}\lambda_{m+1}^{\nu}$$

On peut écrire :

$$\mathcal{L}_{(m+1)d+s} = \sigma_{m+1}\mathcal{L}(B_{m+1}\,.) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \widetilde{\lambda}_{m+1}^{\tau}\mathcal{L}_{\tau} - \sum_{\mu=0}^{m} \widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s}\mathcal{L}_{\mu d+s}$$
$$- \sum_{\nu=0}^{d-2}\sum_{\mu=0}^{m-1} \widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu ds+1+\nu}\mathcal{L}_{\mu d+s+1+\nu} - \sum_{\nu=0}^{d-2} \widetilde{\lambda}_{m+1}^{md+s+1+\nu}\mathcal{L}_{md+s+1+\nu}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{\mu=0}^{m} \widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s}\mathcal{L}_{\mu d+s} = \sum_{\mu=0}^{m} \widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s}\{\sigma_{\mu}\mathcal{L}(\Phi_{\mu}\,.) + \sum_{\tau=0}^{s-1}\zeta_{\mu}^{\tau}\mathcal{L}_{\tau}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{d-2}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1} \xi_{\mu,\lambda}^{\nu}\mathcal{L}_{\lambda d+s+1+\nu}\}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{m} \sigma_{\mu}\widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s}\mathcal{L}(\Phi_{\mu}\,.) + \sum_{\tau=0}^{s-1}\left(\sum_{\mu=0}^{m}\widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s}\zeta_{\mu}^{\tau}\right)\mathcal{L}_{\tau}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{d-2}\sum_{\lambda=0}^{m-1}\left(\sum_{\mu=\lambda}^{m-1}\widetilde{\lambda}_{m+1}^{(\mu+1)d+s}\xi_{\mu+1,\lambda}^{\nu}\right)\mathcal{L}_{\lambda d+s+1+\nu}.$$

On en déduit (4.2) pour l'indice $m+1$ en posant :

$$\Phi_{m+1}(x) = B_{m+1}(x) - \sum_{\mu=0}^{m}\sigma_{\mu}\lambda_{m+1}^{\mu d+s}\Phi_{\mu}(x)$$

$$\zeta_{m+1}^{\tau} = -\widetilde{\lambda}_{m+1}^{\tau} - \sum_{\mu=0}^{m}\widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s}\zeta_{\mu}^{\tau}$$

$$\xi_{m+1,\mu}^{\nu} = -\widetilde{\lambda}_{m+1}^{\mu d+s+1+\nu} - \sum_{\lambda=\mu}^{m-1}\widetilde{\lambda}_{m+1}^{(\mu+1)d+s}\xi_{\lambda+1,\mu}^{\nu} \quad , \quad 0 \le \mu \le m-1$$

$$\xi_{m+1,m}^{\nu} = -\widetilde{\lambda}_{m+1}^{md+s+1+\nu}.$$

Remarques. — Ce résultat permettra de caractériser le fait pour une suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ d'être strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à Γ de dimension d.

Pour le moment, traitons seulement le cas ordinaire, celui où $d = 1$.

THÉORÈME 4.2.— *Pour chaque suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ donnée par (1.1), les énoncés suivants sont équivalents :*

a) Il existe un entier $s \geq 1$ et s suites $\{\zeta_n^\tau\}_{n\geq 0}$, $0 \leq \tau \leq s-1$ définies par les conditions :

$$(4.4)\quad \chi_{m-1+s,m-1+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\tau \chi_{m-1+s,\tau} \neq 0 \quad , \quad m \geq 1$$

$$\begin{aligned}(4.5)\quad &\zeta_m^\tau\{\chi_{m-1+s,m-1+s} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{m-1+s,\nu}\}\\ &= (\beta_\tau - \beta_{m-1+s})\zeta_{m-1}^\tau - \sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^\tau \delta_{m-1,\mu+1}\\ &+ \sum_{\mu=0}^{m-1} \zeta_\mu^\tau \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{\mu+s-1,\nu} - \delta_{m-1+s,\tau+1}\\ &+ \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^\nu \delta_{\nu,\tau+1} + \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_{m-1}^\nu \chi_{\tau-1,\nu}, \qquad 0 \leq \tau \leq s-1\,,\ m \geq 1\end{aligned}$$

$$(4.6)\qquad \chi_{n+s,m+s} = \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{n+s,\tau}, \quad n \geq m+1, \quad m \geq 0$$

b) Il existe une forme $\mathcal{L}$, un entier $s \geq 1$, $s+1$ suites : $\{\sigma_n\}_{n\geq 0}$, $\sigma_n \neq 0$ et $\{\zeta_n^\tau\}_{n\geq 0}$, $0 \leq \tau \leq s-1$ et une suite de polynômes normalisés $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$ tels que :

$$\mathcal{L}_{s+m} = \sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m\, .) + \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau\ ,\ m \geq 0$$

c) Il existe une forme $\mathcal{L}$ et un entier $s \geq 1$ tels que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\mathcal{L}$.

d) Il existe une forme $\mathcal{L}$, un entier $s \geq 1$ et une suite de polynômes normalisés $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ tels que :

$$(4.7)\qquad \mathcal{L}(\Phi_m B_n) = 0 \quad , \quad s \leq n \leq m+s-1 \quad , \quad m \geq 1$$

$$(4.8)\qquad \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

$$(4.9)\qquad \mathcal{L}(\Phi_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0.$$

a) $\Rightarrow$ b) Considérons les formes suivantes :

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{L}_{s+m} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau \quad , \quad m \geq 0.$$

On a par construction :
$\mathcal{F}_m(B_\mu) = -\zeta_m^\mu \qquad 0 \leq \mu \leq s-1$
$\mathcal{F}_m(B_\mu) = 0 \quad , \quad s \leq \mu \leq m+s-1 \quad , \quad m \geq 1$
$\mathcal{F}_m(B_{s+m}) = 1 \quad , \quad \mathcal{F}_m(B_\mu) = 0 \quad , \quad \mu \leq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0$
Ensuite, d'après (4.6) :

$$\mathcal{F}_m(xB_{n+s+1}(x)) = \chi_{n+s,m+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{n+s,\tau} = 0 \quad , \quad n \geq m+1 \quad , \quad m \geq 0$$

et d'après (4.4)

$$\mathcal{F}_m(xB_{m+s+1}(x)) = \chi_{m+s,m+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{m+s,\tau} \neq 0 \quad , \quad m \geq 0.$$

Soit maintenant les formes suivantes :

$$\mathcal{H}_m = \mathcal{F}_m - \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu^m \mathcal{F}_{m-\mu} - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(x.) \quad , \quad m \geq 1 \tag{4.10}$$

où λ_μ^m, $1 \leq \mu \leq m, \theta_m, m \geq 1$ sont arbitraires.

On a :

$$\mathcal{H}_m(B_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1$$

d'après les propriétés des formes $\mathcal{F}_m$.

Déterminons les paramètres λ_μ^m, $1 \leq \mu \leq m, \theta_m$ par les conditions :

$$\mathcal{H}_m(B_n) = 0 \quad , \quad s \leq n \leq m+s.$$

D'abord θ_m. On a :

$$\mathcal{H}_m(B_{m+s}) = 0 = 1 - \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu^m \mathcal{F}_{m-\mu}(B_{m+s}) - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_{m+s}(x)).$$

Or

$$\mathcal{F}_{m-\mu}(B_{m+s}) = \chi_{m-1+s,m-\mu+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-\mu}^\tau \chi_{m-1+s,\tau} = 0$$

pour $1 \leq \mu \leq m$, d'après (4.6). D'où :

$$1 = \theta_m \{\chi_{m-1+s,m-1+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^{\tau} \chi_{m-1+s,\tau}\} \tag{4.11}$$

Ensuite :

$$\mathcal{H}_m(B_{\nu+s}) = 0 = \mathcal{F}_m(B_{\nu+s}) - \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_{\mu}^{m} \mathcal{F}_{m-\mu}(B_{\nu+s}) - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s}(x))$$

pour $0 \leq \nu \leq m-1$.

$$\text{Or } \mathcal{F}_m(B_{\nu+s}) = 0, 0 \leq \nu \leq m-1 \text{ et } \mathcal{F}_{m-\mu}(B_{\nu+s}) = 0$$

si $m - \mu \neq \nu$ de sorte que

$$\lambda_{m-\nu}^{m} = -\theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s}(x)) \quad , \quad 0 \leq \nu \leq m-1.$$

Or d'après (1.1), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s}(x)) &= \mathcal{F}_{m-1}(xB_{\nu+s+1}) + \beta_{\nu+s} \mathcal{F}_{m-1}(B_{\nu+s}) \\ &\quad + \sum_{\tau=0}^{\nu+s-1} \chi_{\nu+s-1,\tau} \mathcal{F}_{m-1}(B_\tau) \\ &= \delta_{m-1,\nu+1} + \beta_{\nu+s} \delta_{m-1,\nu} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \chi_{\nu+s-1,\tau} \zeta_{m-1}^{\tau} \quad , \\ &\qquad 0 \leq \nu \leq m-1 \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\lambda_{m-\nu}^{m} = -\theta_m \{\delta_{m-1,\nu+1} + \beta_{\nu+s} \delta_{m-1,\nu} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{m-1}^{\tau} \chi_{\nu+s-1,\tau}\} \tag{4.12}$$

pour $0 \leq \nu \leq m-1$.

Considérons maintenant pour chaque $0 \leq n \leq s-1$:

$$\mathcal{H}_m(B_n) = \mathcal{F}_m(B_n) - \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_{\mu}^{m} \mathcal{F}_{m-\mu}(B_n) - \theta_m \mathcal{F}_{m-1}(xB_n(x)).$$

Or $$\mathcal{F}_{m-\mu}(B_n) = -\zeta^n_{m-\mu} \quad , \quad 0 \le n \le s-1 \quad , \quad 0 \le \mu \le m$$

$$\mathcal{F}_{m-1}(xB_n(x)) = \delta_{m-1+s,n+1} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta^{\tau}_{m-1}\delta_{\tau,n+1} - \beta_n\zeta^n_{m-1} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta^{\nu}_{m-1}\chi_{n-1,\nu} \quad , \quad 0 \le n \le s-1.$$

Compte-tenu de (4.11) et (4.12) et de l'hypothèse (4.5), on vérifie facilement que

$$\mathcal{H}_m(B_n) = 0 \quad , \quad 0 \le n \le s-1$$

Pour chaque $m \ge 1$, la forme $\mathcal{H}_m$ est identiquement nulle; il en résulte de (4.10) :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\mu=1}^{m} \lambda^m_\mu \mathcal{F}_{m-\mu} + \theta_m\mathcal{F}_{m-1}(x\ .)\ ,\ m \ge 1$$

On en déduit, en procédant par récurrence :

$$\mathcal{F}_m = \sigma_m\mathcal{F}_0(\Phi_m\ .) \quad , \quad m \ge 0$$

avec $\sigma_0 = 1$, $\sigma_m = \Pi^m_{\mu=1}\theta_\mu$, $m \ge 1$.

Le point b) est ainsi démontré en posant $\mathcal{L} = \mathcal{F}_0$.

b) $\Rightarrow$ c) D'après le théorème 4.1.

c) $\Rightarrow$ d) Posons

$$\Phi_m = \sum_{\mu=0}^{m} a_{m,\mu}B_\mu(x) \quad , \quad m \ge 0 \quad , \quad a_{m,m} = 1.$$

$$\mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathcal{L}(B_\mu B_\nu)a_{m,\nu} + \mathcal{L}(B_\mu B_m) \quad , \quad m \ge 1 \quad , \quad \mu \ge 0. \tag{4.13}$$

Pour chaque $m \ge 1$, les conditions (4.7) $\mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) = 0$, $s \le \mu \le m+s-1$ permettent de déterminer de façon unique $a_{m,\nu} 0 \le \nu \le m-1$, car si

$$\delta_m = \det\ (\mathcal{L}(B_\mu B_\nu)) \quad , \quad m \ge 1$$
$$s \le \mu \le s+m-1$$
$$0 \le \nu \le m-1$$

on a

$$\delta_m = \Pi_{\mu=0}^{m-1}\mathcal{L}(B_\mu B_{\mu+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 1$$

en vertu de l'hypothèse :

$$\mathcal{L}(B_m B_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0$$
$$\mathcal{L}(B_m B_{m+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

Dans (4.13), prenons $\mu = m + s$:

$$\mathcal{L}(\Phi_m B_{m+s}) = \mathcal{L}(B_{m+s} B_m) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

d'où (4.8). En prenant $\mu \geq m + s + 1$, on obtient (4.9).

d) $\Rightarrow$ c) C'est évident d'après (4.8) et (4.9).

c) $\Rightarrow$ b) D'après le théorème 4.1.

Avant de montrer que b) entraîne a), indiquons des propriétés plus précises de la suite $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$.

PROPOSITION 4.1.— *Si l'un quelconque des énoncés b), c) ou d) est vérifié, on a les propriétés suivantes :*

1)

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\eta_{n,s+\nu}}{\eta_{\nu,s+\nu}}\Phi_\nu(x) \quad , \quad 0 \leq n \leq 2s \tag{4.14}$$

$$B_{n+2s}(x) = \sum_{\nu=0}^{2s} \frac{\eta_{n+2s,n+\nu+s}}{\eta_{n+\nu,n+\nu+s}}\Phi_{n+\nu}(x) \quad , \quad n \geq 0 \tag{4.15}$$

où on a posé $\eta_{n,m} = \mathcal{L}(B_n B_m) \quad , \quad n,m \geq 0.$

2) Les suites $\{\zeta_n^\mu\}_{n\geq 0} 0 \leq \mu \leq s-1$ *sont des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2s :*

$$\sum_{\nu=0}^{2s} \eta_{n+2s,n+\nu+s}\zeta_{n+\nu}^\mu = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \mu \leq s-1 \tag{4.16}$$

avec les conditions intiales :

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_{n,s+\nu}\zeta_\nu^\mu + \eta_{n,\mu} = 0 \quad , \quad 0 \leq n \leq 2s \quad , \quad 0 \leq \mu \leq s-1 \tag{4.17}$$

3) Notant $\{\mathcal{F}_m\}_{m\geq 0}$ la suite duale de $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$, on a :

$$\eta_{m,s+m}\mathcal{F}_m = \mathcal{L}(B_{s+m}\,.) \quad , \quad m \geq 0. \tag{4.18}$$

4) Notant $\{\widetilde{\beta}_n\}_{n\geq 0}$ et $(\widetilde{\chi}_{n,m})0 \leq m \leq n, n \geq 0$ les éléments de la relation de structure (1.1) pour la suite $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$, on a :

$$\widetilde{\chi}_{n,m} = \frac{u_{n+1}}{u_m}\delta_{n,m} - \sum_{\nu=0}^{s-1} u_{n+1}\zeta_{n+1}^{\nu}\frac{\chi_{s-1+m,\nu}}{u_m} \quad , \quad 0 \leq m \leq n \quad , \quad n \geq 0 \tag{4.19}$$

avec

$$u_m = \eta_{m,s+m} \quad , \quad m \geq 0$$
$$\widetilde{\beta}_m = \beta_{s+m} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^{\tau}\chi_{s-1+m,\tau} \quad , \quad m \geq 0 \tag{4.20}$$

1) On peut écrire :

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu}\Phi_\nu(x) \quad , \quad n \geq 0$$

$$\mathcal{L}(B_nB_{s+\mu}) = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu}\mathcal{L}(\Phi_\nu B_{s+\mu}), 0 \leq \mu \leq n \quad , \quad 0 \leq n \leq 2s$$
$$= b_{n,\mu}\mathcal{L}(\Phi_\mu B_{s+\mu}) = b_{n,\mu}\eta_{\mu,s+\mu}$$

d'où (4.14).

Pour (4.15), on écrit :

$$B_{n+2s}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+2s} b_{n+2s,\nu}\Phi_\nu(x) \quad , \quad n \geq 0$$

$$\mathcal{L}(B_{n+2s}B_\mu) = \sum_{\nu=0}^{n+2s} b_{n+2s,\nu}\mathcal{L}(\Phi_\nu B_\mu) \quad , \quad 0 \leq \mu \leq n+s-1$$

Or

$$\mathcal{L}(B_{n+2s}B_\mu) = 0 \qquad 0 \leq \mu \leq \nu + s - 1$$
$$\mathcal{L}(\Phi_\nu B_\mu) = 0 \quad \text{si} \quad s \leq \mu \leq \nu + s - 1 \text{ ou si } \mu \geq \nu + s + 1$$

donc

$$0 = b_{n+2s,\mu-s}\mathcal{L}(\Phi_{\mu-s}B_\mu) \quad , \quad s \le \mu \le n+s-1$$

c'est-à-dire :

$$b_{n+2s,\mu} = 0 \qquad 0 \le \mu \le n-1$$

Il reste :

$$B_{n+2s}(x) = \sum_{\nu=n}^{n+2s} b_{n+2s,\nu}\Phi_\nu(x)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B_{n+2s}B_{n+s+\mu}) &= \sum_{\nu=n}^{n+2s} b_{n+2s,\nu}\mathcal{L}(\Phi_\nu B_{n+s+\mu}) \qquad , \quad 0 \le \mu \le 2s \\ &= b_{n+2s,n+\mu}\mathcal{L}(B_{n+s+\mu}\Phi_{n+\mu}) \qquad , \quad 0 \le \mu \le 2s\end{aligned}$$

d'où (4.15).

2) On a $\mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) = -u_m\zeta_m^\mu \quad , \quad 0 \le \mu \le s-1 \quad , \quad m \ge 0$ d'après le point b). D'où (4.17) de (4.14) et (4.16) de (4.15).

3) Notant $\widetilde{\mathcal{F}}_m = \sigma_m\mathcal{L}(\Phi_m\ .), m \ge 0$, montrons d'abord que

$$\text{(4.21)} \qquad \mathcal{F}_m = \sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}}\widetilde{\mathcal{F}}_\nu \quad , \quad 0 \le m \le s-1$$

$$\text{(4.22)} \qquad \mathcal{F}_m = \sum_{\nu=0}^{2s} \frac{\eta_{s+m,m+\nu}}{\eta_{m,m+s}}\widetilde{\mathcal{F}}_{m-s+s} \quad , \quad m \ge s$$

De (4.15), on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m(B_{n+2s}) &= 0 \quad , \quad m \ge m+1\ ; \\ \mathcal{F}_m(B_{m+2s}) &= \frac{\eta_{m+2s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \ne 0 \quad , \quad m \ge 0\end{aligned}$$

En vertu du lemme 1.1, on a donc :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\nu=0}^{m+2s} \lambda_\nu^m \mathcal{L}_\nu \quad , \quad m \ge 0$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\nu=m}^{m+2s} \frac{\eta_{\nu,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_\nu \quad , \quad m \geq 0 \tag{4.23}$$

car $\mathcal{F}_m(B_\mu) = \lambda_\mu^m \quad , \quad 0 \leq \mu \leq m+2s$

et $\mathcal{F}_m(B_\mu) = 0 \quad 0 \leq \mu \leq m-1; \mathcal{F}_m(B_\mu) = \dfrac{\eta_{\mu,m+s}}{\eta_{m,m+s}}, m \leq \mu \leq m+2s.$

Supposons $0 \leq m \leq s-1$. De (4.23), on a :

$$\mathcal{F}_m = \sum_{\nu=m}^{s-1} \frac{\eta_{\nu,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_\nu + \sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_{\nu+s}$$

Or du point b), on a :

$$\mathcal{L}_{\nu+s} = \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_\nu^\tau \mathcal{L}_\tau + \widetilde{\mathcal{F}}_\nu$$

de sorte :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m &= \sum_{\nu=0}^{m+1} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \widetilde{\mathcal{F}}_\nu + \sum_{\nu=m}^{s-1} \frac{\eta_{\nu,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}_\nu \\ &= \sum_{\tau=0}^{s-1} \left(\sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \zeta_\nu^\tau \right) \mathcal{L}_\tau\end{aligned}$$

d'où (4.21), compte-tenu de (4.17) et de $\eta_{m+s,\tau} = 0, 0 \leq \tau \leq m-1$.

Supposons $m \geq s$ et posons $m = s+p, p \geq 0$. Alors de (4.23) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{s+p} &= \sum_{\mu=p}^{2s+p} \frac{\eta_{s+\mu,2s+p}}{\eta_{s+p,2s+p}} \mathcal{L}_{s+\mu} = \sum_{\mu=p}^{2s+p} \frac{\eta_{s+\mu,2s+p}}{\eta_{s+p,2s+p}} \left\{ \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_\mu^\tau \mathcal{L}_\tau + \widetilde{\mathcal{F}}_\mu \right\} \\ &= \sum_{\mu=p}^{2s+p} \frac{\eta_{s+\mu,2s+p}}{\eta_{s+p,2s+p}} \widetilde{\mathcal{F}}_\mu + \sum_{\tau=0}^{s-1} \left(\sum_{\tau=0}^{2s} \frac{\eta_{2s+p,s+p+\nu}}{\eta_{s+p,2s+p}} \zeta_{p+\nu}^\tau \right) \mathcal{L}_\tau\end{aligned}$$

d'où (4.22), compte-tenu de (4.16).

On a maintenant de (4.21) :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m &= \sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{m,m+s}} \sigma_\nu \mathcal{L}(\Phi_\nu\,.) = \frac{1}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}\left(\sum_{\nu=0}^{m+s} \frac{\eta_{\nu+s,m+s}}{\eta_{\nu,\nu+s}} \Phi_\nu\,. \right) \\ &= \frac{1}{\eta_{m,m+s}} \mathcal{L}(B_{s+m}\,.) \text{ , d'après (4.14), } 0 \leq m \leq s-1.\end{aligned}$$

On a (4.18) pour $m \geq s$ d'après (4.22) et (4.15).

4) D'après (1.3) et (1.4), on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi}_{n,m} &= \mathcal{F}_m(x\Phi_{n+1}(x)) \quad , \quad 0 \leq m \leq n \\ \widetilde{\beta}_m &= \mathcal{F}_m(x\Phi_m(x)) \qquad , \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

Or de (4.18), on a

$$u_m \mathcal{F}_m(x\Phi_{n+1}(x)) = \mathcal{L}(xB_{s+m}(x)\Phi_{n+1}(x)).$$

De

$$xB_{s+m}(x) = B_{s+m+1}(x) + \beta_{s+m}B_{s+m}(x) + \sum_{\nu=0}^{s+m-1} \chi_{s+m-1,\nu}B_\nu(x)$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(xB_{s+m}(x)\Phi_{n+1}(x)) &= \mathcal{L}(B_{s+m+1}\Phi_{n+1}) + \beta_{s+m}\mathcal{L}(B_{s+m}\Phi_{n+1}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{s+m-1} \chi_{s+m-1,\nu}\mathcal{L}(B_\nu\Phi_{n+1}). \end{aligned}$$

Pour $0 \leq m \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}\mathcal{L}(\Phi_{n+1}B_{s+m+1}) &= \mathcal{L}_{s+n+1}(B_{s+m+1}) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau}\mathcal{L}_\tau(B_{s+m+1}) \\ &= \delta_{n,m} \end{aligned}$$

$$\sigma_{n+1}\mathcal{L}(\Phi_{n+1}B_{s+m}) = \mathcal{L}_{s+n+1}(B_{s+m}) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau}\mathcal{L}_\tau(B_{s+m}) = 0$$

$$\sigma_{n+1}\mathcal{L}(\Phi_{n+1}B_\nu) = \mathcal{L}_{s+n+1}(B_\nu) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau}\mathcal{L}_\tau(B_\nu) = -\sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\tau}\delta_{\tau,\nu}$$

et donc

$$\sigma_{n+1}\mathcal{L}(xB_{s+m}\Phi_{n+1}(x)) = \delta_{n,m} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_{n+1}^{\nu}\chi_{s+1+m,\nu}$$

d'où (4.19).

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} u_m\mathcal{F}_m(x\Phi_m(x)) &= \mathcal{L}(xB_{s+m}(x)\Phi_{n+1}(x)) \\ \mathcal{L}(xB_{s+m}(x)\Phi_m(x)) &= \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m+1}) + \beta_{s+m}\mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{s+m-1} \chi_{s-1+m,\nu}\mathcal{L}(\Phi_m B_\nu). \end{aligned}$$

Or

$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m+1}) = 0$$
$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) = 1$$
$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_\nu) = \delta_{s+m,\nu} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \delta_{\tau,\nu}$$

d'où facilement (4.20).

Démontrons maintenant que b) $\Rightarrow$ a). On suppose que :

$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m\ .) = \mathcal{L}_{s+m} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau \quad , \quad m \geq 0 \tag{4.24}$$

On a

$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_{s+m}) = 1 \quad , \quad \text{donc} \quad \sigma_m u_m = 1$$
$$\sigma_m \mathcal{L}(\Phi_m B_\mu) = -\zeta_m^\mu \quad , \quad 0 \leq \mu \leq s-1$$

De

$$x\Phi_m(x) = \Phi_{m+1}(x) + \widetilde{\beta}_m \Phi_m(x) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \widetilde{\chi}_{m-1,\nu} \Phi_\nu(x) \quad , \quad m \geq 0$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x\Phi_m B_\tau(x)) = &-u_{m+1}\zeta_{m+1}^\tau - u_m \widetilde{\beta}_m \zeta_m^\tau \\ &- \textstyle\sum_{\nu=0}^{m-1} \widetilde{\chi}_{m-1,\nu} u_\nu \zeta_\nu^\tau \quad , \quad 0 \leq \tau \leq s-1. \end{aligned}$$

D'autre part, de l'hypothèse :

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x) B_\tau(x)) = \mathcal{L}_{s+m}(xB_\tau(x)) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \mathcal{L}_\nu(xB_\tau(x)).$$

Or de :

$$xB_\tau(x)) = B_{\tau+1}(x) + \beta_\tau B_\tau(x) + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu} B_\mu(x)$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{s+m}(xB_\tau(x)) &= \mathcal{L}_{s+m}(B_{\tau+1}) + \beta_\tau \mathcal{L}_{s+m}(B_\tau) + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu} \mathcal{L}_{s+m}(B_\mu) \\ &= \delta_{s+m,\tau+1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_\nu(xB_\tau(x)) = \mathcal{L}_\nu(B_{\tau+1}) + \beta_\tau \mathcal{L}_\nu(B_\tau) + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu}\mathcal{L}_\nu(B_\mu)$$

$$= \delta_{\nu,\tau+1} + \beta_\tau \delta_{\nu,\tau} + \sum_{\mu=0}^{\tau-1} \chi_{\tau-1,\mu}\delta_{\nu,\mu}$$

donc

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x)B_\tau(x)) = \delta_{s+m,\tau+1} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \delta_{\nu,\tau+1} - \beta_\tau \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_m^\nu \chi_{\tau-1,\nu}$$

Il en résulte l'égalité :

$$\delta_{s+m,\tau+1} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \delta_{\nu,\tau+1} - \beta_\tau \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_m^\nu \chi_{\tau-1,\nu} =$$

$$-\frac{u_{m+1}}{u_m}\zeta_{m+1}^\tau - \widetilde{\beta}_m \zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{m-1} \sigma_m u_\nu \zeta_\nu^\tau \widetilde{\chi}_{m-1,\nu} \quad , \quad 0 \le \tau \le s-1$$

c'est-à-dire, compte-tenu de (4.19) et (4.20) :

$$\frac{u_{m+1}}{u_m}\zeta_{m+1}^\tau = (\beta_\tau - \beta_{s+m})\zeta_m^\tau - \sum_{\nu=0}^{m-1} \zeta_\nu^\tau \delta_{m-1,\nu} - \delta_{s+m,\tau+1}$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{m} \zeta_\nu^\tau \sum_{\mu=0}^{s-1} \zeta_m^\mu \chi_{s-1+\nu,\mu} + \sum_{\nu=0}^{s-1} \zeta_m^\nu \delta_{\nu,\tau+1}$$

$$+ \textstyle\sum_{\nu=0}^{\tau-1} \zeta_m^\nu \chi_{\tau-1,\nu} \quad , \quad 0 \le \tau \le s-1 \quad , \quad m \ge 0.$$

C'est la condition (4.5) où $m \to m+1$, sous réserve de montrer que

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \chi_{m+s,m+s} - \sum_{\nu=0}^{s-1} \chi_{m+s,\nu}\zeta_m^\nu \quad , \quad m \ge 0$$

Or de (4.24), on a :

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x)B_{m+s+1}(x)) = \mathcal{L}_{s+m}(xB_{m+s+1}(x)) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau(xB_{m+s+1}(x))$$

soit

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \chi_{m+s,m+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{m+s,\tau} \neq 0 \quad , \quad m \ge 0$$

C'est (4.4). On a (4.6) par

$$\sigma_m \mathcal{L}(x\Phi_m(x)B_{n+s+1}(x)) = \mathcal{L}_{s+m}(xB_{n+s+1}(x)) - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \mathcal{L}_\tau(xB_{n+s+1}(x))$$

$$0 = \chi_{n+s,m+s} - \sum_{\tau=0}^{s-1} \zeta_m^\tau \chi_{n+s,\tau} \quad , \quad n \geq m+1 \quad , \quad m \geq 0.$$

Le théorème 4.2 est complètement démontré.

Remarques.—

1. On aurait pu montrer directement que d) entraîne a), mais par un calcul long et peu éclairant.

2. Lorsque $s = 1$, on retrouve bien le résultat de Dickinson [8], obtenu en supposant la forme $\mathcal{L}$ définie positive. En fait, les hypothèses faites dans le théorème 4.2 n'impliquent pas que la forme $\mathcal{L}$ soit régulière. En effet, soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite orthogonale par rapport à u_0 régulière et soit $\{u_m\}_{m\geq 0}$ sa suite duale. Prenons $\mathcal{L} = u_s$, $s \geq 1$. Alors :

$$\mathcal{L}(B_mB_n) = (u_0(B_s^2))^{-1}u_0(B_sB_mB_n) = 0 \quad , \quad n \geq m+s+1 \quad , \quad m \geq 0$$
$$\mathcal{L}(B_mB_{m+s}) = (u_0(B_s^2))^{-1}u_0(B_sB_mB_{m+s}) \neq 0 \quad , \quad m \geq 0$$

La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à une forme non régulière.

Le rôle tenu par la suite orthogonale qu'on peut associer à une suite strictement quasi-orthogonale par rapport à une forme régulière, est tenu, en réalité, par la suite $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ qui existe toujours. Lorsque la suite orthogonale existe, il faudra établir ses rapports avec la suite $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$. Ces questions seront abordées dans un prochain article.

3. Il est remarquable que les coefficients $\widetilde{\chi}_{n,m}$ de la suite $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ soient également de rang fini et cela de façon plus simple que les coefficients $\chi_{n,m}$ de la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$.

Indiquons pour terminer, un résultat sur la régularité de la forme $\mathcal{L}$.

PROPOSITION 4.2.— *Soit $\mathcal{L}$ une forme linéaire vérifiant l'un des énoncés du théorème 4.2. Pour que $\mathcal{L}$ soit régulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées :*

(4.25) $$\begin{vmatrix} \zeta_0^0 & \cdots & \zeta_n^0 \\ & & \\ \zeta_0^n & \cdots & \zeta_n^n \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1$$

$$(4.26) \qquad \begin{vmatrix} \zeta^0_{n+1} & \cdots & \zeta^0_{n+s} \\ \\ \zeta^{s-1}_{n+1} & \cdots & \zeta^{s-1}_{n+s} \end{vmatrix} \neq 0 \quad , \quad n \geq 0$$

Notons $\{\Delta_n\}_{n\geq 0}$ la suite des déterminants de Hankel de la forme $\mathcal{L}$.

On a : [6]

$$\Delta_n = \det\,(\mathcal{L}(B_\nu B_\mu)) = \det\,(\mathcal{L}(\Phi_\nu B_\mu))^n_{\nu,\mu=0} \quad , \quad n \geq 0 \quad ,$$

d'où compte-tenu des propriétés de la suite $\{\Phi_m\}_{m\geq 0}$:

$$\Delta_n = (-1)^{n+1}(\Pi^n_{\nu=0} u_\nu) \begin{vmatrix} \zeta^0_0 & \cdots & \zeta^n_0 \\ \\ \zeta^n_0 & \cdots & \zeta^n_n \end{vmatrix} \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1$$

$$\Delta_{n+s} = (-1)^{ns}(\Pi^{n+s}_{\nu=0} u_\nu) \begin{vmatrix} \zeta^0_{n+1} & \cdots & \zeta^{s-1}_{n+1} \\ \\ \zeta^0_{n+s} & \cdots & \zeta^{s-1}_{n+s} \end{vmatrix} \quad , \quad n \geq 0$$

avec $u_\nu = \eta_{\nu,\nu+s}$.

D'où les conditions (4.25) et (4.26) après transposition.

Remarques.—

1. Lorsque $s = 1$, les conditions (4.25) et (4.26) se réduisent à $\zeta^0_n \neq 0, n \geq 0$.

2. La suite $\{\Delta_n\}_{n\geq 0}$ vérifie également une relation de récurrence linéaire d'ordre $2s$, qu'il est malaisé d'écrire dans le cas général.

Pour $s = 1$, on a :

$$\Delta_{n+2} - \eta_{n+2,n+2}\Delta_{n+1} + \eta^2_{n+2,n+1}\Delta_n = 0 \quad , \quad n \geq 0$$

Pour $s = 2$, on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+4} - \eta_{n+4,n+4}\Delta_{n+3} + \eta^2_{n+4,n+3}\Delta_{n+2} + \eta^2_{n+4,n+2}\eta_{n+3,n+3}\Delta_{n+1} \\ -\eta^2_{n+1,n+3}\eta^2_{n+4,n+2}\Delta_n = 0 \ , \ n \geq 0 \end{aligned}$$

3. On montrera dans un article ultérieur que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie une récurrence d'ordre supérieur à deux, mais d'un type différent de celles introduites dans le paragraphe 2.

Bibliographie

[1] ROMAN (S.M.), ROTA (G.C.).— The umbral calculus., *Adv. in Math.*, t. **27** , 1978, p. 95-188.

[2] MARONI (P.).— L'orthogonalité non régulière et les suites de polynômes orthogonaux semi-classiques, *Publ. Labo. Anal. Num. Univ. P. et M. CURIE,* **C.N.R.S. n° 86005**, 1986, Paris.

[3] MARONI (P.).— Sur la suite associée à une suite de polynômes *Publ. Labo. Anal. Num. Univ. P. et M. CURIE,* **C.N.R.S n° 86012**, 1986, Paris.

[4] MARONI (P.).— *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, Lect. Notes in Math, **1329**, Springer-Verlag, 1988, p. 279–290.

[5] VAN, ISEGHEM (J.).— *Approximants de Padé vectoriels.*— Thèse. Univ. des Sci. et Tech. de Lille – Flandre – Artois, 1987.

[6] MARONI (P.).— Une généralisation du théorème de Favard – Shohat sur les polynômes orthogonaux, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **293, I,** 1981, p. 19-22.

[7] MARONI (P.).— Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **301, I,** 1985, p. 269-272.

[8] DICKINSON (D.).— On quasi-orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **12**, 1961, p. 185-194.

[9] CHIHARA (T.S.).— On quasi-orthogonal polynomials, *Proc. Math. Soc.*, t. **8**, 1957, p. 765-767.

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1988)