

DIDIER ARNAL

MABROUK BENAMMAR

MOHAMED SELMI

**Normalisation d'une représentation non  
linéaire d'une algèbre de Lie**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 9, n° 3  
(1988), p. 355-379

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1988\\_5\\_9\\_3\\_355\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_3_355_0)

© Université Paul Sabatier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Normalisation d'une représentation non linéaire d'une algèbre de Lie

DIDIER ARNAL<sup>(1)</sup>, MABROUK BENAMMAR<sup>(2)</sup>, et MOHAMED SELMI<sup>(2)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On introduit une notion de forme normale pour une représentation non linéaire formelle  $T$ , dans  $\mathbb{C}^n$ , d'une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Cette notion est optimale dans le sens qu'elle est canonique si la partie linéaire de  $T$  est complètement réductible, qu'elle généralise les notions introduites précédemment et qu'un théorème de normalisation général est vrai pour elle. On prouve enfin un résultat du même type dans le cas analytique.

**ABSTRACT.** — We define the notion of normal form of a non linear formal representation  $T$  of a complex Lie algebra in  $\mathbb{C}^n$ . This notion is canonical if the linear part of  $T$  is completely reducible, it generalizes each preceding definitions of normal form and a general normalization theorem holds for it. Finally, we prove a similar result in the analytic case.

---

### Introduction

La linéarisation ou la normalisation d'un champ de vecteurs au voisinage d'une singularité est un vieux problème remontant à Poincaré et à Dulac (voir par exemple BRJUNO [3], CHAPERON [4]). Plaçons-nous dans le cadre formel. Un champ formel  $T$  sur  $E = \mathbb{C}^n$ , singulier en 0 est une série formelle :

$$T = \sum_{k=1}^{+\infty} T^k$$

où  $T^k$  est une application  $k$ -linéaire symétrique de  $E \times \dots \times E$  dans  $E$ . Notons  $\chi_o(E)$  l'espace de ces champs. Normaliser le champ  $T$  formellement,

---

<sup>(1)</sup> Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex

<sup>(2)</sup> E.N.I.S., B.P. W. 3038 Sfax - Tunisie

c'est le mettre, par un changement de coordonnées préservant 0 sous la forme :

$$T = S + N$$

où  $S$  est linéaire ( $S^k = 0 \forall k \geq 2$ ) et diagonalisable et  $N$  est "nilpotent", c'est-à-dire  $N^1$  est nilpotent, et satisfait :

$$[S, N] = 0.$$

En particulier  $T$  est linéarisable si  $N^k = 0$  dès que  $k \geq 2$ .

L'intérêt de la mise sous forme normale (non formelle) d'un champ de vecteurs est évident dans tous les problèmes de résolution d'équations différentielles. En particulier, si  $T$  est linéarisable, ses trajectoires peuvent être décrites avec précision.

Restons cependant dans le cadre formel et envisageons le problème de normalisation simultanée de plusieurs champs de vecteurs, tous singuliers en 0. Ce problème a été étudié par d'assez nombreux auteurs et dans cette généralité n'admet pas de solution simple et générale, (cependant DUMORTIER, ROUSSARIE ont étudié dans [6] un problème de ce type). La situation est beaucoup plus claire si on suppose que l'ensemble des champs de vecteurs forme une algèbre de Lie  $g$  de dimension finie. On pourra alors considérer ces champs comme une représentation non linéaire formelle  $T$  au sens de FLATO, PINCZON et SIMON de  $g$  :

$$T : g \rightarrow \chi_0(E) \quad T : X \rightarrow T_X \text{ tel que } [T_X, T_Y] = T_{[X, Y]},$$

car alors on peut utiliser la structure de l'algèbre de Lie en question pour préciser les formes normales possibles.

On sait par exemple depuis CHEN [5], HERMANN [9], GUILLEMIN et STERNBERG [8] que si l'algèbre  $g$  est semi simple, les champs sont tous simultanément linéarisables (et alors  $T_X = T_X^1$  est diagonalisable quel que soit  $X$  de  $g$ ).

Si  $g$  est nilpotente, il a été montré dans [1] et [2] que les champs qui la composent sont tous simultanément normalisables. Plus précisément, que l'on peut mettre les  $T_X$ , pour  $X$  dans  $g$  sous la forme :

$$T_X = S_X + N_X \quad \forall X \in g$$

où  $S_X$  est linéaire et diagonalisable,  $N_X$  est nilpotent avec les relations :

$$\forall X, \forall Y \quad [S_X, S_Y] = S_{[X, Y]} = 0, \quad [S_X, N_Y] = 0, \quad [N_X, N_Y] = N_{[X, Y]}.$$

Ceci permet d'ailleurs la classification de ces représentations non linéaires formelles dès que la partie linéaire est fixée ([1]).

Cependant, si  $g$  est une algèbre quelconque, on ne peut pas espérer normaliser  $T(g)$  de façon aussi stricte comme des contre exemples très simples (même linéaires) le montrent.

Dans [12], LIVINGSTON et ELLIOTT envisagent ce problème d'un point de vue restrictif : ils établissent un résultat de linéarisation de  $T$  lorsqu'il y a dans  $g$  un vecteur  $X$  tel que les valeurs propres de  $ad X$  dans  $g$  vérifient avec les valeurs propres de  $T_X^1$  des relations de non résonance.

Il est donc naturel de poser le problème général et de définir une forme normale pour une représentation non linéaire  $T$  qui dépend des racines de  $g$  ou d'une de ses sous algèbres.

Plus précisément, nous proposons dans cet article la définition suivante de forme normale d'une représentation non linéaire formelle ou analytique  $T$  de  $g$ .

- a. On se donne une décomposition de LEVI -MALCEV de  $g$  :

$$(\mathcal{D}) \quad g = s + r$$

( $s$  est semi simple,  $r$  est le radical résoluble de  $g$ ).

- b. On dira que  $T$  est normale par rapport à  $\mathcal{D}$  si  $T|_s$  est linéaire et si  $T|_r$  a la forme suivante :

$$T|_r = (D^1 + N^1) + \sum_{k \geq 2} T^k|_r$$

où la partie linéaire  $D^1 + N^1$  de  $T|_r$  est telle que  $D^1$  est diagonale avec des coefficients  $\mu_1, \dots, \mu_n$  (les  $\mu_i$  appartiennent à  $r^*$ ) et  $N^1$  est triangulaire strictement supérieure, de plus  $T^k (k \geq 2)$  a la forme suivante dans les coordonnées  $x_i$  de  $E$  :

$$T_X^k = \sum_{s=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \Lambda_s^\alpha(X) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (X \in r)$$

où les seuls termes non nuls (résonnants) sont ceux qui vérifient :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i - \mu_s \text{ est une racine de } r.$$

(c'est-à-dire une valeur propre de la représentation adjointe de  $r$ ).

Cette définition est intrinsèque si  $g$  est résoluble et dans le cas général dépend de  $\mathcal{D}$  c'est-à-dire du choix du facteur de LEVI  $s$ . Elle généralise les cas semi simple et nilpotent déjà connus ainsi bien sûr que le cas trivial où il existe une contraction dans le centre  $T(g)$  et l'étude de LIVINGSTON et ELLIOTT.

Le problème algébrique de classification à équivalence près des représentations non linéaires de partie linéaire  $T^1$  donnée passe par celui de la détermination d'une famille de groupes de cohomologie

$$H^1(g, L(\otimes_s^k E, E)), \text{ pour } k = 2, 3, \dots$$

En fait, nous montrons dans cet article que notre notion de normalisation est optimale lorsque  $T^1$  est complètement réductible : les  $T^k$  restant sont placés dans un supplémentaire de

$$B^1(g, L(\otimes_s^k E, E)) \text{ dans } Z^1(g, L(\otimes_s^k E, E)).$$

On montre alors que toute représentation non linéaire formelle est formellement normalisable et que dans le cas d'une représentation  $T$  analytique, sous l'hypothèse de Poincaré où 0 n'est pas dans l'enveloppe convexe des  $\mu_i$ ,  $T$  est analytiquement normalisable.

### 1. Normalisation de $T$ relativement à un élément $X$ de $g$

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbf{C}$ , on identifie l'espace des applications  $k$ -linéaires symétriques à l'espace  $L(\otimes_s^k E, E)$  où  $\otimes_s^k E$  est l'espace des  $k$ -tenseurs symétriques sur  $E$ . On notera  $L(E)$  l'espace  $L(E, E)$ .

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on définit une base  $(e_\alpha^s)$  de  $L(\otimes_s^k E, E)$  par :

$$\alpha \in \mathbf{N}^n \mid |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k, s \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ et}$$

$$e_\alpha^s \circ \sigma_k(\otimes^{\beta_1} e_1 \otimes \dots \otimes^{\beta_n} e_n) = \delta_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\alpha_n}^{\beta_n} e_s,$$

où  $\sigma_k$  désigne l'opérateur de symétrisation, projection de  $\otimes^k E$  sur  $\otimes_s^k E$  et  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

$\chi_o(E)$  est l'ensemble des séries formelles :

$$T = \sum_{k \geq 1} T^k \text{ où } T^k \in L(\otimes_s^k E, E) \left( T^k = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{s \geq 1} \Lambda_s^\alpha e_\alpha^s \right)$$

Normalisation d'une représentation non linéaire

on l'appellera l'ensemble des champs de vecteurs formels (singuliers en 0). Evidemment, un champ de vecteurs  $X$  analytique sur  $E$  et singulier en 0 admet un développement de Taylor :

$$X = \sum_{s \geq 1} \sum_{k \geq 1} \sum_{|\alpha|=k} \Lambda_s^\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_s} = \sum_{\alpha, s} \Lambda_s^\alpha x^\alpha \partial_s.$$

On l'identifiera au champ formel

$$\sum_{k \geq 1} \sum_{s \geq 1} \sum_{|\alpha|=k} \Lambda_s^\alpha e_\alpha^s.$$

Si  $T^k = 0$  pour chaque  $k$  supérieur à 1, on dit que  $T$  est linéaire.

On définit le crochet de deux champs formels  $T$  et  $S$ , singuliers en 0 par :

$$[T, S] = \sum_{k \geq 1} [T, S]^k$$

où

$$[T, S]^{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} [T^j, S^{k-j}]$$

et

$$\begin{aligned} [T^j, S^{k-j}] &= \sum_{r=0}^{j-1} T_o^i (Id_r \otimes S^{k-j} \otimes Id_{j-r-1}) \cdot \sigma_{k-1} \\ &\quad - \sum_{r=0}^{k-j-1} S_o^{k-j} (Id_r \otimes T^j \otimes Id_{k-j-r-1}) \cdot \sigma_{k-1} \end{aligned}$$

Dans ces expressions  $Id_j$  désigne l'application identité de  $\otimes_j^j E$  sur lui-même. On notera parfois ce crochet :

$$[T, S] = T * S - S * T$$

et on remarquera que  $[T, S]^1 = [T^1, S^1]$ .

Bien sûr si  $X$  et  $Y$  sont des champs analytiques singuliers en 0, le champ formel associé à  $[X, Y]$  est le crochet des champs formels associés à  $X$  et à  $Y$ .

Si  $T$  est un champ formel, on note  $ad T$  l'endomorphisme de  $\chi_o(E)$  défini par :

$$ad T(S) = [T, S].$$

Le résultat suivant est bien connu :

LEMME 1.1. — Soit  $T$  un champ formel linéaire et

$$T = T^1 = S^1 + N^1$$

l'unique décomposition de l'endomorphisme  $T^1$  en un endomorphisme diagonalisable  $S^1$  et un endomorphisme nilpotent  $N^1$ , commutant entre eux.

Alors, dans  $\chi_o(E)$  :

$$ad T = ad S^1 + ad N^1$$

est l'unique décomposition de  $ad T$  en un endomorphisme diagonalisable  $ad S^1$  et un endomorphisme localement nilpotent  $ad N^1$ , commutant entre eux.

De plus, si  $\mu_1, \dots, \mu_n$  sont les valeurs propres de  $S^1$  dans  $E$  (les  $\mu_i$  ne sont pas nécessairement distincts), les valeurs propres de  $ad S^1$  dans  $L(\otimes_s^k E, E)$  sont :

$$\mu_\alpha^s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i - \mu_s \quad (|\alpha| = k, s \in \{1, \dots, n\}).$$

Par endomorphisme localement nilpotent de  $\chi_o(E)$ , nous entendons une application linéaire  $f$  de  $\chi_o(E)$  dans lui-même telle que :

$$\forall k, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall T^k \in L(\otimes_s^k E, E), f^N(T^k) = 0.$$

La normalisation d'un champ formel  $T$  est l'opération suivante :

DÉFINITION 1.2. — (cf. [3] par exemple) : Soit  $T = \sum_{k \geq 1} T^k$  un champ de  $\chi_o(E)$  et soit  $T^1 = S^1 + N^1$  la décomposition de  $T^1$  du lemme 1.1. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  sur laquelle  $S^1$  est diagonale, on écrit :

$$T^k = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{s=1}^n \Lambda_s^\alpha e_s^\alpha$$

$T$  est dit normal si :

$$\forall k \geq 2, \forall \alpha, \forall s \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i - \mu_s \neq 0 \text{ implique } \Lambda_s^\alpha = 0.$$

Normalisation d'une représentation non linéaire

Ceci revient à écrire  $T$  sous la forme :

$$T = S^1 + N$$

où  $S^1$  est linéaire et diagonalisable et  $N = \sum_{k \geq 1} N^k$  est tel que  $N^1$  est nilpotent et  $[S^1, N] = 0$ .

DÉFINITION 1.3. — Deux champs de vecteurs  $T$  et  $T'$  sont dits équivalents s'il existe un élément  $\psi = \left( \sum_{k \geq 1} \psi^k \right)$  de  $\chi_o(E)$  tel que  $\psi^1$  est inversible et :

$$\psi * T = T' \circ \psi$$

où :

$$T' \circ \psi = \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^k T'^j \circ \left( \sum_{i_1 + \dots + i_j = k} \psi^{i_1} \otimes \dots \otimes \psi^{i_j} \right) \circ \sigma_k.$$

Si  $T$  est équivalent à un champ normal,  $T$  est dit formellement normalisable.

Bien sûr, si  $\Psi$  est un difféomorphisme analytique de  $E$  préservant 0, on peut l'écrire :

$$\Psi(x) = \sum_s \sum_{k \geq 1} \psi_s^k(x) e_s = \sum_{k \geq 1} \psi^k$$

où  $\psi_s^k$  est un polynôme homogène de degré  $k$  et  $\psi^1$  est inversible et donc associer à  $\Psi$  l'élément  $\psi$  de  $\chi_o(E)$  :

$$\psi = \sum_{k \geq 1} \psi^k.$$

Ceci fait, si  $X$  est un champ analytique singulier en 0, le champ  $d\Psi(X)$  sera aussi analytique et singulier en 0 et il lui correspondra le champ formel  $\psi * X$ .

Enfin si  $X'$  est un autre champ analytique singulier en 0, le champ  $X' \circ \Psi$  sera analytique et singulier en 0 et il lui correspondra le champ formel  $X' \circ \psi$ . Notre notion d'équivalence formelle est donc la traduction de la notion de champs  $\Psi$  reliés ou  $\Psi$  est un difféomorphisme préservant 0.

Depuis DULAC, on sait d'ailleurs que :

LEMME 1.4. — cf. par exemple [5] ou [1]). *Tout champ de vecteur formel  $T$  est formellement normalisable.*



*Preuve.* — Conservons les notations de 1.2, on a :

$$L(\otimes_s^k E, E) = V_0^k \oplus V_1^k$$

où  $V_0^k$  est le noyau de  $ad S^1$  et  $V_1^k$  son image dans  $L(\otimes_s^k E, E)$ . Supposons  $T$  normalisé à l'ordre  $k - 1$  c'est-à-dire :

$$T = S^1 + N^1 + \sum_{2 \leq j < k} N^j + T^k + \sum_{j > k} T^j$$

et essayons de faire disparaître la composante  $T_1^k$  de  $T^k$  dans  $V_1^k$ . On cherche pour cela  $\theta^k$  dans  $L(\otimes_s^k E, E)$  tel que :

$$(Id + \theta^k) * T = \left( S^1 + N^1 + \sum_{2 \leq j < k} N^j + N^k + \sum_{j > k} T^j \right) \circ (Id + \theta^k)$$

où  $N^k$  est dans  $V_0^k$ . Cette équation a toujours au moins une solution :

$$\theta^k = (ad T^1)^{-1}(T_1^k)$$

et on prend  $\psi$  tel que :

$$\psi = \dots (Id + \theta^k) \circ (Id + \theta^{k-1}) \circ \dots \circ (Id + \theta^2). \quad cqfd$$

Introduisons maintenant une algèbre de Lie de dimension finie de champs formels :

**DÉFINITION 1.5.** — *Soit  $g$  une algèbre de Lie de dimension finie sur  $\mathbf{C}$ , une représentation non linéaire (formelle)  $T$  de  $g$  sur  $E$  est une application linéaire :*

$$T : g \rightarrow \chi_o(E) \quad X \rightarrow T_X$$

telle que :

$$T_{[X, Y]} = [T_X, T_Y] \quad \forall X, Y \in g.$$

Deux représentations  $T$  et  $T'$  de  $g$  sont dites équivalentes s'il existe  $\psi$  dans  $\chi_o(E)$  tel que  $\psi^1$  soit inversible vérifiant :

$$\psi_* T_X = T'_X \circ \psi \quad \forall X \in g.$$

La première notion de forme normale pour  $T$  est celle de forme normale relativement à un des éléments  $X$  de  $g$  :

Normalisation d'une représentation non linéaire

DÉFINITION 1.6. — Soit  $X$  un élément de  $\mathfrak{g}$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  dans laquelle  $T_X^1$  est sous forme de Jordan et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les valeurs propres de  $T_X^1$ . On dit que  $T$  est normale relativement à  $X$  si, pour chaque  $Y$  de  $\mathfrak{g}$ ,

$$T_Y = \sum_{k \geq 1} \sum_{s, |\alpha|=k} \Lambda_s^\alpha(Y) e_\alpha^s,$$

où les seuls  $\Lambda_s^\alpha$  qui peuvent être non nuls sont ceux tels que  $\sum_i \alpha_i \mu_i - \mu_s$  est une valeur propre de  $\text{ad } X$  dans  $\mathfrak{g}$ .

Le résultat essentiel de ce paragraphe est alors :

THÉORÈME 1.7. — Si  $T_X$  est normal, alors  $T$  est normale relativement à  $X$ .

Preuve. — Si  $T_X$  est nul, il n'y a rien à prouver. Supposons  $T_X$  non nul et  $T_X$  normal c'est-à-dire :

$$T_X = S_X^1 + N_X \text{ avec } [S_X^1, N_X] = 0$$

$S_X^1$  est la matrice diagonale  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et  $N_X^1$  est triangulaire supérieure.

Notons  $(X_1, \dots, X_d)$  une base de  $\mathfrak{g}$  dans laquelle  $\text{ad } X$  est sous forme de Jordan c'est-à-dire :

$$[X, X_j] = v_j X_j + \delta_j X_{j-1} \text{ où } \delta_j \text{ est } 0 \text{ ou } 1.$$

On va montrer par récurrence sur  $j$  que  $T_{X_j}$  a la forme de la définition 1.6, on peut ajouter  $T_{X_0} = 0$  pour commencer la récurrence.

Supposons donc que  $T_{X_0}, \dots, T_{X_{j-1}}$  sont "normaux relativement à  $X$ " au sens de la définition 1.6. La relation :

$$[T_X^1, T_{X_j}^1] = v_j T_{X_j}^1 + \delta_j T_{X_{j-1}}^1$$

s'écrit, avec toutes nos hypothèses :

$$v_j \Lambda_r^p(X_j) = (\mu_p - \mu_r) \Lambda_r^p(X_j) + \delta'_p \Lambda_r^{p-1}(X_j) - \delta'_{r+1} \Lambda_{r+1}^p(X_j) - \delta_j \Lambda_r^p(X_{j-1})$$

où l'on a écrit :

$$T_Y^1 = \sum_{p,r} \Lambda_r^p(Y) e_{(p)}^r \text{ et } \delta'_p = 1 \text{ ou } 0 \text{ et nul si } \mu_{p-1} \neq \mu_p$$

où  $(p) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ . (1 a la  $p$ -ème place).

Si  $p$  et  $r$  sont tels que  $\mu_p - \mu_r$  n'est pas un des  $v_j$ , on en déduit par récurrence sur les couples  $(p, n - r)$  que  $\Lambda_p^s(X_j)$  est nul c'est-à-dire que  $T_{X_j}$  est "normal relativement à  $X$  à l'ordre 1".

Supposons maintenant que  $T_{X_j}$  est normal relativement à  $X$  à l'ordre  $k-1$  c'est-à-dire que la relation de la définition 1.6 est vraie pour les  $|\alpha| < k$ . Introduisons un ordre total sur les couples  $(\alpha, s)$  où  $|\alpha| = k : (\alpha, s) < (\alpha', s')$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 < \alpha'_1 \text{ ou} \\ &\alpha_1 = \alpha'_1 \text{ et } \alpha_2 < \alpha'_2 \text{ ou} \\ &\dots \text{ ou } \dots \\ &\alpha_1 = \alpha'_1 \text{ et } \dots \text{ et } \alpha_n = \alpha'_n \text{ et } s' \leq s. \end{aligned}$$

(notre ordre est l'ordre lexicographique sur les  $n + 1$  uplets  $(\alpha, n - s)$ ).

Notons :

$$T_Y^m = \sum_{s, |\alpha|=m} \Lambda_s^\alpha(Y) e_\alpha^s \quad \forall Y \in g.$$

On vérifie d'abord que les composantes  $\Gamma_\alpha^s(X, X_j)$  non nulles de  $[T_X - T_X^1, T_{X_j}]^k$  sur les  $e_\alpha^s$  sont uniquement celles pour lesquelles  $\sum_i \alpha_i \mu_i - \mu_s$  est une des valeurs propres  $v_m$ .

En effet ces composantes proviennent des  $e_\beta^m * e_\gamma^s$  qui apparaissent dans  $T_{X_j}^r * T_X^{k-r-1}$  ou dans  $T_X^{r+1} * T_{X_j}^{k-r}$  avec :

$$\alpha = \beta + \gamma - (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \text{ (le 1 a la } m^{\text{ième}} \text{ place)}$$

Ce qui nécessite :

$$1 \leq r < k \text{ et } (\Lambda_\beta^m(X) \cdot \gamma_\gamma^s(X_j) \neq 0 \text{ ou } \Lambda_\beta^m(X_j) \cdot \Lambda_\gamma^s(X) \neq 0),$$

c'est-à-dire qu'il existe  $p$  tel que :

$$\sum_i \gamma_i \mu_i - \mu_s = v_p \text{ et } \sum_i \beta_i \mu_i - \mu_m = 0$$

ou bien :

$$\sum_i \beta_i \mu_i - \mu_m = v_p \text{ et } \sum_i \gamma_i \mu_i - \mu_s = 0.$$

Normalisation d'une représentation non linéaire

Dans les deux cas,

$$\sum_i \alpha_i \mu_i - \mu_s = v_p.$$

On écrit alors la relation :

$$[T_X^1, T_{X_j}^k] + [T_X - T_X^1, T_{X_j}]^k = [T_X, T_{X_j}]^k = v_j T_{X_j}^k + \delta_j T_{X_{j-1}}^k.$$

Donc si  $\delta'_p$  sont les coefficients non diagonaux de la matrice (de Jordan)  $T_X^1$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^s(X, X_j) + \left( \sum_i \alpha_i \mu_i - \mu_s \right) \Lambda_s^\alpha(X_j) + \sum_h \delta'_h \Lambda_s^{\alpha(h)}(X_j) - \delta'_{s+1} \Lambda_{s+1}^\alpha(X_j) = \\ = v_j \Lambda_s^\alpha(X_j) + \delta_j \Lambda_s^\alpha(X_{j-1}) \end{aligned}$$

où :

$$\alpha(h) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1} + 1, \alpha_h - 1, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_n).$$

Soit :

$$\begin{aligned} \left( \sum_i \alpha_i \mu_i - \mu_s - v_j \right) \Lambda_s^\alpha(X_j) = \\ \delta_j \Lambda_s^\alpha(X_{j-1}) - \sum_h \delta'_h \Lambda_s^{\alpha(h)}(X_j) + \delta'_{s+1} \Lambda_{s+1}^\alpha(X_j) - \Gamma_\alpha^s(X, X_j) \end{aligned}$$

et comme  $(\alpha(h), s)$  et  $(\alpha, s+1)$  sont strictement inférieurs à  $(\alpha, s)$  on prouve par induction sur l'ensemble ordonné des  $(\alpha, s)$  que  $T_{X_j}$  est normal jusqu'à l'ordre  $k$ . cqfd

*Remarque 1.8.* — Introduisons les sous-espaces caractéristiques  $E_1, \dots, E_m$  de  $T_X^1$ , associés aux valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  de  $T_X^1$ . Il est facile de voir que  $T_X$  est normal si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall k, \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| = k, \\ (T_X^k \circ \sigma_k)(\otimes^{\alpha_1} E_1 \otimes \dots \otimes \otimes^{\alpha_m} E_m) \subset \sum_{s/\lambda_s = \sum_i \alpha_i \lambda_i} E_s \end{aligned}$$

et la représentation  $T$  de  $g$  est normale relativement à  $X$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall Y \in g, \forall k, \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| = k, \\ (T_Y^k \circ \alpha_k)(\otimes^{\alpha_1} E_1 \otimes \dots \otimes \otimes^{\alpha_m} E_m) \subset \sum_j \sum_{s/\lambda_s = \sum_i \alpha_i \lambda_i - v_j} E_s. \end{aligned}$$

## 2. Normalisation d'une représentation non linéaire d'une algèbre de Lie résoluble

Dans ce paragraphe, on suppose que  $g$  est résoluble.

Le théorème de Lie ([11]) permet de triangulariser chaque représentation linéaire  $\pi$  de  $g$ , c'est-à-dire de mettre toutes les matrices  $\pi(X)$  simultanément sous la forme :

$$\pi(X) = \begin{bmatrix} \rho_1(X) & & & & \\ & \cdot & & * & \\ & & \cdot & & \\ & & & 0 & \cdot \\ & & & & \rho_p(X) \end{bmatrix}$$

où les  $\rho_i$  sont des caractères de  $g$ , c'est-à-dire des éléments du dual  $g^*$  de  $g$  s'annulant sur  $[g, g]$ , ce sont les sous quotients irréductibles de  $\pi$ .

Si  $\pi = ad$  est la représentation adjointe, on notera ces formes  $\nu_1, \dots, \nu_d$ , ce sont par définition les racines de  $g$ .

Si  $T$  est une représentation non linéaire formelle de  $g$ , on notera  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les formes ainsi construites en prenant  $\pi = T^1$ .

**DÉFINITION 2.1.** — *Soit  $g$  une algèbre de Lie résoluble et  $T$  une représentation non linéaire de  $g$ , soit  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les sous quotients irréductibles de  $T^1$ , on note  $\mu_s^\alpha$  l'élément de  $g^*$  tel que :*

$$\mu_s^\alpha(X) = \sum_i \alpha_i \mu_i(X) - \mu_s(X) \text{ où } s \in \{1, \dots, n\} \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Un couple  $(\alpha, s)$  sera dit résonnant si  $\mu_s^\alpha$  est une racine de  $g$ .

Soit  $R$  l'ensemble des couples résonnants de  $T$ ,  $T$  sera dite normale si :

$$\forall X \in g \quad T_X = \sum_{(\alpha, s) \in R} \Lambda_s^\alpha(X) e_\alpha^s.$$

Enfin  $T$  est normalisable si elle est équivalente à une représentation normale.

Dans ce paragraphe, nous montrons que toute représentation de  $g$  est normalisable par un argument semblable à celui de [1]. On introduit les vecteurs de résonance.

DÉFINITION 2.2. — *Un vecteur  $X_o$  de l'algèbre de Lie résoluble  $g$  est dit vecteur de résonance pour la représentation non linéaire  $T$  si, avec nos notations :*

$$\mu_s^\alpha(X_o) = v_j(X_o) \text{ implique } \mu_s^\alpha = v_j.$$

LEMME 2.3. — *L'ensemble des vecteurs de résonance est dense dans  $g$ .*

*Preuve.* — Si  $\mu_s^\alpha$  est distinct de  $v_j$ , l'ensemble :

$$D_{s,j}^\alpha = \{X \in g \text{ tel que } \mu_s^\alpha(X) \neq v_j(X)\}$$

est un ouvert dense de  $g$ . L'intersection  $D$  des  $D_{s,j}^\alpha$  non vides est donc, par le théorème de Baire, dense dans  $g$ . Chaque élément  $X_o$  de  $D$  est un vecteur de résonance pour  $T$ .

Alors :

THÉORÈME 2.4. — *Toute représentation non linéaire formelle  $T$  d'une algèbre de Lie résoluble  $g$  est formellement normalisable (au sens de la définition 2.1).*

*Preuve.* — Il suffit en effet de choisir un vecteur de résonance  $X_o$  pour  $T$  et de normaliser  $T_{X_o}$  par le lemme 1.4 pour que  $T$  soit normalisée relativement à  $X_o$  (théorème 1.7) donc par définition que  $T$  soit normale.

Ce résultat généralise l'étude du cas nilpotent ([1]).

### 3. Normalisation d'une représentation d'une algèbre de Lie

Si  $g$  est une algèbre de Lie complexe semi-simple (de dimension finie), on sait [7], [9], que toute représentation formelle est formellement linéarisable. Une représentation  $T$  sera donc dite normale si et seulement si  $T$  est linéaire.

Soit maintenant  $g$  une algèbre de Lie complexe quelconque et  $T$  une représentation non linéaire formelle de  $g$  sur  $E$ . Notons  $r$  le radical résoluble de  $g$ ; on sait d'après le théorème de LEVI-MALCEV ([11]) que l'on peut décomposer  $g$  en

$$g = s \oplus r \quad (\mathcal{D})$$

où  $s$  est semi simple. On posera donc :

**DÉFINITION 3.1.** — Une représentation non linéaire formelle  $T$  d'une algèbre de Lie complexe  $g$  sera dite normale par rapport à la décomposition de Levi.

$$g = s \oplus r \quad (\mathcal{D})$$

de  $g$  si la restriction  $T|_s$  de  $T$  à  $r$  est normale et celle  $T|_r$  de  $T$  à  $s$  est linéaire.

$T$  sera dite normalisable par rapport à la décomposition de Levi  $\mathcal{D}$  de  $g$  si elle est équivalente à une représentation normale par rapport à la décomposition de Levi.

Etant donné une représentation formelle  $T$  d'une algèbre de Lie  $g$  et une décomposition de Levi  $\mathcal{D}$  de  $g$ , nous allons montrer que  $T$  est normalisable par rapport à  $\mathcal{D}$ . Établissons d'abord :

**LEMME 3.2.** —  $g$ ,  $T$  et  $\mathcal{D}$  étant donnés, il existe au moins un vecteur de résonance  $X_o$  pour  $T|_r$  tel que

$$[s, X_o] = 0.$$

*Preuve.* — Déployons  $s$  en :

$$s = n^- + h + n^+$$

où  $h$  est une sous-algèbre de Cartan et si  $\Delta$  est le système de racines de  $h$  dans  $g$ , on a choisi un ordre sur  $\Delta$  et on a posé :

$$n^+ = \sum_{\alpha \in \Delta, \alpha > 0} s^\alpha, \quad n^- = \sum_{\alpha \in \Delta, \alpha < 0} s^\alpha$$

où  $s^\alpha$  est le sous-espace radiciel de  $s$  correspondant à la racine  $\alpha$  ([11]).

Décomposons maintenant  $r$ , vu comme un  $s$  module pour la représentation adjointe :

$$r = \sum_{i \leq 1} r_i$$

où chaque  $r_i$  est un module irréductible, engendré par son vecteur de plus haut poids  $w_i$ .

Si  $r_i$  n'est pas le module trivial, les vecteurs de poids plus petit de  $r_i$  sont obtenus par action de  $n^-$  sur  $w_i$  et  $w_i$  lui-même ayant un poids non nul s'écrit comme  $\text{ad } H(w_i)$  où  $H$  est un vecteur de  $h$ .

Normalisation d'une représentation non linéaire

Choisissons alors un vecteur de résonance  $X_o$  de  $g$ , décomposons le sur les espaces  $r_i$  en

$$X_o = \sum_i X_i.$$

Pour chaque  $i$  tel que  $r_i$  n'est pas trivial,  $X_i$  est une somme de crochets :

$$X_i = \sum_j [H_j, X_{ij}] + \sum_\alpha [X_\alpha, X_{i\alpha}]$$

où  $X_{ij}, X_{i\alpha}$  appartiennent à  $r_i$ ,  $X_\alpha$  à  $n^-$  et  $H_j$  à  $h$ .

D'autre part  $h + n^- + r$  est une sous algèbre résoluble de  $g$ , on peut donc triangulariser la restriction de  $T^1$  à cette algèbre et donc prolonger les sous quotients irréductibles  $\mu_1, \dots, \mu_n$  de  $T^1|_r$  à  $h + n^- + r$ , donc :

$$\mu_\ell(X_i) = 0 \quad \forall \ell = 1, \dots, n \quad \forall i \in I = \{i \text{ tels que } r_i \text{ est non trivial}\}.$$

Le vecteur :

$$X'_o = X_o - \sum_{i \in I} X_i$$

est donc encore un vecteur de résonance pour  $T|_r$  et il vérifie :

$$[s, X'_o] = 0.$$

**THÉORÈME 3.3.** — *Soit  $T$  une représentation formelle non linéaire d'une algèbre de Lie  $g$  et  $\mathcal{D}$  une décomposition de Levi de  $g$ . Alors  $T$  est normalisable par rapport à  $\mathcal{D}$ .*

*Preuve.* — On choisit un vecteur de résonance  $X_o$  pour  $T|_r$  qui commute à  $s$ , on note  $E_1, \dots, E_m$  les sous espaces caractéristiques de  $T^1_{X_o}$  et on pose :

$$E_s^\alpha = L(\sigma_k(\otimes^{\alpha_1} E_1 \otimes \dots \otimes \otimes^{\alpha_m} E_m), E_s).$$

Comme  $T^1|_s$  commute à  $T^1_{X_o}$ , chacun des  $E_s^\alpha$  est stable par chaque  $\text{ad } T^1_X$  ( $X \in s$ ). Si  $T_{X_o}$  est normalisé alors,  $T|_r$  l'est et on suppose que  $T^2|_s, \dots, T^{k-1}|_s$  sont tous nuls, alors l'application :

$$\varphi_s^\alpha s \rightarrow E_s^\alpha$$

définie par :

$$\varphi_s^\alpha(X) = \pi_s \circ T^k_X|_{\sigma_k(\otimes^{\alpha_1} E_1 \otimes \dots \otimes \otimes^{\alpha_m} E_m)}$$



où  $\pi_s$  est la projection sur  $E_s$  parallèlement à  $\sum_{j \neq s} E_j$ , est un 1-cocycle de  $E_s^\alpha$  pour sa structure de  $s$  module définie ci-dessus. C'est donc un cobord [11] et on peut trouver  $W_s^\alpha$  dans  $E_s^\alpha$  tel que :

$$\varphi_s^\alpha(X) = [T_X^1, W_s^\alpha] \quad \forall X \in s.$$

Mais si  $(\alpha, s)$  n'est pas résonnant c'est-à-dire si :

$$\sum_i \lambda_i \alpha_i - \lambda_s \neq 0$$

alors, puisque  $T_{X_0}^1$  commute à  $T^1|_s$ , on a par l'argument du théorème 1.7 :

$$\varphi_s^\alpha(X) = 0 \quad \forall X \in s.$$

On peut alors tuer les  $\varphi_s^\alpha$  restant en posant :

$$\psi = Id + \sum_{(\alpha, s) \in R} W_s^\alpha, \quad \psi_* T_* \psi^{-1} = T'$$

où  $R$  est l'ensemble des couples  $(\alpha, s)$  résonnants.

Par construction,  $T'_{X_0}$  est toujours normal donc  $T'|_r$  aussi et  $T'^k|_s$  s'annule.

On conclut par récurrence sur  $k$ .

#### 4. Interprétation cohomologique

Les groupes de cohomologie naturellement associés au problème de linéarisation ou de normalisation formelle d'une représentation formelle  $T$  d'une algèbre de Lie  $g$  sont les groupes :

$$H(k) = H^1(g, L(\otimes_s^k E, E))$$

où  $L(\otimes_s^k E, E)$  est considéré comme un  $g$ -module par action de  $\text{ad } T^1$ .

En particulier,  $T$  est linéarisable si chacun de ces groupes est nul (sur ceci voir par exemple [7] et [9]).

La méthode de normalisation présentée au §3 consiste en fait à localiser les termes d'ordre  $k$  dans le sous espace des termes résonnants.

Conservons toutes les notations précédentes (en particulier  $e_1, \dots, e_n$  est une base de  $E$  sur laquelle  $T_{X_0}^1$  est sous forme de Jordan) et appelons pour

Normalisation d'une représentation non linéaire

chaque  $\lambda$  de  $\mathbf{C}$ ,  $V_\lambda$  le sous espace de  $L(\otimes_s^k E, E)$  engendré par les  $e_\alpha^s$  tels que :

$$\sum_j \alpha_j \mu_j(X_o) - \mu_s(X_o) = \lambda \quad (|\alpha| = k),$$

pour normaliser  $T$  nous avons imposé à  $T^k$  de vérifier :

$$T_{X_o}^k \in V_o, T^k|_s = 0, T_X^k \in \sum_j V_{v_j}, \forall X \in r.$$

Notons donc  $Z(k)$  l'espace des cocycles  $f$  qui vérifient ces relations :

$$Z(k) = \{f \in Z^1(g.L(\otimes_s^k E, E)) \text{ tels que } \\ f(X_o) \in V_o, f|_s = 0, f(X) \in \sum_j V_{v_j}, \forall X \in r\}.$$

On a :

PROPOSITION 4.1. — *La restriction  $\theta$  de la projection canonique de  $Z^1(g, L(\otimes_s^k E, E))$  sur  $H(k)$  à  $Z(k)$  est surjective pour tout  $k \geq 2$ .*

*Preuve.* — Conservons toutes ces notations, si  $e_\alpha^s$  est un élément de  $V_\lambda$ , alors :

$$\text{ad } T_{X_o}^1(e_\alpha^s) = \lambda e_\alpha^s + \sum_{h=2}^n \delta_h e_{\alpha'(h)}^s - \delta_s e_\alpha^{s-1}$$

où :

$$\alpha'(h) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1} - 1, \alpha_h + 1, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_n)$$

et les  $\delta_h$  sont les termes non diagonaux de  $T_{X_o}^1$ . Comme  $\delta_h$  ne peut être nul que si :

$$\mu_h(X_o) = \mu_{h-1}(X_o),$$

$V_\lambda$  est stable par  $\text{ad } T_{X_o}^1$  et  $\text{ad } T_{X_o}^1 - \lambda \text{id}|_{V_\lambda}$  est nilpotent : les  $V_\lambda$  sont les sous espaces caractéristiques de  $\text{ad } T_{X_o}^1$ .

Soit  $f$  un 1-cocycle de notre cohomologie. On peut trouver (voir §2)  $W$  dans  $\sum_{\lambda \neq 0} V_\lambda$  tel que :

$$f(X_o) = \text{ad } T_{X_o}^1(W) + g(X_o) \quad \text{avec } g(X_o) \in V_o.$$

Posons :

$$dW(X) = \text{ad } T_X^1(W) \quad (x \in g) \quad \text{et } g = f - dW,$$

$g$  est un cocycle cohomologue à  $f$ . Dans le §3, on a construit  $W'$  dans  $V_o$  tel que :

$$g(X) = \text{ad } T_X^1(W') \quad \forall X \in s.$$

Donc :

$$h = g - dW'$$

est un cocycle cohomologue à  $f$  et par construction :

$$h(X) = 0 \quad \forall X \in s, \quad h(X_o) \in V_o.$$

On a vu enfin que la relation de cocycle sur  $r$  implique que  $h(X)$  est dans  $\oplus V_{v_j}$  dès que  $h(X_o)$  est dans  $V_o$  : il suffit de reprendre l'argument du théorème 1.7, en supposant  $T^\ell|_r$  nul si  $2 \leq \ell < k$ .  $h$  est donc dans  $Z(k)$  et  $\theta$  est surjective.

Malheureusement, des exemples simples montrent qu'en général  $\theta$  n'est pas bijective :

$$\text{si } E = \mathbf{C}^2, \quad g \Rightarrow X < \quad \text{et } T_X^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

On trouve :

$$Z(2) = L(g, L(\otimes_s^2 E, E)) = Z^1(g, L(\otimes_s^2 E, E))$$

et

$$B^1(g, L(\otimes_s^2 E, E)) \text{ est de dimension 4.}$$

Pendant, si on suppose que la partie linéaire de  $T$  est complètement réductible,  $Z(k)$  donne une description exacte de  $H(k)$  :

PROPOSITION 4.2. — *Si  $T^1$  est complètement réductible,  $\theta$  est une bijection.*

*Preuve.* — Soit  $f$  un élément du noyau de  $\theta$ ,  $f$  est donc un cobord et il existe  $W$  tel que

$$f(X) = [T_X^1, W] \quad \forall X \in g.$$

Mais  $T^1$  étant complètement réductible  $T^1|_r$  est une somme de caractères et est donc nul sur  $[r, r]$  alors pour chaque  $Y$  de  $r$  :

$$[T_{X_o}^1, f(Y)] - [T_Y^1, f(X_o)] = f([X_o, Y]) = [T_{[X_o, Y]}^1, W] = 0.$$

## Normalisation d'une représentation non linéaire

Mais  $f(X_o)$  est par définition dans  $V_o$  et  $X_o$  est un vecteur de résonance donc :

$$[T_Y^1, f(X_o)] = 0$$

et  $f(Y)$  est dans  $V_o$ .

D'autre part :

$$[\text{ad } T_Y^1, \text{ad } T_{X_o}^1] = \text{ad } T_{[Y, X_o]}^1 = 0$$

donc chaque  $V_\lambda$  est stable par  $\text{ad } T_Y^1$  et donc si  $f(Y) = \text{ad } T_Y^1(W)$  est dans  $V_o$ , il en est de même de  $W$ , mais alors  $f(Y)$  est nul.

*Remarque.* — Les groupes  $H(k)$  avaient été calculés dans [2] si  $g$  est nilpotente.

### 5. Normalisation analytique

Quittons maintenant le cadre formel. On pose :

**DÉFINITION 5.1.** — Une représentation non linéaire formelle  $T$  de  $g$  est dite analytique si la série :

$$\sum_{k \geq 1} T_X^k(\otimes^k e) = T_X(e) \quad (e \in E)$$

converge dans un voisinage de 0 de  $E$  pour chaque  $X$  de  $g$ .

Nous avons alors un théorème de Poincaré.

**THÉORÈME 5.2.** — Soit  $g$  une algèbre de Lie et  $r$  le radical résoluble de  $g$ . Soit :

$$(\mathcal{D}) \quad g = s + r$$

une décomposition de Levi-Malcev de  $g$ , soit  $T$  une représentation non linéaire analytique dans un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension finie, enfin soit  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les sous quotients irréductibles de  $T^1|_r$ .

Si 0 n'est pas dans l'enveloppe convexe dans  $r^*$  des  $\mu_i$ , alors il existe une transformation analytique et inversible  $\psi$  de  $E$  dans  $E$  telle que :

$$\psi(0) = 0 \text{ et } \psi * T \circ \psi^{-1}$$

soit normale par rapport à  $\mathcal{D}$ .

*Preuve.* — On reprend notre construction. On choisit d'abord un vecteur de résonance  $X_o$  dans  $r$  tel que :

$$Re \mu_j(X_o) > 0 \quad \forall j.$$

Ceci est possible grâce au théorème de Hahn Banach pour  $r_{\mathbf{R}}^*$  et à la densité de l'ensemble des vecteurs de résonance (voir [1]).

Le théorème de Poincaré Dulac [3] garantit l'existence d'une transformation analytique inversible  $\psi_1$  qui normalise  $T_{X_o}$  donc  $T|_r$ .

Ceci est la version analytique de la première étape de notre construction.

Pour linéariser  $T|_s$ , on sait [8], [7] que

$$\psi_1 * T \circ \psi_1^{-1}|_s$$

peut être analytiquement linéarisé par une transformation  $\psi_2$ .  $\psi_2$  se développe en :

$$\psi_2(x) = \sum_{(\alpha,s) \in R} \psi_s^\alpha x^\alpha e_s + \sum_{(\alpha,s) \notin R} \psi_s^\alpha x^\alpha e_s = \psi_2'(x) + \psi_2''(x)$$

où  $R$  est l'ensemble des couples résonnants.  $\psi_2$  est analytique au voisinage de 0 si et seulement si :

$$\exists M > 0, \exists r_1, \dots, r_n > 0, \text{ tels que } \forall \alpha, \forall s \quad |\psi_s^\alpha| \leq M \frac{1}{r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n}}$$

(voir par exemple [13]); mais alors  $\psi_2'$  et  $\psi_2''$  sont analytiques et la deuxième étape de la démonstration consiste justement à remplacer  $\psi_2$  par  $\psi_2'$ . En posant

$$\psi = \psi_2' \circ \psi_1$$

on prouve le théorème.

## 6. Un exemple

Dans [12], LIVINGSTON et ELLIOTT ont envisagé toutes les représentations non linéaires analytiques  $T$  d'algèbres de Lie réelles  $g$  dans un espace  $\mathbf{R}^2$  en supposant  $T^1$  fidèle. Ces représentations sont toutes analytiquement linéarisables excepté si  $g$  est de dimension 1 (cas d'un seul champ de vecteur étudié par DULAC) ou si  $g$  est l'algèbre de Lie résoluble engendrée par  $E$  et  $F$  avec :

$$[E, F] = E$$

Normalisation d'une représentation non linéaire

si avec des notations évidentes ( $x = x_1, y = x_2$ ) :

$$T_E^1 = y\partial_x, T_F^1 = (1 + \delta)x\partial_x + \delta y\partial_y \text{ et } \delta \in [-3, 2].$$

Nous allons donc étudier ici cette algèbre de Lie, en passant au domaine complexe :

**THÉORÈME 6.1.** — *Soit  $g$  l'algèbre de Lie de dimension 2 sur  $\mathbf{C}$  engendrée par  $E$  et  $F$  avec :*

$$[E, F] = E$$

*et  $T$  une représentation non linéaire analytique de  $g$  sur  $\mathbf{C}^2$  de partie linéaire :*

$$T_E^1 = y\partial_x, T_F^1 = (1 + \delta)x\partial_x + \delta y\partial_y.$$

Alors :

1) *Si  $\delta \notin \mathbf{R}$ ,  $T$  est analytiquement linéarisable.*

2) *Si  $\delta \in \mathbf{R}$  et  $\delta > 0$ .*

*Soit  $\delta = 1/k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  et  $T$  est analytiquement normalisable sous la forme :*

$$T_E = y\partial_x, T_F = \left(\frac{1+k}{k}\right)x\partial_x + \frac{1}{k}y\partial_y + ay^{k+1}\partial_x \quad (a \in \mathbf{C}).$$

*Soit  $\delta \neq 1/k$  et  $T$  est analytiquement linéarisable.*

3) *Si  $\delta \in \mathbf{R}$  et  $\delta < -1$ ,  $T$  est analytiquement linéarisable.*

4) *Si  $\delta = 0$ ,  $T$  est formellement normalisable sous la forme :*

$$T_E = y\partial_x, T_F = x\partial_x + a(y)(x\partial_x + y\partial_y)$$

*( $a$  est une série formelle sans terme constant).*

5) *Si  $\delta = -1$ ,  $T$  est formellement linéarisable.*

*Preuve.* —  $g$  est résoluble et a deux racines  $v_1$  et  $v_2$  définies par :

$$v_1(E) = 0, v_1(F) = 1, v_2 = 0.$$

Les sous quotients irréductibles de  $T^1$  sont  $\mu_1$  et  $\mu_2$  où :

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) = 0; \mu_1(F) = 1 + \delta, \mu_2(F) = \delta.$$

Chaque vecteur non colinéaire à  $E$  est donc un vecteur de résonance et les équations de résonances :

$$\mu_s^\alpha = v_j \quad (|\alpha| > 1)$$

s'écrivent :

$$\mu_1^\alpha = v_1 \quad \alpha_1(1 + \delta) + \alpha_2\delta = 2 + \delta \quad (1)$$

$$\mu_1^\alpha = v_2 \quad \alpha_1(1 + \delta) + \alpha_2\delta = 1 + \delta \quad (2)$$

$$\mu_2^\alpha = v_1 \quad \alpha_1(1 + \delta) + \alpha_2\delta = 1 + \delta \quad (2)$$

$$\mu_2^\alpha = v_2 \quad \alpha_1(1 + \delta) + \alpha_2\delta = \delta \quad (3)$$

Donc si  $\delta$  n'est pas réel, ces équations n'ont aucune solution et 0 n'est pas dans l'enveloppe convexe des  $\mu$ , ce qui prouve 1).

Si  $\delta$  est réel et  $\delta > 0$  ou  $\delta < -1$ , on peut normaliser analytiquement  $T$  par notre théorème 5.2 et il ne reste que des quantités polynomiales. Choisissons  $F$  comme vecteur de résonance.

**1<sup>er</sup> cas** :  $\delta > 0$ ,  $\delta \neq \frac{1}{k}$   $k = 1, 2, \dots$

L'équation (3) n'a aucune solution  $(\alpha_1, \alpha_2)$  telle que  $|\alpha| > 1$ , l'équation (2) n'admet de telles solutions que si :

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1 + \delta}{\delta} \in \mathbf{N}, \alpha_2 \geq 2, \text{ mais alors } \delta = \frac{1}{\alpha_2 - 1} \text{ et ceci est exclus.}$$

Enfin l'équation (1) admet les solutions :

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{2 + \delta}{\delta} \text{ ou } \delta = \frac{2}{\alpha_2 - 1} \text{ et } \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1 + \delta}{\delta} \text{ ou } \delta = \frac{1}{\alpha_2 - 1}$$

le seul terme résonnant possible est donc de la forme :  $y^k \partial_x$  et il n'apparaît pas dans le vecteur de résonance  $F$  choisi puisque  $v_1$  n'est pas nul; la forme normale de  $T$  est donc :

$$T_E = y \partial_x + ay^k \partial_x, \quad T_F = (1 + \delta)x \partial_x + \delta y \partial_y$$

mais la relation :

$$[T_E, T_F] = T_E$$

implique que  $a$  est nul,  $T$  est linéaire.

**2<sup>ième</sup> cas** :  $\delta = \frac{1}{k}$   $k = 1, 2, \dots$

Normalisation d'une représentation non linéaire

On trouve des termes résonnants de la forme :

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = k + 1 \quad (\text{équation 2})$$

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2k + 1 \quad (\text{équation 1})$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = k \quad (\text{équation 1})$$

l'équation (3) n'a pas de solution. La forme normale de  $T$  est donc :

$$T_F = \left( \frac{1+k}{k} \right) x \partial_x + \frac{1}{k} y \partial_y + ay^{k+1} \partial_x$$

$$T_E = y \partial_x + by^{k+1} \partial_x + cy^{2k+1} \partial_x + dxy^k \partial_x + ey^{k+1} \partial_y.$$

Mais la relation :

$$[T_E, T_F] = T_E$$

impose  $b = c = d = e = 0$  et on prouve ainsi 2).

Si  $\delta < -1$ ,  $T$  est analytiquement normalisable, les équations (1) et (2) n'ont pas de solution et la seule solution de (3) est :

$$\alpha_2 = 0, \alpha_1 = \frac{\delta}{1+\delta} \text{ soit } \delta = -\frac{k+1}{k} \text{ où } k = 1, 2, \dots$$

Mais alors la forme normale de  $T$  est :

$$T_F = -\frac{1}{k} x \partial_x - \frac{k+1}{k} y \partial_y + ax^{k+1} \partial_y$$

$$T_E = y \partial_x + bx^{k+1} \partial_y$$

et la relation :

$$[T_E, T_F] = T_E$$

impose  $a = b = 0$ ,  $T$  est linéaire.

Si  $\delta$  a la valeur -1, seule l'équation (3) a des racines de la forme :

$$\alpha_1 \text{ quelconque } \alpha_2 = 1$$

et  $T$  est formellement normalisable, sous la forme :

$$T_E = y \partial_x + b(x)y \partial_y, \quad T_F = -y \partial_y + a(x)y \partial_y$$

où  $a$  et  $b$  sont des séries formelles sans terme constant et là encore la relation :

$$[T_E, T_F] = T_E$$



impose que  $a(x)$  et  $b(x)$  sont nulles.

Enfin si  $\delta$  a la valeur 0, les termes résonnants sont :  $\alpha_2$  quelconque  $\alpha_1 = 2$  ou 1 ou 0 et  $T$  est donc formellement normalisable, sous la forme :

$$\begin{aligned} T_F &= x\partial_x + xa(y)\partial_x + b(y)\partial_y \\ T_E &= y\partial_x + c(y)x^2\partial_x + d(y)x\partial_x + e(y)x\partial_y + f(y)\partial_y \end{aligned}$$

où  $a, b, c, \dots, f$  sont des séries formelles en  $y, a, d$  et  $e$  sans terme constant ;  $b$  et  $f$  sans terme constant ni terme de degré 1. La relation :

$$[T_E, T_F] = T_E$$

impose  $f(y) = 0, d(y) = 0, e(y) = 0$  et  $c(y) = 0, b(y) = ya(y)$ .

(Le cas particulier  $a(y) = y$  avait été étudié dans [12]).

Remerciements . — Nous avons eu de fructueuses discussions avec notre ami Georges PINCZON, c'est un plaisir de lui exprimer maintenant toute notre gratitude.

Moshé FLATO s'est beaucoup intéressé à nos travaux, nous le remercions sincèrement tant pour ses critiques judicieuses que pour ses conseils constants et profitables.

Enfin nous remercions le CNRS et la DRST qui nous ont fourni leur soutien financier dans le cadre de la coopération franco-tunisienne.

## Références

- [1] ARNAL (D.), BEN AMMAR (M.) et PINCZON (G.). — The Poincaré Dulac theorem for nonlinear representation of nilpotent Lie algebras, *L.M.P.*, t. 8, 1984, p. 467-476.
- [2] BEN AMMAR (M.). — Nonlinear representations of connected nilpotent real Lie groups, *L.M.P.*, t. 8, 1984, p. 119-126.
- [3] BRJUNO (A.). — Forme analytique des équations différentielles, *Trandy M.M.O.*, t. 25, 1971, p. 119-262.
- [4] CHAPERON (M.). — Géométrie différentielle et singularité de systèmes dynamiques, *Astérisque*, t. 138.139, 1986.
- [5] KUO TSEI CHEN . — Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 693-722.
- [6] DUMORTIER (F.) et ROUSSARIE (R.). — *Smooth linearization of germs of  $\mathbb{R}^2$  actions and holomorphic vector fields*, *Ann. Inst. Fourier*, 30(1), p. 31-64.
- [7] FLATO (M.), PINCZON (G.), SIMON (J.). — Nonlinear representations of Lie groups, *Ann. Scien. E.N. Sup. Paris, 4e série*, t. 10, 1977, p. 405.

Normalisation d'une représentation non linéaire

- [8] GUILLEMIN (V.W.) and STERNBERG (S.).— Remarks on a paper of Hermann, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **130**, 1968, p. 110-116.
- [9] HERMANN (R.).— The formal linearization of a semi-simple Lie algebra of vector fields about a singular point, *Trans. Amer. Soc.*, t. **130**, 1968, p. 105-109.
- [10] HOCHSCHILD (G.) and SERRE (J.P.).— Cohomology of Lie algebras, *Ann. of Math.*, t. **57 n°3**, 1953, p. 591-603.
- [11] JACOBSON (N.).— *Lie algebras*.— Dover Public. Inc. -N.Y. 1962.
- [12] LIVINGSTON (E.S.) and ELLIOT (D.L.).— Linearization of vector fields, *Journal of diff. equations*, t. **55 n°3**, 1984, p. 289-299.
- [13] SERRE (J.P.).— *Lie algebras and Lie groups*.— W.A. Benjamin, Inc. New-York, Amsterdam, 1965.

(Manuscrit reçu le 19 novembre 1987)