ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHEL MISITI

Étude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 9, nº 3 (1988), p. 295-340

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_3_295_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n°3, 1988

Etude du nombre de solutions pour une classe d'équations elliptiques non-linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre

MICHEL MISITI[1]

RÉSUMÉ. — Soit B la boule unité de R^n, dans une partie on s'intéresse à l'existence et, en cas d'existence, au nombre de solutions classiques du problème aux valeurs propres non-linéaire suivant :

$$(P_o)\left\{\begin{array}{l}\Delta u = \dfrac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B \\ u/\partial B = 1 \\ u > 0 \text{ dans } B\end{array}\right\}$$

où : $\lambda \geq 0$ et $k \in]0, +\infty[$

On associe à (P_o) un problème à frontière libre $(P_{F.L.})$ et la seconde partie est consacrée à la recherche du nombre de solutions radiales de ce problème.

$$(P_{F.L.})\left\{\begin{array}{l}\Delta u = \dfrac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B - B_o \\ u/\partial B = 1 \\ u/\partial B_o = \dfrac{\partial u}{\partial R}/\partial B_o \\ u = 0 \text{ dans } B_o\end{array}\right\}$$

où $\lambda \geq 0$ et $k \in]0, 1[$

B_o est une boule de centre 0 et de rayon R_o inconnu.

ABSTRACT. — The B the unit ball of $\mathbf{R}^n$; in the part of this paper, we consider the nonlinear eignevalue problem (P_o), and especially, we are concerned with the number of solutions of (P_o).

In the second part, we associate with (P_o) a free boundary problem $(P_{F.L.})$ and we deal with the number of radial solutions of $(P_{F.L.})$.

[1] Ecole Centrale de Lyon, Département Mathématiques-Informatique -Systèmes, B.P. 163, 69131 Ecully Cédex

I - Introduction

1. — L'étude de réactions isothermes en catalyse chimique conduit au modèle de LANGMUIR-HINSBHERWOORD ([1-2])

$$\Delta u = \lambda u^m \left(\frac{\epsilon + 1}{\epsilon + u}\right)^{m+k} \text{ dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1. \qquad (I.1)$$

D'autre part, en cinétique enzymatique, on est conduit à considérer le problème ([3-4]) :

$$\Delta u = \lambda \frac{u^m}{\epsilon + u^{m+k}} \text{ dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1. \qquad (I.2)$$

Dans (I.1), le domaine Ω est une pastille catalytique et dans (I.2) une membrane enzymatique; la fonction u représente la concentration d'un réactif ou d'un substrat diffusant à travers la frontière $\partial\Omega$. Dans les deux problèmes, les paramètres sont tels que : $\lambda > 0$, $m \geq 1$, $k \geq 0$ et $\epsilon > 0$ assez petit. Pour $m = 1$, $k = 0$, (I.2) redonne la loi de MICHAELIS et MENTEN ([13]); pour $m = 1$, $k = 1$, (I.2) est une version simplifiée d'un modèle d'inhibition par excès de substract.

Dans le cas d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, de frontière régulière, des résultats généraux d'existence et de convergence lorsque $\epsilon \to 0$ pour (I.1) et (I.2) ont été établis par BRAUNER et NICOLAENKO (voir par exemple [3-6]). En particulier, ces problèmes admettent une solution positive régulière pour tout $\lambda > 0$.

Formellement, le problème limite associé à (I.1) (I.2) lorsque ϵ est pris égal à zéro est :

$$\Delta u = \frac{\lambda}{u^k} \text{ dans } \Omega; u/\partial\Omega = 1. \qquad (I.3)$$

Ce problème appartient à la classe des équations de EMDEN-FOWLER généralisées. Il est étudié par BRAUNER et NICOLAENKO ([3-4]) qui montrent l'existence d'une valeur critique λ_* du paramètre telle que (I.3) n'admet pas de solution régulière pour $\lambda > \lambda_*$.

Puisqu'au contraire (I.1) et (I.2) possèdent des solutions pour tout $\lambda > 0$, l'étude de la convergence des solutions maximales et minimales de ces problèmes conduit à "prolonger" le problème (I.3) par un problème à frontière libre.

$$\Delta u = \frac{\lambda}{u^k}\, \chi_{\{u>0\}} \text{ dans } \Omega ; u/\partial\Omega = 1 \qquad (I.4)$$

Pour λ suffisament grand, la mesure de l'ensemble $\Omega_o = \{u = 0\}$ est strictement positive. L'ensemble Ω_o correspond à un domaine intérieur à la membrane où la réaction enzymatique est "gelée". Par analogie avec les problèmes de population on l'appelle aussi le "dead core".

Dans ([7]), D.PHILIPPS établit la régularité "optimale" pour les solutions "variationnelles" de (I.3) (I.4) obtenues en minimisant la fonctionnelle

$$j(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{\lambda}{1-k}\, u^{1-k} \right\} dx$$

sur le convexe $K = \{ v \in H^1(\Omega) / v/_{\partial\Omega} = 1 \text{ et } v \geq 0 \text{ p.p.} \}$.

Un problème analogue à (I.4) apparaît aussi dans l'étude de la distribution de potentiel dans une diode cf CIMATTI ([8]).

Le cas $k = 1$ intervient dans les phénomènes de polarisation dans les conducteurs ioniques (cf. H.KAWARADA [9]).

Un problème similaire à (I.4) intervient lors de la modélisation du comportement critique dans un matériau subissant une réaction exothermique (cf. A.A. LACEY and G.C. WAKE [10]).

Dans le cas particulier où Ω est une boule de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, les solutions de (I.1) et (I.2) sont à symétrie radiale d'après un résultat de GIDAS-NI-NIRENBERG ([11]). Par conséquent les solutions de (I.3) et (I.4) obtenues par passage à la limite lorsque $\epsilon \to 0$ sont également à symétrie radiale. En fait, d'après ([11]) toute solution régulière de (I.3) est à symétrie radiale; mais, un problème ouvert est de savoir si (I.3) et (I.4) admettent des solutions non-radiales.

J.M. DE LA PRADA ([12)] étudie les solutions radiales de (I.3) et (I.4) pour $n = 1, 2, 3$ et $k \in]-1, +1[$.

Dans un ouvrage récent ([13]) DIAZ fait, en particulier, la synthèse sur les divers résultats concernant les problèmes (I.1) - (I.4).

2 - Dans ce travail, on prend $\Omega = B$ boule unité de $\mathbf{R}^n$.

Au paragraphe II, on s'intéresse aux solutions classiques c'est-à-dire dans $C^o(\overline{B}) \cap C^2(B)$ de :

$$(P_o) \begin{cases} \Delta u = \dfrac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B ; u/_{\partial B} = 1 \\ u > 0 \text{ dans } B \end{cases}$$

où $k \in]0, +\infty[$.

On montre tout d'abord que toute solution de (P_o) est à symétrie radiale. Ensuite, on note que pour tout a dans $]0, 1]$, il existe un unique couple (u, λ) solution de (P_o) tel que $u(0) = \min_B u = a$ et on montre que l'arc de solutions $\big(u(0), \lambda\big)$ est paramétré de la manière suivante :

$$\big[u(0)\big](\rho) = \frac{1}{Z(\rho)} \text{ et } \lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \ \rho \in [0, +\infty[\qquad (I.5)$$

où Z est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} & Z''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}\, Z'(\rho) = \frac{1}{Z^k(\rho)} \ \rho \in]0, +\infty[\\ & Z(0) = 1 \text{ et } Z'(0) = 0 \end{aligned} \qquad (I.6)$$

En étudiant les valeurs -avec leur multiplicité- de la fonction $\rho \to \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$ on peut déterminer alors le nombre de solutions de (P_o) pour $\lambda > 0$ fixé.

Au paragraphe III, on s'intéresse aux solutions classiques à symétrie radiale du problème à frontière libre :

$$(P_{F.L})\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\lambda}{u^k} \text{ dans } B\backslash\overline{B}_o; u/_{\partial B} = 1 \\ u/_{\partial B_o} = \dfrac{\partial u}{\partial R}/\partial B_o \\ u \equiv 0 \text{ dans } B_o \end{cases}$$

où :

$k \in]0, 1[$, $\lambda \in [0, +\infty[$

$B_o =$ boule ouverte de centre 0 et de rayon R_o si $0 < R_o < 1$ ou le point $\{0\}$.

On montre que pour tout $R_o \in [0, 1[$, il existe un unique couple (u, λ) solution de $(P_{F.L.})$. On prouve ensuite que l'arc de solutions (R_o, λ) est paramétré de la manière suivante :

$$R_o(\rho) = \frac{1}{\rho} \text{ et } \lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \ \rho \in]1, +\infty[\qquad (I.7)$$

où : Z est l'unique solution de :

$$\begin{aligned} & Z''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}\, Z'(\rho) = \frac{1}{Z^k(\rho)} \text{ dans }]1, +\infty[\\ & Z(1) = Z'(1) = 0 \end{aligned} \qquad (I.8)$$

En étudiant les valeurs -avec leur multiplicité- de la fonction $\rho \to \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$, on peut alors déterminer le nombre de solutions du problème à frontière libre pour $\lambda \geq 0$ fixé.

Notons que par un changement de variable et de fonction convenable dans (I.6) et (I.8), on ramène l'étude des variations de $\frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$ -ou ce qui revient au même de $\frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$- à l'étude d'une équation différentielle autonome. Seules les conditions initiales changent. On utilise alors des résultats du type théorèmes de STURM.

II - Etude du problème (P_o)

Dans cette partie, B désigne la boule unité de R^n.

On s'intéresse aux solutions classiques -c'est-à-dire dans $\mathcal{C}^o(\overline{B}) \cap \mathcal{C}^2(B)$- du problème suivant :

$$(P_o) \begin{cases} u \geq 0 \text{ dans } \overline{B} \\ -\Delta u + \frac{\lambda}{u^k} = 0 \text{ dans } B \\ u/\partial B = 1 \end{cases}$$

où : $k \in]0, +\infty[$ et $\lambda \in [0, +\infty[$.

Plus précisément, pour λ fixé, on cherche le nombre de solutions du problème (P_o).

Notons que si u est solution de (P_o), on a nécessairement $0 < u(x) \leq 1$ dans $\overline{B}$ et $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B})$. En effet :

. $\Delta u \in \mathcal{C}^o(B) \Rightarrow u(x) > 0$ dans B, donc dans $\overline{B}$ puisque $u/\partial B = 1$ et $u \in \mathcal{C}^o(\overline{B})$.

Par conséquent, $\lambda/u^k \in \mathcal{C}^o(\overline{B})$ et avec le principe du maximum on a $u(x) \leq 1$ dans $\overline{B}$. Si $\lambda > 0$, on a en fait $u(x) < 1$ dans B.

. D'autre part, en utilisant les estimations d'AGMON-DOUGLIS NIRENBERG et de SCHAUDER on obtient $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B})$.

Enfin, en utilisant un résultat de GIDAS-NI-NIRENBERG [11], on peut affirmer que u est à symétrie radiale. En effet :

. Si $\lambda = 0$, $u \equiv 1$ est l'unique solution de (P_o)

. Si $\lambda > 0$, posons $v = 1 - u$. On a $v \in \mathcal{C}^2(\overline{B})$, avec :

$$\begin{cases} v > 0 \text{ dans } B \\ \Delta v + f(v) = 0 \text{ dans } B \\ v/\partial B = 0 \end{cases}$$

où $f(v) = \dfrac{\lambda}{(1-v)}$ $k \in \mathcal{C}^1([0,1[)$

Et le résultat de [11] permet de conclure que v est à symétrie radiale et $\frac{dv}{dR} < 0$ pour $0 < R < 1$. Donc u est à symétrie radiale et $\frac{du}{dR} > 0$ pour $0 < R < 1$. Ce qui implique en particulier $\min_{\overline{B}} u = u(0)$.

Si on pose $w(R) = u(x)$ avec $R = \|x\|$, on a $w \in C^\infty([0,1])$ et est solution de :

$$(Q_o) \begin{cases} w(R) > 0 \text{ dans } [0,1] \\ w''(R) + \frac{n-1}{R}\ w'(R) = \frac{\lambda}{w^k(R)} \text{ dans }]0,1[\\ w'(0) = 0 \text{ et } w(1) = 1 \end{cases}$$

Réciproquement, si w est solution classique de (Q_o), on a $w \in C^\infty([0,1])$ et $u(x) = w(R)$ est solution de (P_o).

Remarques .— 1°) Pour $k = 0$, on a la solution explicite du problème $\Delta u = \lambda$ dans B avec $u/\partial B = 1$: $u(x) = 1 - \frac{\lambda}{2n}\ (1 - \|x\|^2)$.

Par conséquent, si $\lambda > \lambda_c = 2n$, (P_o) n'a pas de solution et si $\lambda \leq \lambda_c$, (P_o) admet une solution unique.

2°) Si $\lambda = 0$, le problème (P_o) admet une solution unique $u(x) \equiv 1$.

II.1 - Existence et caractérisation des solutions de (P_o)

THÉORÈME II.1.— *$\forall a \in]0,1]$, $\exists!(u,\lambda)$ solution classique de (P_o) avec $u(0) = a$. D'autre part, la courbe (a, λ_a) est paramétrée de la manière suivante :*

$$a = a(\rho) = \frac{1}{Z(\rho)}; \lambda_a = \lambda_a(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} \quad \rho \in [0, +\infty[$$

où Z est l'unique solution du problème suivant :

$$(P_I) \begin{cases} Z''(\rho) + \dfrac{n-1}{\rho}\ Z'(\rho) = \dfrac{1}{Z^k(\rho)} \ \textit{dans}\ ]0,+\infty[\\ Z(0) = 1 \ \textit{et}\ Z'(0) = 0 \end{cases}$$

De plus, Z étant strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ on a :

$$\lambda(a) = a^{1+k}\left[Z^{-1}(1/a)\right]^2 \quad a \in]0,1]$$

Démonstration.— On sait que (u,λ) solution de $(P_o) \Leftrightarrow (w,\lambda)$ solution de (Q_o) c'est-à-dire :

$$(Q_o)\begin{cases} w(R) > 0 \text{ dans } [0,1] \\ w''(R) + \frac{n-1}{R}\, w'(R) = \frac{\lambda}{w^k(R)} \text{ dans }]0,1[\\ w'(0) = 0 \\ w(1) = 1 \end{cases}$$

avec $w(R) = u(x)$ si $\|x\| = R$, donc $w(0) = u(0) = \min_{\overline{B}} u(x) > 0$.

Supposons démontrées l'existence et l'unicité de Z solution de (P_I), avec Z strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

Alors :

. $\forall a \in]0,1]$, $\exists! \rho_o \in [0,+\infty[$ tel que : $a = \frac{1}{Z(\rho_o)}$. Et, (w,λ) défini par $w(\rho) = \frac{Z(\rho\rho_o)}{Z(\rho_o)} = a\ Z(\rho\rho_o)$ et $\lambda = \frac{\rho_o^2}{Z^{1+k}(\rho_o)} = a^{1+k}\rho_o^2$ est solution de (Q_o) avec $w(0) = a$.

. Réciproquement, si (w,λ) est solution de (Q_o) avec $w(0) = a$.

- Si $a = 1$, $(w,\lambda) = (1,0)$ est l'unique solution de (Q_o)

- Si $a \in]0,1[$, nécessairement $\lambda > 0$, et la fonction $\rho \to \frac{1}{a}\ w\left(\sqrt{\frac{a^{1+k}}{\lambda}}\ \rho\right)$ est solution de (P_I). Par conséquent : $\frac{1}{a}\ w\left(\sqrt{\frac{a^{1+k}}{\lambda}}\ \rho\right) = Z(\rho)$.

Or :

$$\begin{aligned} w(1) = 1 \Rightarrow \lambda &= a^{1+k}\left\{Z^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^2 \\ \Rightarrow w(R) &= aZ\left(Z^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)R\right) \end{aligned}$$

Ceci prouve donc l'unicité.

LEMME II.1.— $\exists!$ $Z \in C^\infty([0,1])$ *solution de* (P_I). Z *est strictement croissante de* $[0,+\infty[$ *sur* $[1,+\infty[$.

De plus, on a :

$$\frac{z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} \geq \frac{1+k}{2n}\ \forall \rho.$$

Démonstration.— . Notons que si Z est solution de (P_I), on a nécessairement Z strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $Z \in C^\infty([0,1])$ et $1 \leq Z(\rho) \leq 1 + \frac{\rho^2}{2n}$ $\forall \rho \in [0,+\infty[$. En effet :

Si Z est solution de (P_I) on a :

$$Z'(\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \int_o^\rho \frac{s^{n-1}}{Z^k(s)}\, ds \qquad \forall \rho \in [0,+\infty[$$

et

$$Z(\rho) = 1 + \int_o^\rho \frac{1}{t^{n-1}} \left(\int_o^t \frac{s^{n-1}}{Z^k(s)}\, ds \right) dt \qquad \forall \rho \in [0,+\infty[\qquad (\star)$$

Et, puisque $Z(0) = 1$, on en déduit que $Z'(\rho) > 0$ sur $]0,+\infty[$ d'où : $Z(\rho) \geq 1$ sur $[0,+\infty[$ et avec $(\star)$ $Z(\rho) < 1 + \frac{\rho^2}{2n}$ sur $]0,+\infty[$. De plus, par récurrence on obtient $Z \in C^\infty([0,1])$.

. Posons :

$$E = \left\{ v \in C^o([0,+\infty[)/1 \leq v(\rho) \leq 1 + \frac{\rho^2}{2n} \ \forall \rho \in [0,+\infty[\right\}$$

$$d(u,v) = \sup_{[0,+\infty[} \left\{ |u(\rho) - v(\rho)| e^{-L\rho} \right\} \text{ avec } L^2 > k$$

$$(Tv)(\rho) = 1 + \int_o^\rho \frac{1}{t^{n-1}} \left(\int_o^t \frac{s^{n-1}}{v^k(s)}\, ds \right) dt$$

(E,d) est un espace métrique complet et T est une contraction stricte de (E,d) dans (E,d) -on a $d(Tv_1, Tv_2) \leq \frac{k}{L^2}\, d(v_1,v_2)$.

Par conséquent, T admet un point fixe unique $Z \in E$.

Il est immédiat de vérifier que $Z \in C^\infty([0,1])$ et est solution de (P_I).

. D'autre part, on a $\{\rho^{n-1} Z'(\rho)\}' = \frac{\rho^{n-1}}{Z^k(\rho)}$ $\forall \rho \in]0,+\infty[$. On multiplie cette égalité par Z^k et on intègre sur $[0,\rho]$. Il vient

$$\frac{dZ^{1+k}}{d\rho}(\rho) = \frac{1+k}{n}\, \rho + \frac{1+k}{\rho^{n-1}} \int_o^\rho t^{n-1} Z'(t) \{Z^k(t)\}' dt, \ \forall \rho \geq 0$$

Z et Z' sont positifs, par conséquent le 2ème terme du second membre est positif.

En intégrant à nouveau on obtient :

$$Z^{1+k}(\rho) \geq 1 + \frac{1+k}{2n}\, \rho^2, \quad \forall \rho \in [0,+\infty[.$$

On en déduit en particulier $Z(\rho) \to +\infty$ quand $\rho \to +\infty$ et donc Z est strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

II.2.— Principal résultat pour le problème (P_o)

Pour $\lambda \in [0,+\infty[$ donné, on va maintenant déterminer le nombre de solutions du problème (P_o).

D'après le théorème II.1, il suffit de "compter" les valeurs de $\rho \in [0,+\infty[$ telles que : $\lambda = \rho^2/_{Z^{1+k}(\rho)}$.

Autrement dit, on étudie les valeurs de la fonction $\rho \rightarrow \rho^2/_{Z^{1+k}(\rho)}$ -ou ce qui revient au même de la fonction $\rho \rightarrow \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$- avec leur multiplicité.

II.2.1.— Notations

On pose :

$$\lambda_c = \frac{2}{1+k}\left(n - \frac{2k}{1+k}\right) ; \rho = \frac{2}{1+k}$$

si

$$\lambda_c > 0 \begin{cases} A(k,n) = \dfrac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \dfrac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} = \sqrt{\dfrac{\beta}{n-2+\beta}} + \sqrt{\dfrac{n-2+\beta}{\beta}} \\ B(k,n) = A^2(k,n) - 4(1+k) \end{cases}$$

Pour (k,n) tels que $k > 0$ et $n \geq 1$, on définit les 4 régions suivantes :

$$\begin{aligned} \cdot\ R_1 &= \{(k,n)/B(k,n) < 0\} \\ &= \{(k,n)/N^-(k) < n < N^+(k)\} \\ \cdot\ R_2 &= \{(k,n)/B(k,n) \geq 0 \text{ et } n \geq 2\} \\ &= \{(k,n)/N^+(k) \leq n\} \\ \cdot\ R_3 &= \{(k,n)/B(k,n) \geq 0 \text{ et } n \leq 2\} \\ &= \left\{(k,n)/\frac{2k}{1+k} < n \leq N^-(k)\right\} \end{aligned}$$

où :

$$N^{\pm}(k) = \frac{6k+2}{k+1} \pm 4\sqrt{\frac{k}{1+k}}$$

Notons que $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{(k,n)/\lambda_c > 0\}$.

$$\cdot\ R_4 = \left\{(k,n)/n \leq \frac{2k}{1+k}\right\} = \{(k,n/\lambda_c \leq 0\}$$

Pour le problème (P_o), on a $n \in \mathbf{N}^*$.

On peut alors noter que :

$$
\begin{aligned}
n = 1 \ &: k \in]0,1[, \ (k,n) \in R_3 \\
& \ k \in [1,+\infty[, \ (k,n) \in R_4 \\
n = 2 \ &: (k,n) \in R_1 \\
3 \leq n < 10 \ &: k \in]0,k_n], \ (k,n) \in R_2 \\
& \ k \in]k_n,+\infty[, \ (k,n) \in R_1 \\
n \geq 10 \ &: (k,n) \in R_2
\end{aligned}
$$

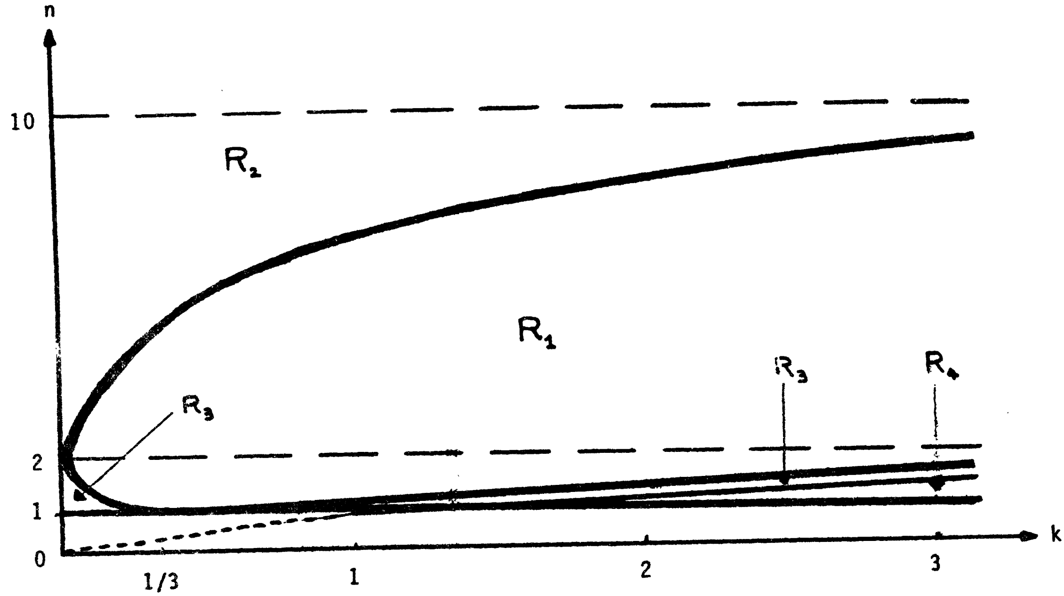

Figure 1

II.2.2. — Théorème

THÉORÈME II.2. — *1)* $(k,n) \in R_1$

$\exists \lambda_*, \lambda_{**}$ *avec* $0 < \lambda_{**} < \lambda_c < \lambda_*$ *tels que :*

- *Pour* $\lambda \in [0, \lambda_{**}[$, (P_o) *admet une solution unique.*

- *Pour $\lambda \in [\lambda_{**}, \lambda_*]$, $\lambda \neq \lambda_c$, (P_o) admet un nombre fini de solutions. (Ce nombre augmente lorsque $\lambda \to \lambda_c$).*
- *Pour $\lambda = \lambda_c$, (P_o) admet une infinité dénombrable de solutions.*
- *Pour $\lambda > \lambda_*$, (P_o) n'a pas de solution.*

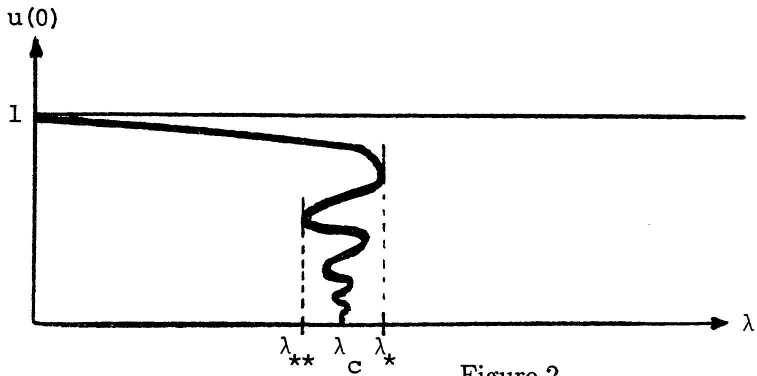

Figure 2

2) $(k, n) \in R_2$

- $\lambda \geq \lambda_c$, *(P_o) n'a pas de solution*
- $\lambda < \lambda_c$, *(P_o) admet une solution unique*

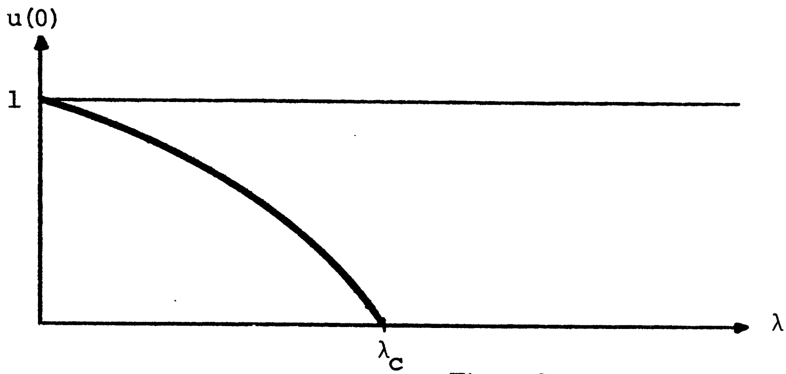

Figure 3

3) $(k, n) \in R_3$

$\exists \lambda_* > \lambda_c$ tel que :

- *Pour $\lambda \in [0, \lambda_c]$, (P_o) admet une solution unique.*
- *Pour $\lambda \in]\lambda_c, \lambda_*[$, (P_o) admet deux solution.*
- *Pour $\lambda = \lambda_*$, (P_o) admet une solution unique.*

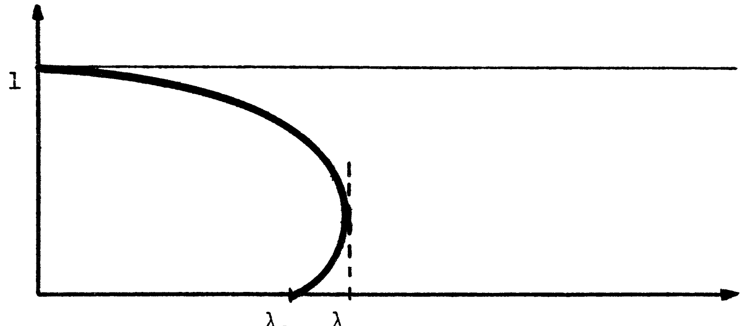

Figure 4

- Pour $\lambda > \lambda_*$, (P_o) n'a pas de solution.

4) $(k, n) \in R_4$

$\exists \lambda_* > 0$ *tel que :*

- Pour $\lambda = 0$, (P_o) admet une solution unique.

- Pour $\lambda \in]0, \lambda_*[$, (P_o) a deux solutions.

- Pour $\lambda = \lambda_*$, (P_o) admet une solution unique.

- Pour $\lambda > \lambda_*$, (P_o) n'a pas de solution.

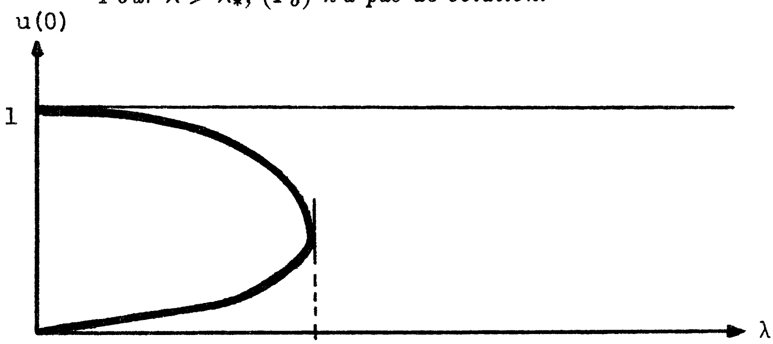

Figure 5

II.3. — Démonstration du Théorème II.2

II.3.1. — Cas où $\lambda_c = \dfrac{2}{1+k}\left(n - \dfrac{2k}{1+k}\right) > 0$

Cette partie concerne donc les régions R_1, R_2 et R_3. On pose

$$\rho = e^{s/\sqrt{\lambda_c}} \text{ et } \frac{Z(\rho)}{\rho^2/1+k} = \lambda_c^{-\frac{1}{1+k}} F(s)$$

$$\rho \in [0, +\infty[, \ s \in]-\infty, +\infty[$$

Notons que :

$$\lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} = \frac{\lambda_c}{F^{1+k}(s)}$$

On étudie les valeurs de F avec leur multiplicité. F est l'unique solution positive du problème suivant :

$$F''(s) + A(k,n)F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0 \text{ sur }]-\infty, +\infty[\quad (II.1)$$

$$\lim_{s \to -\infty} e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} s} F(s) = \lambda_c^{1/1+k} \quad (II.2)$$

$$\lim_{s \to -\infty} e^{\frac{\beta-1}{\sqrt{\lambda_c}} s} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} = 0 \quad (II.3)$$

Par ailleurs, avec l'équation vérifiée par $Z(\rho)$ on a $Z''(\rho) \to \frac{1}{n}$ qd $\rho \to 0$ et donc $\frac{Z'(\rho)}{\rho} \to \frac{1}{n}$ quand $\rho \to 0^+$. On en déduit que :

$$\lim_{s \to -\infty} e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c s}}} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} = \frac{1}{n\sqrt{\lambda_c}} \quad (II.4)$$

Puisque $\beta = \frac{2}{1+k'}$ $\beta - 2 < 0$ pour $k \in]0, +\infty[$, la relation (II.4) implique en particulier :

$$\lim_{s \to -\infty} \left\{ F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s) \right\} = 0. \quad (II.5)$$

D'autre part, avec le lemme II.1, on a aussi : $\frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} \geq \frac{1+k}{2n}$ d'où :

$$F(s) \geq \lambda_c^{1/1+k} . \frac{1+k}{2n} \quad (II.6)$$

On considère l'équation :

$$(E) \qquad F''(s) + A(k,n)F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0 \text{ dans }]s_o, +\infty[\in F$$

Nous allons démontrer deux lemmes qui permettent d'étudier le comportement d'une solution de (E). Ces deux lemmes seront aussi utilisés au paragraphe III pour le problème à frontière libre.

LEMME II.3.1a. — *Soit F une solution de (E). On suppose $\exists \eta \in]0,1[/F(s) \geq \eta$ $\forall s \in [s_o, +\infty[$. Alors :*

$$\lim_{s \to +\infty} F'(s) = 0 \ \textit{et} \ \lim_{s \to +\infty} F(s) = 1$$

Démonstration. — On multiplie l'équation (E) par F' et on intègre sur $[s_o, s]$. Il vient :
$(\star)$

$$\frac{1}{2}[F'(s)]^2 + \int_{s_o}^{s} [F'(t)]^2 \, dt + (\Delta F)(s) = \frac{1}{2}[F'(s_o)]^2 + (\Delta F)(s_o) \; \forall s \in [s_o, +\infty[$$

où :

$$\begin{array}{ll} \Delta F = \frac{F^2}{2} - \dfrac{F^{1-k}}{1-k} & \text{si } k \in]0,1[\\ \Delta F = \frac{F^2}{2} - \log F & \text{si } k = 1 \\ \Delta F = \frac{F^2}{2} + \frac{1}{(k-1)F^{k-1}} & \text{si } k \in]1, +\infty[\end{array}$$

. Avec $(\star)$, on obtient :

- $\eta \leq F(s) \leq M \qquad \forall s \in [s_o, +\infty[$
- $F'(s)$ bornée sur $[s_o, +\infty[$
- $F' \in L^2(s_o, +\infty)$

En effet, les deux premiers termes du premier membre de $(\star)$ sont positifs; si on suppose $\exists (s_n) \to +\infty / F(s_n) \to +\infty$, on en déduit que $(\Delta F)(s_n) \to +\infty$ ce qui est impossible.

Donc $\exists M / \eta \leq F(s) \leq M \; \forall s \in [s_o + \infty[$ ce qui implique $(\Delta F)(s)$ borné et les deux autres résultats.

Par ailleurs, puisque $F(s) \geq \eta > 0 \; \forall s \in [s_o, +\infty[$, on a $0 < \frac{1}{F^k(s)} \leq \frac{1}{\eta^k}$ $\forall s \in [s_o, +\infty[$, avec l'équation (E) on en déduit que : $F''(s)$ est bornée sur $[s_o, +\infty[$.

Par conséquent, F' est lipschitzienne sur $[s_o, +\infty[$

. Or :

$$\left.\begin{array}{l} F' \in L^2(s_o, +\infty) \\ F' \text{ lipschitzienne} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{s \to +\infty} F'(s) = 0.$$

En effet, par l'absurde, si $F'(s) \not\to 0$ quand $s \to +\infty$, il existe $a > 0$ pour lequel on peut choisir une suite croissante $(x_i)_{i \in N}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_i \to +\infty \; qd \; i \to \infty \\ |F'(x_i)| > a, \; \forall i \\ x_{i+1} - x_i > \dfrac{a}{2c} \text{ où } c \text{ est la constante de Lipschitz associée à } F' \end{array}\right.$$

Alors, $\forall i \in N$, $\forall x \in \left[x_i - \frac{a}{2c}, \; x_i + \frac{a}{2c}\right]$ on a $|F'(x)| > \frac{a}{2}$. D'où :

$$\text{mes} \left\{x \in [s_o, +\infty[/ |F'(x)| > \frac{a}{2}\right\} = +\infty$$

Or ceci est impossible car $F' \in L^2(s_o, +\infty)$ implique :

$$\text{mes}\left\{x \in [s_o, +\infty[/|F'(x)| > \frac{a}{2}\right\} \leq \frac{4}{a^2}\int^{+}\infty_{s_o}|F'(x)|^2\, dx < +\infty$$

. Avec $(\star)$, on peut en déduire que $(\Delta F)(s) \to L \in R$ quand $s \to +\infty$. Or : $s \to F(s)$ est continue sur $[s_o, +\infty[$ et $G \to \Delta G$ est continue sur $[\eta, \max F]$ par conséquent, il existe $\ell > 0$ tel que $\lim_{s\to+\infty} F(s) = \ell$.

Enfin, avec l'équation différentielle on a :

$$[e^{As}F'(s)]' = e^{As}\left(\frac{1}{F^k(s)} - F(s)\right)$$

On intègre sur $[s_o, n]$, $n \in N$, $n \geq s_o$. Il vient :

$$F'(n) - e^{A(s_o-n)}F'(s_o) = \int_o^{n-s_o} e^{-Au}\left\{\frac{1}{F^k(n-u)} - F(n-u)\right\} du$$

Avec le théorème de Lebesgue on obtient alors :

$$0 = \frac{1}{\ell k} - \ell \quad \lim_{s\to\infty} F(s) = 1.$$

LEMME II.3.1b. — *Soit F une solution de l'équation (E).*

On suppose :

$$\begin{aligned}&\exists\eta \in]0,1[/F(s) \geq \eta \qquad \forall s \in [s_o, +\infty[\\ &F(s) \not\equiv 1\end{aligned}$$

Alors :

(1) Les zéros de $F'(s)$ et de $\{F(s) - 1\}$ sont alternés.

(2) Si $B(k,n) = A^2(k,n) - 4(1+k) < 0$, alors :

$(F(s) - 1)$ -et donc $F'(s)$- admet une infinité dénombrable de zéros $\{t_n\}$, avec $t_n \to +\infty$ et $t_{n+1} - t_n \geq C_\star > 0$, $\forall n$.

(3) Si $B(k,n) = A^2(k,n) - 4(1+k) \geq 0$, alors :

(i) $(F(s) - 1)$ s'annule au plus 1 fois si $F(s_o) < 1$

(ii) $(F(s) - 1)$ s'annule au plus 2 fois si $F(s_o) > 1$

(iii) $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{F'(s)}{F(s)-1} = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{dF}{dF'} = \dfrac{-A \pm \sqrt{B}}{2}$

Démonstration.— · (1) - Posons $G(s) = F(s) - 1$. On a :

$$G''(s) + A(k,n)G'(s) + R\big(F(s)\big)G(s) = 0 \text{ dans }]s_o, +\infty[$$

où :

$$R\big(F(s)\big) = \begin{cases} \dfrac{F^{1+k}(s) - 1}{F^{1+k}(s) - F^k(s)} & \text{si } F(s) \neq 1 \\ 1 + k & \text{si } F(s) = 1 \end{cases}$$

Puisque $F(s) \geq \eta > 0 \ \forall s$, $R\big(F(s)\big)$ est continue sur $[s_o, +\infty[$. D'autre part, $F(s) \not\equiv 1 \Rightarrow G(s) \not\equiv 0$.

D'après les résultats classiques sur l'équation du second ordre les zéros de G et G' -c'est-à-dire de $\big(F(s) - 1\big)$ et $F'(s)$- sont alternés.

De plus, si $a, b, b > a$ sont 2 zéros successifs de $G(s)$ on a :

$$\max\left\{R\big(F(s)\big)\right\}(b-a)^2 + 2A(b-a) \geq \Pi^2$$
$$\Rightarrow (b-a) \geq C_\star > 0 \text{ car } R\big(F(s)\big) \leq \frac{1-\eta^{1+k}}{\eta^k - \eta^{1+k}}$$

- Ce résultat est dû à Opial -voir Reid [14]- si u est une solution non identiquement nulle de : $u''(t) + p_1(t)u'(t) + p_o(t)u(t) = 0$ avec p_o, p_1 continues sur I et $|p_o(t)| \leq L_o$ et $|p_1(t)| \leq L_1$, alors si a et b sont 2 zéros successifs de u, on a : $L_o(b-a)^2 + 2\ L_1(b-a) \geq \Pi^2$.

· (2) et $(3)_{i,ii}$

· On peut démontrer (2) par plusieurs méthodes.

D'après le lemme II.3.1a, le point $(F' = 0,\ F = 1)$ est un point d'équilibre stable et asymptotiquement stable pour l'équation (E). (2) est alors une conséquence des résultats classiques sur la stabilité -voir par exemple Pontriaguine [15].

On peut encore obtenir ce résultat de la manière suivante : Posons :

$$G(s) = H(s)\ e^{\frac{-As}{2}}$$

On a :

$$H''(s) + \left(R\big(F(s)\big) - \frac{A^2}{4}\right)H(s) = 0 \text{ dans }]s_o, +\infty[$$

Or, d'après un résultat de KNEISSER -voir REID [14]-, pour l'équation $H''(s) + q(s)H(s) = 0$, on a :

Si $s^2\ q(s) \to L$ quand $s \to +\infty$, alors $L \leq 1/4 \Rightarrow H$ s'annule un nombre fini de fois et $1/4 > L \Rightarrow H$ s'annule une infinité de fois.

Ici, $F(s) \to 1$ quand $s \to +\infty \Rightarrow R\big(F(s)\big) - \frac{A^2}{4} \to (1+k) - \frac{A^2}{4}$ quand $s \to +\infty$.

Par conséquent, si $A^2 - 4\ (1+k) < 0$, $H(s)$ -c'est-à-dire $\big(F(s)-1\big)$- s'annule une infinité de fois.

[On donnera une autre démonstration du point (2) plus loin].

· Dans le cas où $B(k,n) = A^2(k,n) - 4\ (1+k) \geq 0$, considérons l'équation :

$$H''(s) + \left\{ R\big(F(s)\big) - \frac{A^2}{4} \right\} H(s) = 0.$$

On ne peut pas avoir $H(s_1) = H(s_2) = 0$ et $H(s) > 0$ sur $]s_1, s_2[$ -c'est-à-dire $F(s_1) = F(s_2) = 1$ et $F(s) > 1$ sur $]s_1, s_2[$-.

En effet, en multipliant par H et en intégrant sur $[s_1, s_2]$ on trouverait alors $H(s) \equiv 0$ sur $[s_1, s_2]$ -c'est-à-dire $F(s) \equiv 1$ sur $[s_1, s_2]$- ce qui est impossible car $H(s) \not\equiv 0$ sur $[s_o, +\infty[\Rightarrow$ les zéros de H sont isolés.

On peut alors en déduire que :

- Si $F(s_o) < 1$, seuls les 2 cas suivants sont possibles

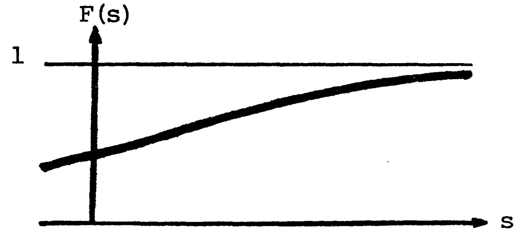

Figure 6

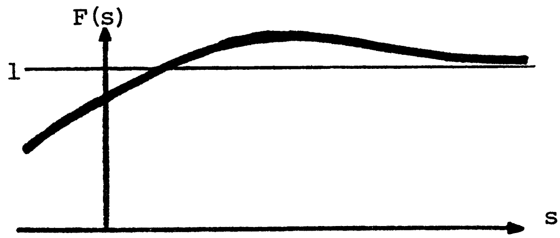

Figure 7

- Si $F(s_o) > 1$, seuls les 3 cas suivants sont possibles

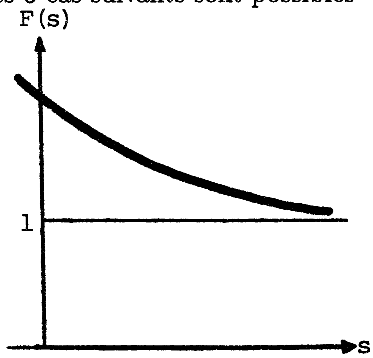

Figure 8

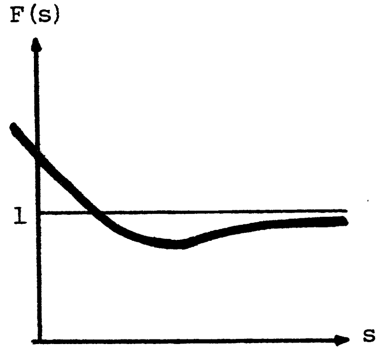

Figure 9

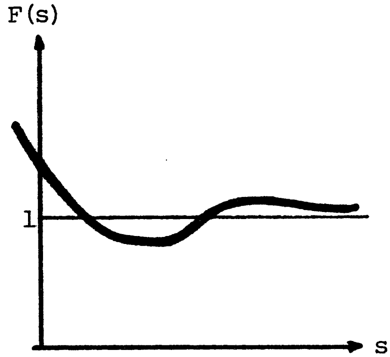

Figure 10

Remarque.— Dans les représentations ci-dessus, on a pris $F'(s_o) \geq 0$ si $F(s_o) < 1$, on peut évidemment avoir $F'(s_o) < 0$. -même chose pour l'autre cas-

· (3) iii

Nous allons maintenant démontrer le dernier point du lemme et par la même occasion obtenir une autre démonstration du point (2).

L'équation $F''(s) + A\ F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0$ on peut s'écrire sous la forme d'un système :

$$\begin{cases} X = F(s),\ Y = F'(s) \\ \dfrac{dX}{ds} = Y \\ \dfrac{dY}{ds} = -AY + X^{-k} - X \end{cases}$$

Supposons que $\big(F(s) - 1\big)$ s'annule un nombre fini de fois sur $]s_o, +\infty[$. D'après le lemme II.3.1a, on a $F(s) \to 1$ et $F'(s) \to 0$ quand $s \to +\infty$, par conséquent pour $s > s_1$ assez grand, seuls les 2 cas suivants sont possibles :

$$F(s) > 1 \text{ et } F'(s) < 0 \qquad \forall s \geq s_1$$

ou

$$F(s) < 1 \text{ et } F'(s) > 0 \qquad \forall s \geq s_1$$

On a donc :

$$\begin{cases} y(x)y'(x) + Ay(x) = x^{-k} - x \text{ sur }]1, x_\star[\\ y(x) < 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y(x)y'(x) + Ay(x) = x^{-k} - x \text{ sur }]x_\star, 1[\\ y(x) > 0 \end{cases}$$

avec dans les 2 cas :

$$\lim_{x\to 1} y(x) = 0.$$

En dérivant l'équation on obtient :

$$y(x)y''(x) = -\left\{ \left[y'(x)\right]^2 + A\left[y'(x)\right] + \frac{k}{x^{1+k}} + 1 \right\}$$

En étudiant le signe de y'', on en déduit que :

$$\lim_{x\to 1} y'(x) = L \in \mathbf{R} \text{ ou } \lim_{x\to 1} y'(x) = -\infty$$

On revient à l'équation vérifiée par y. On a :

$$y'(x) + A = \frac{x^{-k} - x}{y(x)} = -\frac{1 + k/c^{1+k}}{y'(c)} \text{ avec } c \in]1, x[\text{ ou }]x, 1[$$

On fait $x \to 1$, on note alors que le cas $y'(x) \to -\infty$ est impossible donc $\lim_{x\to 1} y'(x) = L \in \mathbf{R}$ avec :

$$L^2 + A\,L + (1+k) = 0$$

Or, si $A^2 - 4(1+k) < 0$, l'équation précédente n'a pas de solutions, dans ce cas, on peut affirmer que $\big(F(s) - 1\big)$ s'annule une infinité de fois ce qui prouve à nouveau le point (2).

Si $A^2 - 4(1+k) \geq 0$ -on sait avec 3(i)(ii) que $\big(F(s) - 1\big)$ s'annule un nombre fini de fois- on a :

$$y'(x) = \frac{dF'}{dF} \to \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}$$

ou encore :

$$\frac{F'(s)}{F(s) - 1} \to \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2} \text{ quand } s \to +\infty.$$

On peut maintenant achever la démonstration du théorème dans le cas où $\lambda_c > 0$.

On sait que F vérifie (II.I) - (II.6); on a donc en particulier $F(s) \to +\infty$, $F'(s) \to -\infty$, quand $s \to -\infty$ et $F(s) \geq \eta > 0 \ \forall s \in]-\infty, +\infty[$.

Par conséquent, $F(s) > 1$ et strictement décroissante sur $]-\infty, s_o]$, et sur $[s_o, +\infty[$, on peut utiliser les 2 lemmes précédents.

1er cas : $A^2(k,n) - 4(1+k) < 0 \iff (k,n) \in R_1$

$\exists \{\tau_n\}_{n\in N}, \{\sigma_n\}_{n\in N}$ telles que :

- $F(\tau_n) =$ et $F'(\sigma_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$
- $\tau_n, \sigma_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$
- $\tau_o < \sigma_o < \tau_1 < \cdots$
- $\tau_{n+1} - \tau_n \geq C_\star > 0 \quad \forall n \in N$

D'autre part, $\{F(\sigma_{2p})\} \nearrow 1$ et $\{F(\sigma_{2p+1})\} \searrow 1$.

On a donc la représentation suivante pour F

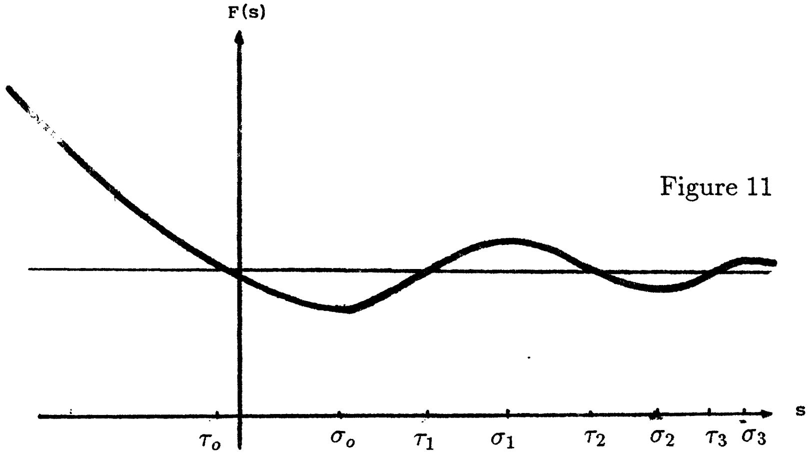

Figure 11

2ème cas : $A^2(k,n) - 4(1+k) \geq 0$ et $n \geq 2 \iff (k,n) \in R_2$

Dans la région R_2, on a en fait $n \geq N^+(k) > 2$.

On peut écrire l'équation vérifiée par F sous la forme suivante :

$$F''(s) + A(k,n)F'(s) + (1+k)\ \{F(s) - 1\} = k\ F(s) + \frac{1}{F^k(s)} - (1+k)$$

dans $]-\infty, +\infty[$.

Notons que le second membre est strictement positif pour $F(s) \neq 1$ -ce qui d'après le lemme II.3.1b est le cas $\forall s \in]-\infty, +\infty[$ sauf peut-être en 2 points-

Rappelons d'autre part que :

$$\begin{aligned} &e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}s} F(s) \to \lambda_c^{1/1+k} && \text{quand } s \to -\infty \\ &e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}}s}\left\{F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}\, F(s)\right\} \to \frac{1}{n\sqrt{\lambda_c}} && \text{quand } s \to -\infty \end{aligned}$$

Posons :

$$\alpha_1 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2},\ \alpha_2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4(1+k)}}{2}$$

$$G(s) = F'(s) + \alpha_1\{F(s) - 1\}$$

On a :

$$\begin{aligned} &\left[e^{\alpha_2 s} G(s)\right]' > 0 \qquad p.p.\ s \in]-\infty, +\infty[\\ &e^{\alpha_2 s} G(s) \to 0 \text{ quand } s \to -\infty \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} e^{\alpha 2 s} G(s) = -\,\alpha_1\, e^{\alpha^2 s} + \left(\alpha_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}\right)_s e^{\left(\alpha_2 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}\right)s}\left\{e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}s} F(s)\right\} + \\ + e^{\left[\alpha_2 - \frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}}\right]s}\left\{e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}}s}\left(F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} F(s)\right)\right\} \end{aligned}$$

Or

$$\alpha_2 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}\right)^2 - 4(1+k)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} > 0$$

car

$$\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} = \sqrt{\frac{n - 2 + \beta}{\beta}} > 1.$$

On en déduit que :

$$G(s) = F'(s) + \alpha_1\big(F(s) - 1\big) > 0 \quad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

Or

$$e^{\alpha_1 s}\big(F(s) - 1\big) = -e^{\alpha_1 s} + e^{\left(\alpha_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}\right)s}\left\{e^{\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}s} F(s)\right\} \to 0$$

quand $s \to -\infty$, car :

$$\alpha_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} - \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} - \left[\left(\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}\right)^2 - 4(1+k)\right]^{1/2}\right\} > 0.$$

Par conséquent :

$$F(s) - 1 > 0 \qquad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

Et, puisque $F''(s) + A\,F'(s) = \frac{1}{F^k(s)} - F(s)$, on a $F'(s) < 0$ sur $]-\infty, +\infty[$.

On a donc la représentation suivante pour F :

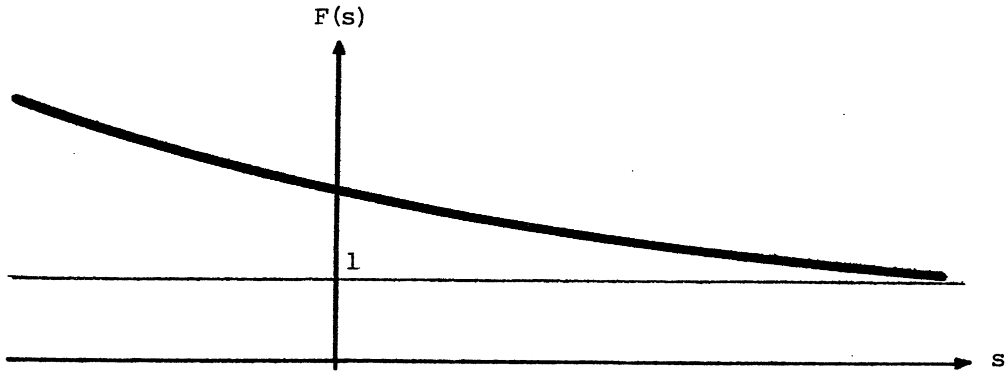

Figure 12

3ème cas : $A^2(k,n) - 4(1+k) \geq 0$ et $n \leq 2 \Leftrightarrow (k,n) \in R_3$

Dans la région R_3, on a en fait $\frac{2k}{1+k} < n \leq N^-(k) < 2$.

· Supposons que $F(s) > 1$ sur $]-\infty, +\infty[$. Avec l'équation on a :

$$\frac{d}{ds}\left\{e^{\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta}s}\left(F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}(F(s)-1)\right)\right\} = \left(\frac{1}{F^k(s)} - 1\right)e^{\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta}s} < 0$$

de plus :

$$e^{\frac{\beta-2}{\sqrt{\lambda_c}}s}\left\{F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}F(s)\right\} \to \frac{1}{n\sqrt{\lambda_c}} \text{ quand } s \to -\infty.$$

En en déduit que :

$$F'(s) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}(F(s)-1) < 0 \quad \forall s \in]-\infty, +\infty[$$

d'où

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{F'(s)}{F(s)-}\leq-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}.$$

Or ceci est impossible car, d'après le lemme II.3.1b on a :

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{F'(s)}{F(s)-1}=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-4(1+k)}}{2}$$

Et :

$$-\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}<-\frac{A+\sqrt{A^2-4(1+k)}}{2}.$$

En effet :

$$\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}-\frac{A+\sqrt{A^2-4(1+k)}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}-\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta}\right)-\left[\left(\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}+\frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta}\right)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-4(1+k)\right]^{1/2}\right\}>0$$

car :

$$\frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}}=\sqrt{\frac{\beta}{\beta+n-2}}>1 \text{ puisque } n<2 \text{ et } k>0.$$

Par conséquent, $\exists s_o\in]-\infty,+\infty[/F(s_o)=1$ et $F(s)>1$ sur $]-\infty,s_o[$.

· Pour le problème (P_o), seules les valeurs de $n\in\mathbf{N}^*$ interviennent, donc $(k,n)\in\mathbf{R}_3\Leftrightarrow n=1$ et $k\in]0,1[$.

En utilisant la remarque II.3.3 ou les résultats sur le problème à frontière libre $(P_{F.L.)})$ -cf remarque III.3.3- on peut affirmer que $F(s)<1$ sur $]s_o,+\infty[$.

On a donc la représentation suivante pour F

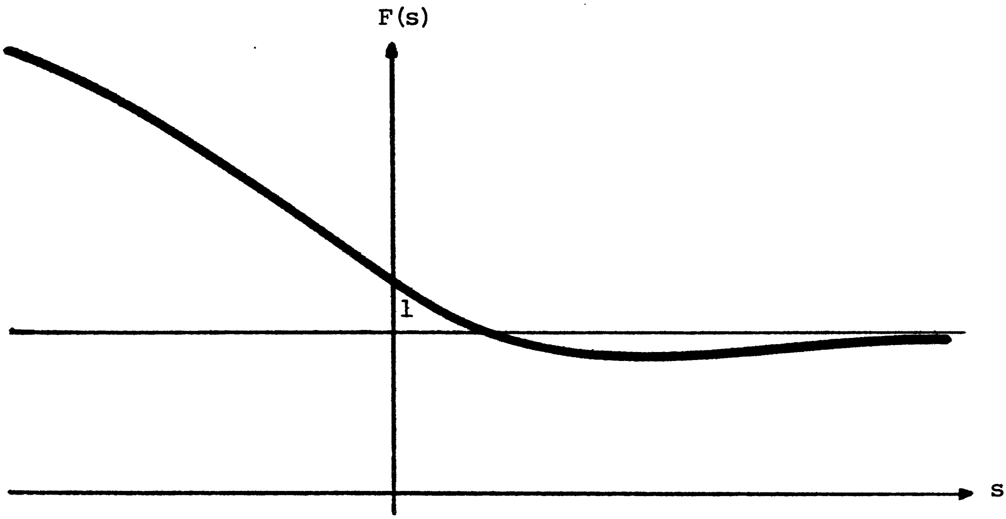

Figure 13

II.3.2.— Cas où $\lambda_c = \dfrac{2}{1+k}\left(n - \dfrac{2k}{1+k}\right) \leq 0$

Cette partie concerne la région R_4, et pour le problème (P_o), on a $n \in \mathbf{N}^*$, donc $\lambda_c \leq 0 \Leftrightarrow n = 1$ et $k \geq 1$.

Comme dans les cas précédents, on doit étudier les valeurs de la fonction $\rho \to \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}}$ avec leur multiplicité.

On pose :

$$\rho = e^s \text{ et } F(s) = \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}},\ \rho \in [0, +\infty[$$

F est l'unique solution positive du problème suivant :

$$F''(s) + \left(\beta + \frac{\lambda_c}{\beta}\right) F'(s) + \lambda_c\, F(s) = \frac{1}{F^k(s)} \text{ dans }]-\infty, +\infty[$$
$$e^{\beta s} F(s) \to 1 \text{ quand } s \to -\infty$$
$$e^{(\beta-1)s}\{F'(s) + \beta F(s)\} \to 0 \text{ quand } s \to -\infty$$

En outre, puisque $\frac{Z'(\rho)}{\rho} \to \frac{1}{n}$ quand $\rho \to 0^+$ et $\frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} \geq \frac{1+k}{2n} > 0$ on a aussi :

$$e^{(\beta-2)s}\{F'(s)+\beta F(s)\} \to \frac{1}{n} \text{ quand } s \to -\infty$$
$$F(s) \geq \frac{1+k}{2n} \quad \forall s \in]-\infty,+\infty[$$

· Notons que $F'(s)$ s'annule au plus 1 fois. En effet, supposons que $F'(s_o) = F'(s_1) = 0$, avec l'équation on a :

$$\int_{s_o}^{s_1} \left\{ \frac{1}{F^k(s)} - \lambda_c F(s) \right\} e^{-(\beta+\frac{\lambda_c}{\beta})s} ds = 0$$

Or ceci est impossible car $\lambda_c \leq 0$ et $F(s) > 0$.

· Supposons que $F'(s) \neq 0 \ \forall s \in \mathbf{R}$, alors puisque $F'(s) \to -\infty$ quand $s \to -\infty$, on a $F'(s) < 0 \ \forall s \in \mathbf{R}$ et donc $F(s) \searrow \ell > 0$ quand $s \to +\infty$.

Or ceci est impossible car avec l'équation et les conditions initiales, on a :

$$F'(s) = -\beta F(s) + \int_o^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda_c}{\beta}u}}{F^k(s-u)} du \to +\infty \text{ quand } s \to +\infty \text{ car } \frac{\lambda_c}{\beta} \leq 0$$

· Par conséquent,

$$\begin{aligned} \exists!\ s_o \in \mathbf{R}/F'(s) &< 0 \text{ sur }]-\infty, s_o[\\ F'(s_o) &= 0 \\ F'(s) &> 0 \text{ sur }]s_o,+\infty[\end{aligned}$$

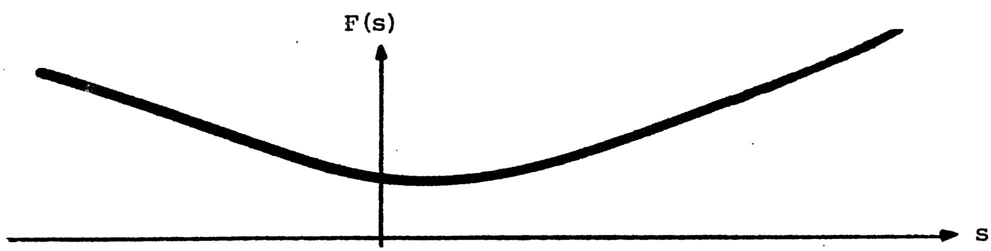

Figure 14

II.3.3. — Remarque

Pour $n = 1$ c'est-à-dire pour les régions R_3 et R_4 on peut démontrer par une autre méthode les résultats obtenus.

D'après le théorème II.1, l'arc de solutions $\big(\lambda, u(0)\big)$ est paramétré par :

$$u(0) = \frac{1}{\theta}; \lambda = \left\{ \frac{1}{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \, Z^{-1}(\theta) \right\}^2 \qquad \theta \in [1, +\infty[$$

où Z est la solution de :

$$(P_I) \begin{cases} Z''(\rho) = \dfrac{1}{Z^k(\rho)} \text{ dans }]0, +\infty[\\ Z(0) = 1 \text{ et } Z'(0) = 0 \end{cases}$$

On multiplie l'équation par Z' et on intègre sur $[0, \rho]$. Il vient :

$$\cdot \ \frac{Z'(\rho)}{\sqrt{Z^{1-k}(\rho) - 1}} = \sqrt{\frac{2}{1-k}} \Rightarrow \int_1^{Z(\rho)} \frac{dx}{\sqrt{x^{1-k} - 1}} = \sqrt{\frac{2}{1-k}}\rho \text{ si } k < 1$$

$$\cdot \ \frac{Z'(\rho)}{\sqrt{\log Z(\rho)}} = \sqrt{2} \Rightarrow \int_1^{Z(\rho)} \frac{dx}{\sqrt{\log x}} = \sqrt{2}\rho \text{ si } k = 1$$

$$\cdot \ Z'(\rho) \left(\frac{Z^{k-1}(\rho)}{Z^{k-1}(\rho) - 1} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} \Rightarrow \int_1^{Z(\rho)} \left(\frac{x^{k-1}}{x^{k-1} - 1} \right)^{1/2} dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{k-1}}\,\rho \qquad \text{si } k > 1$$

On en déduit que :

$$\cdot \ \lambda(\theta) = \frac{2(1-k)}{(1+k)^2} \left\{ \frac{1}{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \int_1^{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \left(\frac{x^a}{x^a - 1} \right)^{1/2} dx \right\}^2 \text{ si } k < 1$$

$$\text{où } a = \frac{2(1-k)}{1+k}, \qquad a \in]0, 2[$$

$$\cdot \ \lambda(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\theta} \int_1^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{\log x}} \right\}^2 \qquad \text{si } k = 1$$

$$\cdot \ \lambda(\theta) = \frac{2(k-1)}{(k+1)^2} \left\{ \frac{1}{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \int_1^{\theta^{\frac{1+k}{2}}} \frac{dx}{\sqrt{x^a - 1}} \right\}^2 \qquad \text{si } k > 1$$

$$\text{où } a = \frac{2(k-1)}{(k+1)}, \quad a \in]0, 2[$$

Dans les 3 cas on doit étudier $F(y) = \frac{1}{y}\int_1^y f(x)dx$, avec f décroissante. On a :

$$F(1) = 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } k < 1 \\ 0 \text{ si } k \geq 1 \end{cases}.$$

En effet :

$$F(y) = \frac{y-1}{y}\int_o^1 f[1+(y-1)t]dt, \quad y > 1$$

et on utilise la décroissance de f.

D'autre part :

$$\begin{aligned} F'(y) &= -\frac{1}{y^2}\int_1^y f(x)dx + \frac{f(y)}{y} = \frac{1}{y^2} \quad \left\{f(y) + \int_1^y (x-1)f'(x)dx\right\} \\ &= \frac{1}{y^2}\left\{f(y) - \int_1^y (x-1)|f'(x)|dx\right\} \quad \text{car} \quad f'(x) < 0 \end{aligned}$$

Or, $y \to f(y)$ est décroissante et $y \to \int_1^y (x-1)|f'(x)|dx$ est croissante par conséquent, $F'(y)$ est décroissante.

De plus, quand $y \to 1^+$, $f(y) \to +\infty$ et $\int_1^y (x-1)|f'(x)|dx \to 0$, donc $F'(y) \to +\infty$.

D'autre part, quand $y \to +\infty$ on a

$$f(y) \to \begin{cases} 1 \text{ si } k < 1 \\ 0 \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\int_1^y (x-1)|f'(x)|dx \to \begin{cases} \ell & \text{si } \ k < 1/3,\ \ell > 1 \\ +\infty & \text{si } \ k \geq 1/3 \end{cases}$$

Remarque. — Pour

$$\begin{aligned} O < k < 1/3, \ \int_1^\infty (x-1)|f'(x)|dx &= \frac{a}{2}\int_1^\infty \frac{(x-1)x^{a/2-1}}{(x^a-1)^{3/2}}\,dx \\ &= \int_1^\infty \frac{(t^{2/a}-1}{(t^2-1)^{3/2}}\,dt \end{aligned}$$

où :

$$a = \frac{2(1-k)}{1+k},\ a \in]1, 2[$$

Donc :

$$\int_1^\infty \frac{t^{2/a}-1}{(t^2-1)^{3/2}}\,dt < \int_1^\infty \frac{t-1}{(t^2-1)^{3/2}}\,dt = \int_0^\infty \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+1)^{3/2}} = 1$$

Par conséquent, $\exists | y_o \in]1,+\infty[$ tel que :

$$F'(y) > 0 \text{ sur }]1, y_o[$$
$$F'(y_o) = 0$$
$$F'(y) < 0 \text{ sur }]y_o, +\infty[$$

D'où : $\exists\ \theta_o > 1$ tel que $\lambda(\theta)$ est strictement croissante sur $[1,\theta_o[$ et strictement décroissante sur $]\theta_o,+\infty[$. En outre,

$$\lambda(1) = 0 \text{ et } \lim_{\theta\to+\infty} \lambda(\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \geq 1 \\ \dfrac{2(1-k)}{1+k} = \lambda_c \text{ si } k < 1 \end{cases}$$

III. Etude du problème a frontière libre $(P_{F.L})$

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions du problème à frontière libre suivant :

$$(P_{F.L}) \begin{cases} u \text{ à symétrie radiale, } u \geq 0 \text{ dans } \overline{B} \\ -\Delta u + \dfrac{\lambda}{u^k} = 0 \text{ dans } B - \overline{B}_o \\ u/\partial B = 1 \\ u/\partial B_o = \dfrac{\partial u}{\partial R}/\partial B_o = 0 \\ u \equiv 0 \text{ dans } B_o \end{cases}$$

où :

- B = boule unité de $\mathbf{R}^n$
- B_o = boule de centre 0 et de rayon R_o si $R_o > 0$ ou le point $\{0\}$.
- $k \in]0,1[$ et $\lambda \in [0,+\infty[$.

Plus précisément, pour λ fixé, on cherche le nombre de solutions classiques -c.a.d. dans $C^o(\overline{B}) \cap C^1(B) \cap C^2(B - \overline{B}_o)$- du problème $(P_{F.L})$.

Posons $R = \|X\|$ et $w(R) = u(X)$, on a u solution de $(P_{F.L})$ si et seulement si w est solution du problème suivant :

$$(Q_{F.L}) \begin{cases} w \in C^o\ ([R_o,1]) \cap C^1([R_o,1[) \cap C^2(]R_o,1[) \\ w > 0 \text{ sur }]R_o,1] \\ w''(R) + \dfrac{n-1}{R} w'(R) = \dfrac{\lambda}{w^k(R)} \text{ sur }]R_o,1[\\ w(R_o) = w'(R_o) = 0 \text{ et } w(1) = 1 \end{cases}$$

Dans un premier temps, on montre que $\forall R_o \in [0,1[$, $\exists!$ (λ, u) solution de $(P_{F.L})$ et on donne un paramétrage de l'arc de solutions (R_o, λ_{R_o}).

Ensuite, à l'aide du paramétrage précédent, on peut dénombrer les solutions pour λ fixé.

III.1. — Existence et caractérisation des solutions de $(P_{F.L})$

THÉORÈME III.1. — *$\forall R_o \in [0,1[$, $\exists!$ (λ, u) solution de $(P_{F.L})$ avec $u \in C^{1,\frac{1-k}{1+k}}(\overline{B}) \cap C^\infty(\overline{B} - \overline{B}_o)$. D'autre part, l'arc de solution (R_o, λ_{R_o}) est paramétré par :*

$$R_o = \frac{1}{\rho}\ , \ \lambda_{R_o} = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}\ \rho \in]1, +\infty]$$

où Z est l'unique solution du problème :

$$(P_I) \begin{cases} Z''(\rho) + \dfrac{n-1}{\rho}\ Z'(\rho) = \dfrac{1}{Z^k(\rho)} \ \textit{dans}\ ]1, +\infty[\\ Z(1) = Z'(1) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que si (λ, u) est solution de $(P_{F.L})$ -donc (λ, w) solution de $(Q_{F.L})$- on a nécessairement $\lambda \neq 0$. En effet, $\lambda = 0$ et $w(R_o) = w'(R_o) = 0 \Rightarrow w \equiv 0$.

1^er^ cas : $R_o = 0$

On peut remarquer que (λ_c, u_c) avec $\lambda_c = \frac{2}{1+k}\ \left(n - \frac{2k}{1+k}\right)$ et $u_c = \|X\|^{2/1+k}$ est solution de $(P_{F.L})$.

D'autre part, si (λ, u) est solution de $(P_{F.L})$ -donc (λ, w) solution de $(Q_{F.L})$ posons :

$$R = \sqrt{\frac{\lambda_c}{\lambda}} t \text{ et } w(R) = v(t)$$

on a :

$$(R) \begin{cases} v''(t) + \dfrac{n-1}{t}\ v'(t) = \dfrac{\lambda_c}{v^k(t)} \\ v(0) = v'(0) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$v\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_c}}\right) = 1$$

Or le problème (R) admet une solution unique sur $]0, +\infty[: v(t) = t^{2/1+k}$.

Supposons ceci démontré : on en déduit que $\lambda = \lambda_c$ et $w(R) = R^{2/1+k}$ et donc (λ_c, u_c) est l'unique solution de $(P_{F.L})$ pour $R_o = 0$.

Si v est solution de (R), on a :

$$\cdot v''(t) \leq \frac{\lambda_c}{v^k(t)} \Rightarrow v(t) \leq a\ t^{2/1+k},\ a = \left\{\lambda_c \frac{(1+k)^2}{2(1-k)}\right\}^{1/1+k} \geq 1$$

$$\cdot v''(t) + \frac{n-1}{t}\ v'(t) > \frac{\lambda_c}{a^k t^{\frac{2k}{1+k}}} \Rightarrow v(t) > \frac{1}{a^k}\ t^{2/1+k}$$

$$\begin{aligned} \cdot v(t) &= \lambda_c \int_o^t s^{n-1} \left(\int_o^s \frac{\rho^{n-1}}{v^k(\rho)}\ d\rho \right) ds \\ &= \lambda_c\ t^{2/1+k} \int_o^1 \int_o^1 x^{\frac{1-k}{1+k}} y^{n-1-\frac{2k}{1+k}} \left\{ \frac{(xyt)^{2/1+k}}{v(xyt)} \right\} dx\ dy \end{aligned}$$

Posons :

$$E = \left\{ \theta \in C^o(]0,+\infty[) / \frac{1}{a^k} \leq \theta(t) \leq a, \quad \forall t \in [0,+\infty[\right\}$$

$$(T\theta)(t) = \lambda_c \int_o^1 \int_o^1 x^{\frac{1-k}{1+k}} y^{n-1-\frac{2k}{1+k}} \frac{1}{\theta^k(xyt)}\ dx\ dy$$

T opère de E dans E.

T admet un unique point fixe dans E : $\theta_o(t) \equiv 1$. En effet :

$$T^{(2p)}(E) \subset \left[\frac{1}{a^{(k^{2p+1})}}, a^{(k^{2p})} \right] = \left\{ \theta \in E / \frac{1}{a^{(k^{2p+1})}} \leq \theta(t) \leq a^{k2p},\ \forall t \right\}$$

$$T^{(2p+1)}(E) \subset \left[\frac{1}{a^{(k^{2p+1})}}, a^{(k^{2p+2})} \right]$$

et $k \in]0,1[\Rightarrow a^{(k^j)}$ et $\dfrac{1}{a^{(k^j)}} \to 1$ quand $j \to \infty$.

De plus, quand $\rho \to +\infty$, $\frac{1}{\rho} \to 0$ et on verra plus loin que :

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} = \lambda_c$$

-Z solution du problème (P_I)-

$2^{\text{ième}}$ *cas* : $R_o \in]0,1[$

Supposons démontrées l'existence et l'unicité de Z solution du problème (P_I). Alors :

$\cdot\ \forall R_o \in]0,1[, \exists!\ \rho_o \in]1,+\infty[/R_o = \dfrac{1}{\rho_o}$

Posons :

$$w(R) = \frac{Z(R\rho_o)}{Z(\rho_o)} \text{ et } \lambda = \frac{\rho_o^2}{Z^{1+k}(\rho_o)}$$

(λ, w) est solution de $(Q_{F.L})$ -ceci prouve l'existence d'une solution-

$\cdot$ Réciproquement, si (λ, w) est solution de $(Q_{F.L})$, la fonction $R \to \left(\frac{1}{\lambda R_o^2}\right)^{1/1+k} w(R\ R_o)$ est solution du problème (P_I).

D'où :

$$\left(\frac{1}{\lambda R_o^2}\right)^{1/1+k} w(R\ R_o) = Z(R)$$

Or,

$$w(1) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1/R_o^2}{[Z(1/R_o)]^{1+k}} \Rightarrow w(\rho) = \frac{1}{Z(1/R_o)}\, Z\left(\frac{\rho}{R_o}\right)\ \forall \rho \in [0,1]$$

Ceci prouve l'unicité de (λ, w).

LEMME III.1.— *Le problème (P_I) admet une solution unique Z.*

$$Z \in C^{1,\frac{1-k}{1+k}}([1,+\infty[) \cap C^\infty(]1,+\infty[)$$

De plus :

$$\exists c_1, c_2 > 0/c_1(t-1)^{2/1+k} \geq Z(t) \geq c_2(t-1)^{2/1+k}$$

Démonstration.— Pour $n = 1$, $k \in]0,1[$, on connait explicitement la solution du problème (P_I) :

$$Z_{1,k}(\rho) = \left\{\frac{(1+k)^2}{2(1-k)}\right\}^{1+1+k} (\rho-1)^{2/1+k} = a(\rho-1)^{2/1+k}$$

Si Z est solution de (P_I), on a $Z(t) > 0$ sur $]1,+\infty[\Rightarrow Z'(t) > 0$ sur $]1,+\infty[$ car $Z'(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \int_a^t \frac{s^{k-1}}{Z^k(s)}\, ds$.

Par conséquent :

$$Z''(t) \leq \frac{1}{Z^k(t)} \Rightarrow Z(t) \leq Z_{1,k}(t)$$

D'où :

$$Z''(t) + \frac{n-1}{t}\, Z'(t) \geq \frac{1}{Z^k_{1,k}(t)}$$

$$Z(t) \geq \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{Z^k_{1,k}(\rho)}\, d\rho\, dx =$$

$$= \frac{Z_{1,k}(t)}{a^{1+k}} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{(t-1)xy+1}{(t-1)x+1} \right\}^{n-1} \frac{x^{\frac{1-k}{1+k}}}{y^{\frac{2k}{1+k}}}\, dx\, dy = Z_{1,k}(t)L(t)$$

On peut noter que :

$$L(1) = 1,\ L'(t) \leq 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty} L(t) = \frac{1}{a^{1+k}\lambda_c}$$

On pose :

$\cdot\ E = \left\{ v \in C^o([1,+\infty[) / L(t)Z_{1,k}(t) \leq v(t) \leq Z_{1,k}(t) \right\}$

$\cdot\ d(v_1, v_2) = \sup\limits_{[1,+\infty[} \left\{ \left| \dfrac{v_1(t) - v_2(t)}{Z_{1,k}(t)} \right| e^{-At} \right\}, A \geq 0$ déterminé plus loin

$\cdot\ (Tv)(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{v^k(\rho)} d\rho \right) ds.$

Alors, (E, d) est un espace métrique complet et $T(E) \subset E$. En effet :

$- T$ est décroissant

$- T(Z_{1,k})(t) = L(t)Z_{1,k}(t)$

$$- T(LZ_{1,k})(t) = \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{L^k(\rho)Z^k_{1,k}(\rho)}\, d\rho \right) ds$$

$$\leq \frac{1}{L^k(t)} \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}}{Z^k_{1,k}(\rho)}\, d\rho \right) ds$$

car L est décroissante. D'où encore :

$$T(LZ_{1,k})(t) \leq L^{1-k}(t)Z_{1,k}(t) \leq Z_{1,k}(t), \text{ car } L(t) \leq 1.$$

D'autre part :

$|Tv_1(t) - Tv_2(t)|$

$$\leq \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \rho^{n-1} \frac{k}{L^{1+k}(\rho)Z^{1+k}_{1,k}(\rho)} |v_1(\rho) - v_2(\rho)| d\rho \right) ds$$

$$\leq \frac{k}{L^{1+k}(t)} \left\{ \int_1^t \frac{1}{s^{n-1}} \left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1} e^{A\rho}}{Z^k_{1,k}(\rho)} d\rho \right) ds \right\} d(v_1, v_2)$$

Or :

$$\int_1^t \frac{1}{s^{n-1}}\left(\int_1^s \frac{\rho^{n-1}e^{A\rho}}{Z_{1,k}^k(\rho)}d\rho\right)ds =$$

$$= \frac{Z_{1,k}(t)}{a^{1+k}}e^{At}\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{(t-1)xy+1}{(t-1)x+1}\right\}^{n-1}\frac{x^{\frac{1-k}{1+k}}}{y^{\frac{2k}{1+k}}}\; e^{-A(t-1)(1-xy)}dx\,dy$$

$$= Z_{1,k}(t)e^{At}K(t)$$

$$\left|\frac{Tv_1(t)-Tv_2(t)}{Z_{1,k}(t)}\right| e^{-At} \leq k\frac{K(t)}{L^{1+k}(t)}\; d(v_1,v_2)$$

On peut noter que : $K(1)=1$, K est décroissante avec $\lim\limits_{t\to\infty} K(t)=0$ si $A\neq 0$, de plus, $\lim\limits_{A\to\infty} K(t)=0$, $\forall t\neq 1$.

· Si $\dfrac{k}{L^{1+k}(+\infty)}=\theta<1$, on prend $A=0 \Rightarrow K(t)\equiv 1$. On a alors :

$$d(Tv_1,Tv_2)\leq \theta\; d(v_1,v_2).$$

· Si $\dfrac{k}{L^{1+k}(+\infty)} \geq 1$, soit $\theta/k<\theta<1$, il existe $t_*>1$ tel que $\dfrac{k}{L^{1+k}(t_*)}=\theta$ (car L décroit sur $[1,+\infty[$ et $L(1)=1$).

On choisit A tel que : $\dfrac{k}{L^{1+k}(+\infty)}K(t_*)\leq\theta$. Alors :

$$-\quad \text{si } t\leq t_*, \frac{k\;K(t)}{L^{1+k}(t)} \leq \frac{k\;K(1)}{L^{1+k}(t_*)} = \frac{k}{L^{1+k}(t_*)} = \theta[\text{car } K \text{ et } L \searrow]$$

$$-\quad \text{si } t\geq t_*, \frac{k\;K(t)}{L^{1+k}(t)} \leq \frac{k\;K(t_*)}{L^{1+k}(+\infty)} \leq \theta \quad [K \text{ et } L \searrow]$$

On a alors :

$$d(Tv_1,Tv_2)\leq \theta\; d(v_1,v_2)$$

En définitive, T est une contraction stricte de (E,d) dans (E,d). Donc il existe un unique Z appartenant à E tel que $T(Z)=Z$.

Il est clair : Z est l'unique solution de (P_I) et $Z\in C^\infty\ (]1,+\infty[)$. D'autre part, puisque $Z_{1,k}(t)\geq Z(t)\geq L(t)\;Z_{1,k}(t)$, $1\geq L(t)\geq C_*>0$. On en déduit que :

$$\exists C_1,C_2>0/C_1(t-1)^{2/1+k}\geq Z(t)\geq C_2(t-1)^{2/1+k}\ \forall t\in[1,+\infty[.$$

On montre alors sans difficulté que $Z \in C^{1,\frac{1-k}{1+k}}([1,+\infty[)$, $\frac{1-k}{1+k}$ étant la meilleure constante possible.

III.2. — Principal résultat pour le problème $(P_{F,L})$

Pour $\lambda \in [0,+\infty[$, on va maintenant déterminer le nombre de solutions de $(P_{F.L})$.

D'après le théorème III.1, il suffit de "compter" les valeurs de $\rho \in]1,+\infty[$ telles que $\lambda = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$.

Autrement dit, on étudie les valeurs de $\rho \to \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)}$ -ou ce qui revient au même de la fonction $\rho \to \frac{Z(\rho)}{\rho^2/1+k}$- avec leur multiplicité.

III.2.1. — Notations

On pose :

$$\lambda_c = \frac{2}{1+k}\left(n - \frac{2k}{1+k}\right); \beta = \frac{2}{1+k}$$

$$A(k,\eta) = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_c}} + \frac{\sqrt{\lambda_c}}{\beta} = \sqrt{\frac{\beta}{n-2+\beta}} + \sqrt{\frac{n-2-\beta}{\beta}}$$

$$B(k,n) = A^2(k,n) - 4(1+k)$$

Pour (k,n) tels que $n \geq 1$ et $k \in]0,1[$, on définit les régions suivantes :

$$\cdot R_1 = \{(k,n)/B(k,n) < 0\}$$
$$= \{(k,n)/N^-(k) < n < N^+(k)\}$$

$$\cdot R_2 = \left\{(k,n)/\frac{3k-1}{\sqrt{2(1-k)}} \geq \sqrt{B(k,n)}\right\}$$
$$= \left\{(k,n)/k > 1/3 \text{ et } [1 < n \leq N^-(k)] \text{ ou } \left[N^+(k) \leq n < 2 + \frac{2}{1-k}\right]\right\}$$

$$\cdot R_3 = \left\{(k,n)/\sqrt{B(k,n)} \geq \frac{3k-1}{\sqrt{2(1-k)}}\right\}$$
$$= \{(k,n)/k \leq 1/3 \text{ et } n \geq N^+(k) \text{ ou } n \leq N^-(k)\} \cup$$
$$\left\{(k,n)/k > 1/3 \text{ et } n \geq 2 + \frac{2}{1+k} \text{ ou } n \leq 1\right\}$$

où

$$N^{\pm}(k) = \frac{6k+2}{k+1} \pm 4\sqrt{\frac{k}{1+k}}.$$

Remarque III.2. — 1°) Les résultats du théorème III.1 et du lemme III.1 sont encore valables pour $n > \frac{2k}{1+k}$ -c'est-à-dire $\lambda_c = \frac{2}{1+k}\left(n - \frac{2k}{1+k}\right) > 0$- Pour $n < 1$, on modifie la démonstration du lemme III.1.

2°) Pour $(k,n) \in \left[0,1\right[\times\left]\frac{2k}{1+k},+\infty\right[$, on peut remarquer que si n et N sont liés par la relation :

$$(R)\frac{1+k}{2} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{N-2} = 0 \quad n \neq 2$$

Alors :

$$A(k,n) = A(k,N)$$

En particulier :

$$A\big(k,N^+(k)\big) = A\big(k,N^-(k)\big)$$
$$A(k,1) = A\left(k, 2 + \frac{2}{1-k}\right)$$

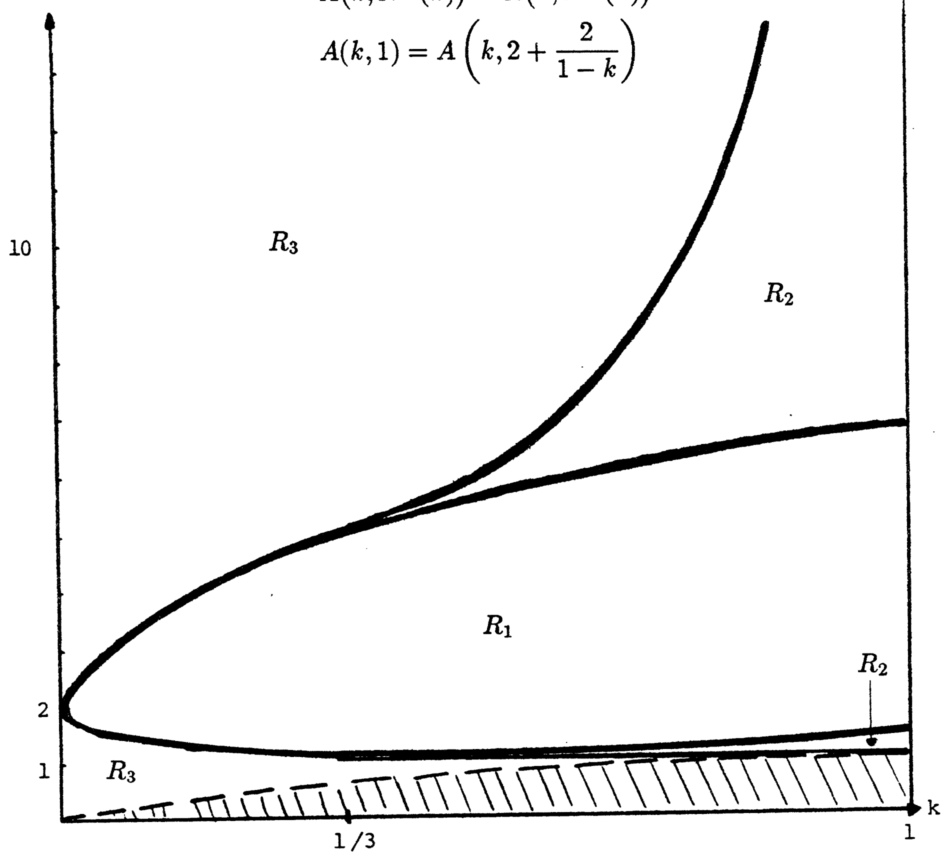

Figure 15

Pour le problème $(P_{F.L})$, on a $n \in \mathbf{R}^*$. On peut alors noter que :

$n = 1 : (k,n) \in R_3, \forall k \in]0,1[$

$n = 2 : (k,n) \in R_1, \forall k \in]0,1[$

$3 \leq n \leq 5 : (k,n) \in R_3, \forall k \in]0,k_n]$ et $(k,n) \in R_1, \forall k \in]k_n,1[$

$n = 6 : (k,n) \in R_3, \forall k \in]0,\frac{1}{2}]; (k,n) \in R_2, \forall k \in]\frac{1}{2},k_o]; (k,n) \in R_1, \forall k \in]k_o,1[$

$n \geq 7 : (k,n) \in R_3, \forall k \in]0,k_n]$ et $(k,n) \in R_2, \forall k \in]k_n,1[$

III.2.2. — Théorème

1) $(k,n) \in R_1$

$\exists \mu_*, \mu_{**}$ avec $0 < \mu_* < \lambda_c < \mu_{**}$ tels que :

- Pour $\lambda < \mu_*$, le problème $(P_{F.L})$ n'a pas de solution.
- Pour $\lambda \in [\mu_*, \mu_{**}]$, $\lambda \neq \lambda_c$, le problème $(P_{F.L})$ admet un nombre fini de solutions.

Ce nombre augmente lorsque $\lambda \to \lambda_c$ [Une solution unique pour μ_*, deux solutions pour μ_{**}]

- Pour $\lambda = \lambda_c$, $(P_{F.L}$ admet une infinité dénombrable de solutions.
- Pour $\lambda \in]\mu_{**}, +\infty[$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.

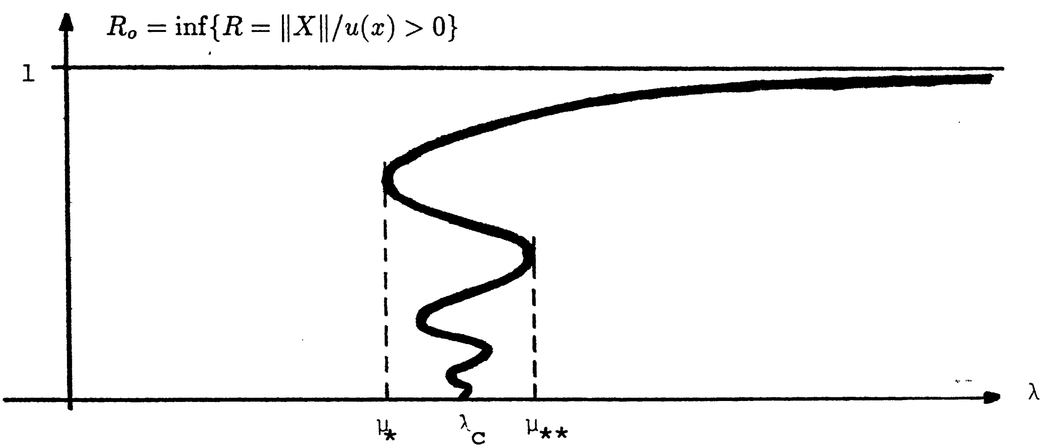

Figure 16

2) $(k,n) \in R_2$

$\exists \mu_* / 0 < \mu_* < \lambda_c$ tel que :

- Pour $\lambda < \mu_*$, $(P_{F.L})$ n'a pas de solution.
- Pour $\lambda = \mu_*$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.
- Pour $\lambda \in]\mu_*, \lambda_c]$, $(P_{F.L})$ a deux solutions.
- Pour $\lambda \in]\lambda_c, +\infty[$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.

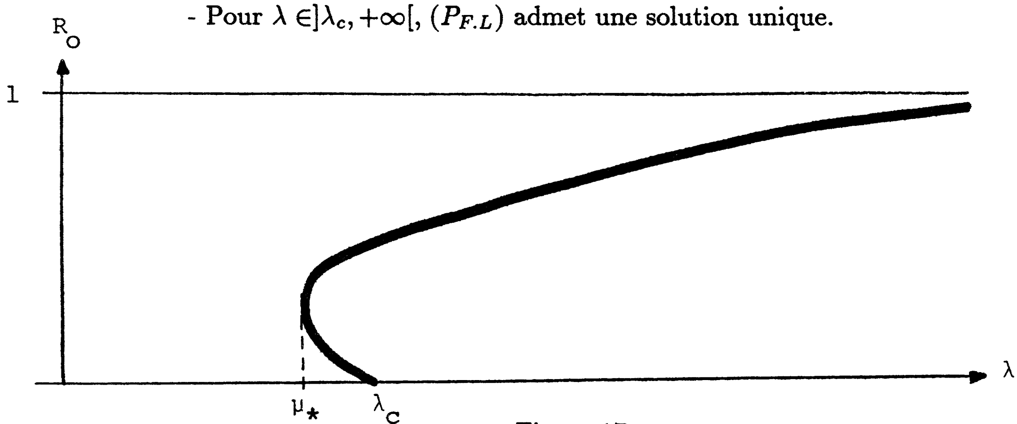

Figure 17

3) $(k,n) \in R_3$

- Pour $\lambda < \lambda_c$, $(P_{F.L})$ n'a pas de solution.
- Pour $\lambda \geq \lambda_c$, $(P_{F.L})$ admet une solution unique.

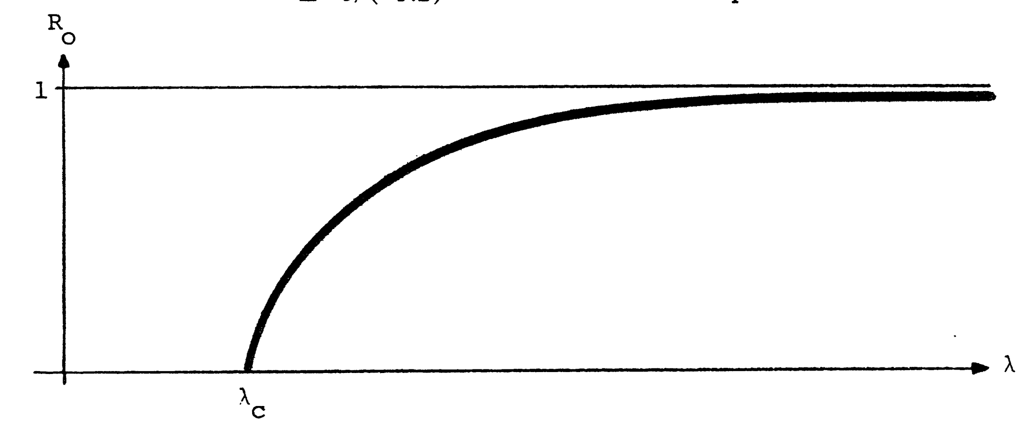

Figure 18

III.3. — Démonstration du Théorème III.2

On pose :

$$\rho = e^{s/\sqrt{\lambda_c}} \text{ et } \frac{Z(\rho)}{\rho^{2/1+k}} = \lambda_c^{-1/1+k} F(s)$$
$$\rho \in [1,+\infty[, \; s \in [0,+\infty[$$

Notons que :

$$\lambda(\rho) = \frac{\rho^2}{Z^{1+k}(\rho)} = \frac{\lambda_c}{F^{1+k}(s)}$$

On étudie les valeurs de F avec leur multiplicité. F est l'unique solution positive du problème suivant :

$$F''(s) + A(k,n)F'(s) + F(s) - \frac{1}{F^k(s)} = 0 \text{ sur }]0,+\infty[\qquad (III.1)$$

$$F'(0) = 0 \qquad (III.2)$$

$$F(0) = 0 \qquad (III.3)$$

D'autre part, d'après le lemme III.1, on a :

$$\exists c_1, c_2 > 0 / c_1(\rho-1)^{2/1+k} \geq Z(\rho) \geq c_2(\rho-1)^{2/1+k}, \; \forall \rho \in [1,+\infty[$$

D'où :

$$\exists D_1, D_2 > 0 / D_1(1-e^{-s/\sqrt{\lambda_c}})^{2/1+k} \geq F(s) \geq D_2(1-e^{-s/\sqrt{\lambda_c}})^{2/1+k}$$
$$\forall s \in [0,+\infty[\qquad (III.4)$$

De (III.4), on tire en particulier : $F(s) \geq \eta > 0$ pour $s \geq s_o > 0$. On peut alors utiliser les lemmes II.3.1a et II.3.1b du paragraphe II. On sait donc que :

- $\lim_{s\to\infty} F(s) = 1$ et $\lim_{s\to\infty} F'(s) = 0$.

- Si $B(k,n) = A^2(k,n) - 4(1+k) < 0$, c'est-à-dire si $(k,n) \in R_1$, $\{F(s)-1\}$, $F'(s)$ s'annulent une infinité dénombrable de fois : les zéros de $(F-1)$ et F' alternent.

De plus, si $\{t_n\}/F(t_n) = 1$, on a : $t_n \nearrow +\infty$ et il existe $c > 0$ tel que $t_{n+1} - t_n) > c$, $\forall n$.

- Si $B(k,n) > 0$, $(F-1)$ s'annule au plus une fois sur $[0,+\infty[$ et $\frac{dF'}{dF} \to \frac{-A\pm\sqrt{A^2-4(1+k)}}{2}$ quand $s \to +\infty$.

On pose :

$$x = F(s) \text{ et } y = F'(s)$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{ds} = y \\
&\frac{dy}{ds} = -Ay + (x^{-k} - x) \\
&x(0) = y(0) = 0
\end{aligned}$$

· Si $F(s) \neq 1, \forall s \in [0, +\infty[$ on a $F'(s) > 0$ sur $]0, +\infty[$; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
&y(x)y'(x) + Ay(x) = x^{-k} - x \text{ sur }]0,1[\\
&y(0) = 0, \; y(1) = 0 \\
&y(x) > 0 \text{ sur }]0, > [
\end{aligned}$$

· Si $\exists s_o \in]0, +\infty[/F(s_o) = 1$, alors $\exists s_* > s_o$ tel que : $F'(s) > 0$ sur $]0, s_*[$; $F'(s_x) = 0$; $F'(s) < 0$ sur $]s_*, +\infty[$ et $F(s_*) > 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
&y(x)y'(x) + Ay(x) = (x^{-k} - x) \text{ sur }]0, x_*[, x_* = F(s_*) > 1 \\
&y(0) = y(x_*) = 0 \\
&y(x) > 0 \text{ sur }]0, x_*[
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
&y(x)y'(x) + Ay(x) = (x^{-k} - x) \text{ sur }]1, x_*[\\
&y(x_*) = y(1) = 0 \\
&y(x) < 0 \text{ sur }]1, x_*[
\end{aligned}$$

On utilise le lemme suivant :

LEMME III.3.— *1) Le problème*

$$(R_A) \begin{cases} \theta\theta' + A\theta = x^{-k} - x \;\; dans \;]0, \ell[\\ \theta(0) = 0 \\ \theta(x) > 0 \;\; dans \;]0, \ell[\end{cases} , \qquad A > 0$$

admet au plus une solution.

2) Si

$$\begin{cases} \theta\theta' + A\theta = f \;\; dans \;]0, \ell[\\ \theta(0) = 0 \\ \theta(x) > 0 \;\; sur \;]0, \ell[\end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \eta\eta' + B\eta = g \\ \eta(0) = 0 \\ \eta(x) > 0 \;\; sur \;]0, \ell[\end{cases}$$

Avec

$$\frac{f(x)}{A^2} \geq \frac{g(x)}{B^2} \ dans\ ]0,\ell[,$$

alors :

$$\frac{\theta(x)}{A} \geq \frac{\eta(x)}{B} \ dans\ [0,\ell]$$

Démonstration.— 1) Supposons que θ_1 et θ_2 soient 2 solutions de (R_A). Posons $v = \theta_1^2 - \theta_2^2$. On a :

$$\begin{aligned} &v'(x) = 2A(\theta_1 - \theta_2)(x) = 0 \text{ dans }]0,\ell[\\ &v(0) = 0 \end{aligned}$$

On multiplie l'équation par v. Il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{dv^2}{dx}(x) + 4A(\theta_1 + \theta_2)v^2(x) = 0 \text{ dans }]0,\ell[\\ &v^2(0) = 0 \end{aligned}$$

Or, $\theta_1 \geq 0$ et $\theta_2 \geq 0$, donc :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv^2}{dx} < 0 \\ v^2(0) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v^2(x) \equiv 0 \text{ sur } [0,\ell]$$

2) Posons $v = \left(\frac{\theta}{A}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{B}\right)^2$. On a :

$$\begin{aligned} &v'(x) + 2\left(\frac{\theta(x)}{A} - \frac{\eta(x)}{B}\right) = 2\left(\frac{f(x)}{A^2} - \frac{g(x)}{B^2}\right) \text{ sur }]0,\ell[\\ &v(0) = 0 \end{aligned}$$

On multiplie l'équation par $v^-(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \cdot\ 2\left(\frac{\theta(x)}{A} - \frac{n(x)}{B}\right)v^-(x) &= -2\left(\frac{\theta(x)}{A} + \frac{\eta(x)}{B}\right)\left\{\left(\frac{\theta(x)}{A} - \frac{\eta(x)}{B}\right)^-\right\}^2 \\ &= -w(x) \end{aligned}$$

$$\cdot\ 2\left(\frac{f(x)}{A^2} - \frac{g(x)}{B^2}\right)v^-(x) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$v'(x)v^-(x) \geq w(x), w(x) \geq 0 \text{ et } w(x) > 0 \text{ si } v^-(x) > 0 \text{ et } v(0) = 0$$

Par conséquent

$$v^- \equiv 0 \text{ et } v(x) \geq 0, \forall x \in [0, \ell] \Rightarrow \frac{\theta(x)}{A} \geq \frac{\eta(x)}{B} \; \forall x \in [0, \ell]$$

On peut maintenant achever la démonstration du théorème.

On considère le problème :

$$\begin{aligned} & y_{n,k}(x)y'_{n,k}(x) + A(k,n)y_{n,k}(x) = x^{-k} - x \text{ dans }]0,1[\\ & y_{n,k}(0) = 0 \qquad\qquad (P_{nk}) \\ & y_{n,k}(x) > 0 \text{ sur }]0,1[\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, $k \in]0,1[$, on connait explicitement la solution de (P_{1k}). On a :

$$y_{1,k}(x) = \sqrt{\frac{2}{1-k}}\left(x^{\frac{1-k}{2}} - k\right)$$

Par suite, $y_{1,k}(1) = 0$.

1^er^ cas : $(k,n) \in R_2$

$$\begin{aligned} R_2 &= \left\{(k,n)/k > 1/3 \text{ et } \left[1 < n \leq N^-(k)\right] \text{ ou } N^+(k) \leq 2 < 2 + \frac{2}{1-k}\right\} \\ &= \left\{(k,n)/k > 1/3 \text{ et } 4(1+k) \leq A^2(k,n) < \frac{(3-k)^2}{2(1-k)} = A^2(k,1)\right\} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{x^{-k} - x}{A^2(k,n)} \geq \frac{x^{-k} - x}{A^2(k,1)} \quad \forall x \in]0,1[$$

Avec le lemme III.1, on peut donc affirmer que :

$$\frac{y_{n,k}(x)}{A(k,n)} \geq \frac{y_{1,k}(x)}{A(k,1)} \quad \forall x \in [0,1] \qquad (*)$$

Supposons que $y_{n,k}(1) = 0$. Avec (*) on a :

$$\frac{1}{A(k,n)}\frac{y_{n,k}(x) - y_{n,k}(1)}{x-1} \leq \frac{1}{A(k,1)}\frac{y_{1,k}(x) - y_{1,k}(1)}{x-1} \; \forall x \in [0,1[$$

d'où :

$$y'_{n,k}(1) \leq \frac{A(k,n)}{A(k,1)} y'_{1,k}(1) = -A(k,n)\left(\frac{1+k}{3-k}\right)$$

Or ceci est impossible car d'après le lemme II.3.1b, on a :

$$\lim_{s\to\infty} \frac{dF'}{dF} = y'_{n,k}(1) = \frac{A(k,n) \pm \sqrt{A^2(k,n) - 4(1+k)}}{2}$$

Et :

$$\frac{A(k,n) + \sqrt{A^2(k,n) - 4(1+k)}}{2} < \left(\frac{1+k}{3-k}\right) A(k,n)$$

En effet, cette inégalité est équivalente à :

$$\sqrt{A^2(k,n) - 4(1+k)} < \left(\frac{3k-1}{3-k}\right) A(k,n)$$

Et, puisque dans R_2, $k > 1/3$ ceci équivaut à :

$$A^2(k,n) < \frac{(3-k)^2}{2(1-k)}$$

Cette dernière égalité est bien vérifiée dans R^2.

En conclusion, $y_{n,k}(1) > 0$ et en revenant à la fonction $F_{n,k}(s)$, on peut en déduire : $\exists s_o \in]0, +\infty[/ F_{n,k}(s_o) = 1$.

$2^{\text{ième}}$ *cas* : $(k,n) \in R_3$

$$R_3 = \{(k,n)/k \leq 1/3 \text{ et } ([n \geq N^+(k)] \text{ ou } [n \leq N^-(k)])\} \cup \left\{(k,n)/k > 1/3 \text{ et } \left(\left[n \geq 2 + \frac{2}{1-k}\right] \text{ ou } [n \leq 1]\right)\right\}$$

On peut encore décrire R_3 de la manière suivante :

$$R_3 = R_3^1 \cup R_3^2$$
$$R_3^1 = \{(k,n)/A(k,1) \leq A(k,n)\}$$
$$R_3^2 = \{(k,n)/k \leq 1/3 \text{ et } 4(1+k) \leq A^2(k,n) < A^2(k,1)\}$$

· Dans R_3^1,

$$\frac{x^{-k} - x}{A^2(k,1)} \geq \frac{x^{-k} - x}{A^2(k,n)} \; \forall x \in]0,1[.$$

Avec le lemme III.1 on a :

$$\frac{y_{1,k}(x)}{A(k,1)} \geq \frac{y_{n,k}(x)}{A(k,n)}$$

D'où :

$$y_{n,k}(1) = 0.$$

· Dans R_3^2,

$$\frac{x^{-1/3} - x}{A(1/3,1)} \geq \frac{x^{-k} - x}{A(k,n)} \ \forall x \in]0,1[.$$

En effet :

$$\cdot\, g(x) = \frac{x^{-1/3} - x}{x^{-k} - x} \geq \frac{4}{3(1+k)} - \text{ car } g \text{ décroit sur }]0,1[-$$

$$\cdot\, \frac{A^2(1/3,1)}{A^2(k,n)} = \frac{16/3}{A^2(k,n)} \leq \frac{4}{3(1+k)} - \text{ car } A^2(k,n) \geq 4(1+k)-$$

Avec le lemme III.1, on a :

$$\frac{y_{1,1/3}(x)}{A(1/3,1)} \geq \frac{y_{n,k}(x)}{A(k,n)}$$

D'où : $y_{n,k}(1) = 0$. En conclusion, en revenant à la fonction $F_{n,k}(s)$, on peut en déduire que : $F_{n,k}(s) < 1 \ \forall s \in [0,+\infty[$.

Remarque III.3.3. — · En modifiant quelque peu la démonstration du lemme III.3, on montre sans difficulté que :

$$\text{si } \begin{cases} \theta\theta' + A\theta = f \text{ dans }]x_o,\ell[\\ \theta(x_o) = \theta_o \\ \theta(x) > 0 \text{ sur }]x_o,\ell[\end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} \eta\eta' + B\eta = g \text{ dans }]x_o,\ell[\\ \eta(x_o) = \eta_o \\ \eta(x) > 0 \text{ sur }]x_o,\ell[\end{cases}$$

Avec :

$$\frac{f(x)}{A^2} \geq \frac{g(x)}{B^2} \text{ dans }]x_o,\ell[\text{ et } \frac{\theta_o}{A} \geq \frac{\eta_o}{B}.$$

Alors :

$$\frac{\theta(x)}{A} \geq \frac{\eta(x)}{B} \text{ sur } [x_o,\ell].$$

· D'autre part, les valeurs propres des problèmes $(P_{F.L})$ et (P_o) sont paramétrées par :

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{F^{1+k}(s)} \ s \in]0,+\infty[\text{ pour } (P_{F.L})$$

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{G^{1+k}}(s) \ s \in]-\infty,+\infty[\text{ pour } (P_o)$$

F et G sont solutions de la même équation différentielle (autonome) :

$$H'' + AH' + H - \frac{1}{H^k} = 0.$$

Seules les conditions initiales changent.

Dans le cas particulier où $n = 1$ et $k \in]0,1[$, on sait que $\exists s_o / G(s) > 1$ pour $s \in]-\infty, s_o[$ et $G(s_o) = 1$; on en déduit $\exists s_1 / G'(s_1) = 0$ et $0 < G(s_1) < 1$. On sait aussi que $F(s) < 1 \ \forall s \in [0, +\infty[$.

En se plaçant dans le plan de phase et en utilisant le résultat énoncé ci-dessus, on en déduit que : $G(s) < 1$, $\forall s \in]s_o, +\infty[$.

Références

[1] ARIS (R.). — *The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts.* — Clarendon Press, Oxford, 1975.

[2] KERNEVEZ (J.P.), THOMAS (D.). — Numerical analysis and control of some bischemical systems, *Appl. Math. and Opt.*, t. **1, n°3**, 1975.

[3] BRAUNER, NICOLAENKO . — *On nonlinear eigenvalue problem which extend into free boundaries problems.* — Lect. notes in Math 782, Springer Verlag 1981.

[4] BRAUNER, NICOLAENKO . — Free boundary value problems as singular limits of nonlinear eigenvalue problems.

[5] BRAUNER, NICOLAENKO . — Sur une classe de problèmes elliptiques non-linéaires, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. **286, série A**, 1978, p. 1007-1010.

[6] BRAUNER, NICOLAENKO . — *Sur des problèmes aux valeurs propres non-linéaires qui se prolongent en problèmes à frontière libre*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, **287**, p. 1105-1108, 1978, **288**, p. 125-127 1979.

[7] PHILIPPS (D.). — A minimization problem and the regularity of solution in the presence of a free boundary, *Ind. Univ. Math. J.*, t. **32**, 1983, p. 1617.

[8] CIMATTI (G.). — Existence results for a nonlinear elliptic boundary value problem relevant in theory of high vacunm electron tubes, *Ren. di. Mat. Universita di Parma*, t. **4**, 1982, p. 665-677.

[9] KAWARADA H.. — On solutions of initial-boundary problem for $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$, *Publ. Rims, Kyoto Univ.*, t. **10**, 1975, p. 729-736.

[10] LACEY (A.A.), WAKE (G.C.). — Thermal ignition with variable thermal conductiviy, *I.M.A. Journal of Applied Mathematics*, t. **28**, 1982, p. 23-29.

[11] GIDAS (B.), NI (W.), NIRENBERG (L.). — Symmetry and related proprierties via the maximum principle, *Com. Math. Phys.*, t. **68**, 1979, p. 209-243.

[12] DE LA PRADA (J.M.). — *Technicas de perturbations en la teoria de reactores cataliticos.* — Tesis : Escuela tecnica superior de ingenieros aeronauticos. Universidad politecnica de Madrid, 1977.

[13] DIAZ (J.I.). — Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Volume I : Elliptic equations.

[14] REID (W.T.). — Sturmian theory for ordinary differential equations—Appl. Math., Sc. **31**, Springer Verlag.

[15] PONTRIAGUINE (L.). — Equations differentielles ordinaires—Editions de Moscou.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1986)