ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

LOUISE BARTHÉLEMY

Problème d'obstacle pour une équation quasi-linéaire du premier ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 9, nº 2 (1988), p. 137-159

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_2_137_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol. IX, n°2, 1988

Problème d'obstacle pour une équation quasi-linéaire du premier ordre

LOUISE BARTHÉLEMY[1]

RÉSUMÉ. — Etant donné φ une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^N$ et ψ un obstacle mesurable quelconque, on étudie le problème

$$\operatorname{div} \varphi(u) \leq f(.,u)\ ,\ u \leq \psi$$

où une solution de ce problème est sous-solution au sens de Kruskov de l'équation $\operatorname{div} \psi(u) = f(.,u)$ sur $\mathbf{R}^N$. Nous montrons, sous des hypothèses convenables sur f, que si ce problème admet une solution, alors il admet une solution maximum. D'une manière analogue, nous montrons l'existence d'une solution maximum pour le problème d'évolution associé

$$\partial u/\partial t + \operatorname{div} \varphi(u) \leq f(.,u)\ ,\ u \leq \psi\ ,\ u(0,.) \leq u_o$$

ABSTRACT. — Let φ be a continuous map from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}^N$ and ψ be any measurable obstacle. We study the problem

$$\operatorname{div} \varphi(u) \leq f(.,u)\ ,\ u \leq \psi$$

where a solution of this problem is understood as a subsolution in the Kruskov sense of $\operatorname{div} \varphi(u) \leq f(.,u)$ on $\mathbf{R}^N$. We show, under some assumptions on f, that, if it has one, this problem has a largest solution. In the same way, we show existence of a largest solution for the associated evolution problem

$$\partial u/\partial t + \operatorname{div} \varphi(u) \leq f(.,u)\ ,\ u \leq \psi\ ,\ u(0,.) \leq u_o$$

Dans cet article nous étudions le problème d'obstacle

$$\operatorname{div} \varphi(u) \leq f(.,u) \quad u \leq \psi \quad \text{sur } \mathbf{R}^N \tag{1}$$

[1] Equipe de Mathématiques de Besançon, C.N.R.S. U.A. 0741. Université de Franche-Comté, 25030 Besançon Cédex

où φ est une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^N$ et ψ est un obstacle mesurable quelconque. La fonction u vérifiant (1) est une sous-solution de l'équation $\operatorname{div}\varphi(u) = f(.,u)$ au sens de Kruskov sur $\mathbf{R}^N$ (cf [5]); plus précisément : par définition, $\operatorname{div}\varphi(u) \leq v$ au sens de Kruskov sur $\mathbf{R}^N$ si

$$\operatorname{div}\big[sgn_o^+(u-k)\big(\varphi(u)-\varphi(k)\big)\big] \leq sgn_o^+(u-k)v \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$
$$\text{pour tout } k \in \mathbf{R}.$$

Dans le cas où $\psi = 0$ les résultats obtenus par J.I. DIAZ et L. VERON dans [4] donnent l'existence de la solution maximum dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ de (1) lorsque $f(.,u) = f - u$ avec $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$; c'est l'unique solution de $\operatorname{div}\varphi(u) + \beta(u) \ni f - u$ où β est le graphe maximal monotone défini par $D(\beta) = \mathbf{R}^-$, $\beta(r) = 0$ sur $\{r < 0\}$, $\beta(0) = \mathbf{R}^+$.

Pour étudier le problème (1) nous utilisons la théorie des opérateurs sous-potentiels non-linéaires développée dans [1]. Nous considérons l'opérateur A de $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ associé au problème $\operatorname{div}\varphi(u) = v$ au sens de Kruskov sur $\mathbf{R}^N$. En utilisant le fait que, sous une bonne hypothèse sur φ, A admet des résolvantes partout définies et croissantes sur $L^\infty(\mathbf{R}^N)$, nous montrons simplement sous des hypothèses convenables sur ψ et f l'existence de la solution maximum de (1).

Dans le cas particulier où $f(.,u) = f - u$ nous montrons que la solution maximum de (1) existe pour tout f de $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et est la limite de la solution du problème pénalisé

$$u_\epsilon + \operatorname{div}\varphi(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - \psi)^+ = f \text{ au sens de Kruskov sur } \mathbf{R}^N$$

En suivant une démarche analogue, nous étudions le problème d'évolution associé à (1)

$$\frac{du}{dt} + \operatorname{div}\varphi(u) \leq f(.,u),\ \ u \leq \psi \text{ sur }]0,T[\times\mathbf{R}^N,\ \ u(0,.) \leq u_o \text{ sur } \mathbf{R}^N \quad (2)$$

la première inégalité ayant le sens de Kruskov sur $]0,T[\times\mathbf{R}^N$.

Dans la section I nous précisons le cadre de notre travail et les hypothèses; nous donnons les définitions et rappelons les résultats utilisés. Enfin nous donnons les résultats obtenus pour les problèmes stationnaires et d'évolution. Les sections II et III sont consacrées aux démonstrations.

I - Position du problème. Enoncé des résultats

1. — Préliminaires : définitions, notations, hypothèses.

Ω étant un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et φ une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^p$, nous rappelons (cf [5], [2], [4]) les

DÉFINITIONS 1. — *Soit $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, u est sous-solution (resp. sur-solution, solution) au sens de Kruskov de* $\operatorname{div}\varphi(u) = v$ *sur Ω, noté* $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v$ *(resp. $\geq v$, $= v$) sur Ω(1) si $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega \alpha\big[(\varphi(u) - \varphi(k)).\xi_x + v\xi\big]dx \geq 0 \text{ pour tous } \xi \in \mathcal{D}^+(\Omega) \text{ et } k \in \mathbf{R} \quad (3)$$

où $\alpha = sgn_o^+(u-k)$ (resp. $sgn_o^-(u-k)$, $sgn_o(u-k)$), avec pour $r \in \mathbf{R}$

$$sgn_o\ r = \begin{cases} -1 & si\ r < 0 \\ 0 & si\ r = 0, \\ +1 & si\ r > 0 \end{cases} sgn_o^+ r = \sup(sgn_o\ r, 0), sgn_o^-\ r = -sgn_o^+(-r)$$

et $\xi_x = \operatorname{grad}\xi$.

Nous utiliserons les

Remarques 1. — On a facilement (cf. [2])

i) $\operatorname{div}_K\ \varphi(u) \leq v$ (resp. $\geq v$, $= v$) sur $\Omega \Longrightarrow \operatorname{div}\varphi(u) \leq v$ (resp. $\geq v$, $= v$) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

ii) $\operatorname{div}_K \varphi(u) = v$ sur $\Omega \Longleftrightarrow \operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v$ (resp. $\geq v$) sur Ω et $\operatorname{div}\varphi(u) = v$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

iii) Si $u_n \to u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\{u_n\}$ bornée dans $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$, $v_n \to v$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et pour tout n, $\operatorname{div}_K \varphi(u_n) \leq v_n$ (resp. $\geq v_n$, $= v_n$) sur Ω, alors $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v$ (resp. $\geq v$, $= v$) sur Ω.

Rappelons le résultat de Kruskov (cf [5], [2]),

LEMME 1. — *Soient $u, \widehat{u} \in L^\infty_{loc}(\Omega) v$, $\widehat{v} \in L'_{loc}(\Omega)$ tels que* $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v$ *et* $\operatorname{div}_K \varphi(\widehat{u}) \geq \widehat{v}$ *sur Ω alors, pour tout $\xi \in \mathcal{D}^+(\Omega)$, il existe $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\alpha(x) \in sgn^+\big(u(x) - \widehat{u}(x)\big)$ p.p. $x \in \Omega$ et*

$$\int_\Omega \alpha\big[(\varphi(u) - \varphi(\widehat{u})).\xi_x + (v - \widehat{v})\xi\big]dx \geq 0 \quad (4)$$

(1) Ce sont les notations de [3]

où pour $r \in \mathbf{R}$

$$sgn^+ r = \begin{cases} 0 & si \;\; r < 0 \\ [0,1] & si \;\; r = 0 \\ 1 & si \;\; r > 0 \end{cases}$$

Etant donnée φ une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^N$, nous nous intéressons au problème stationnaire avec obstacle

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \quad \operatorname{div}_K \varphi(u) \leq f(.,u) \quad u \leq \psi \text{ sur } \mathbf{R}^N \tag{5}$$

ainsi qu'au problème d'évolution qui lui est associé. D'après la remarque 1, pour $(u,v) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\mathbf{R}^N) \times L^1_{\mathrm{loc}}(]0,T[\times\mathbf{R}^N)$

$$\operatorname{div}_K \big(u, \varphi(u)\big) \leq v \text{ sur }]0,T[\times\mathbf{R}^N \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x \varphi(u) \leq v \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbf{R}^N).$$

Nous écrivons donc le problème d'évolution sous la forme

$$u \in L^\infty(]0,T[\times\mathbf{R}^N),\ \operatorname{div}_K \big(u,\varphi(u)\big) \leq f(.,u),\ u \leq \psi \ \text{ sur }]0,T[\times\mathbf{R}^N \tag{6}$$

Comme nous n'imposons aucune condition sur le comportement de u pour $|x| \to \infty$, nous serons amenés à faire l'hypothèse sur φ pour $N \geq 2$.

Pour tout $r > 0$, il existe $k > 0$ tel que

$$\big|\varphi(r_1) - \varphi(r_2)\big| \leq k\big|r_1 - r_2\big|^{(N-1)/N} \ \forall r_1, r_2 \in [-r, r] \tag{7}$$

Enfin nous considèrerons des applications $f : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (Ω ouvert de $\mathbf{R}^p$) vérifiant :

$$\begin{cases} (i) & f \text{ est Carathéodory sur } \Omega \times \mathbf{R} \\ (ii) & f(.,r) \in L^\infty(\Omega)\ \forall r \in \mathbf{R} \\ (iii) & \text{il existe } \omega \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) \text{ telle que } \frac{\partial f}{\partial r} \geq -\omega \end{cases} \tag{8}$$

2.— Problème stationnaire sur $\mathbf{R}^N$. Enoncé de résultats.

Nous donnons tout d'abord un résultat d'unicité, qui sera obtenu à partir du lemme 1 de Kruskov, et d'existence prolongeant à $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ celui obtenu dans [2].

LEMME 2.— *Soit* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ *continue vérifiant (7).*

(i) Si $u, \widehat{u} \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f, \widehat{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ *vérifient* $\mathrm{div}_K\, \varphi(u) \leq f - u$ *et* $\mathrm{div}_K\, \varphi(\widehat{u}) \geq \widehat{f} - \widehat{u}$ *sur* $\mathbf{R}^N$*, alors*

$$\int (u - \widehat{u})^+ dx \leq \int_{u \geq \widehat{u}} (f - \widehat{f})^+ dx \ (\dagger) \tag{9}$$

et

$$u \leq supess f, \ \widehat{u} \geq infess \widehat{f} \tag{10}$$

(ii) Pour tout $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *il existe une solution (unique) de*

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}^N), \mathrm{div}_K \ \ \varphi(u) = f - u \ sur \ \mathbf{R}^N \tag{11}$$

Enonçons maintenant le résultat principal :

THÉORÈME 1.— *Soient* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ *continue vérifiant (7) et* $f : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *vérifiant (8) (avec* $\Omega = \mathbf{R}^N$*). Soit* $\{u_i, i \in I\} \subset L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *majoré dans* $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *et tel que pour tout* $i \in I$

$$\mathrm{div}_K \ \ \varphi(u_i) \leq f(., u_i) \ sur \ \mathbf{R}^N \tag{12}$$

alors

$$\mathrm{div}_K \ \ \varphi(\sup_i u_i) \leq f(., \sup_i u_i) \ sur \ \mathbf{R}^N.$$

Nous avons le corollaire immédiat suivant :

COROLLAIRE .— *Soient* $\varphi_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ *continue vérifiant (7),* $f_i : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *vérifiant (8) pour tout* $i \in I$ *et* $M : L^\infty(\mathbf{R}^N) \to L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *croissante. Soit*

$$U = \big\{u \in L^\infty(\mathbf{R}^N); \mathrm{div}_K \ \ \varphi_i(u) \leq f_i(., u) \ sur \ \mathbf{R}^N \ \forall i \in I, \\ u \leq Mu \ sur \ \mathbf{R}^N\big\}.$$

Alors si U *est non vide et majoré,* U *admet un élément maximum.*

Nous allons maintenant considérer le cas particulier où M est définie par $Mu = u \wedge \psi$ où ψ est une application mesurable de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\psi^- \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et où $f(., r) = (1/\lambda)(f - r)$ avec $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $\lambda > 0$. Nous avons le

---

($\dagger$) pour $u : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ mesurable, $u^+ = \sup(u, 0) = u \vee 0$, $u^- = (-u)^+ = -\inf(u, 0) = -(u \wedge 0)$

THÉORÈME 2. — *Soient $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ continue vérifiant (7) et $\psi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ mesurable avec $\psi^- \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$.*

(i) Pour tout $\lambda > 0$ et $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ il existe une solution maximum de

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}^N),\ \operatorname{div}_K\ \varphi(u) \leq \frac{f-u}{\lambda}\ \textit{sur}\ \mathbf{R}^N,\ u \leq \psi\ \textit{sur}\ \mathbf{R}^N \tag{13}$$

On note $J_\lambda^\psi f$ cette solution

(ii) Pour tout $\lambda > 0$, $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $\epsilon > 0$ il existe une unique solution de

$$u_\epsilon \in L^\infty(\mathbf{R}^N),\ \operatorname{div}_K\ \varphi(u_\epsilon) = \frac{f-u_\epsilon}{\lambda} - \frac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - \psi)^+\ \textit{sur}\ \mathbf{R}^N \tag{14}$$

On note $J_\lambda^\epsilon f$ cette solution

(iii) Pour tout $\lambda > 0$, $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $J_\lambda^\epsilon f \downarrow J_\lambda^\psi f$(1) lorsque $\epsilon \downarrow 0$.

(iv) Pour tout $\lambda, \mu > 0$, f, $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} (J_\lambda^\psi - J_\lambda^\psi \widehat{f})^+ dx \leq \int_{\mathbf{R}^N} (f - \widehat{f})^+ dx \tag{15}$$

$$\textit{infess}\ (f \wedge \psi) \leq J_\lambda^\psi f \leq \textit{supess}\ f \tag{16}$$

et l'équation résolvante

$$J_\lambda^\psi f = J_\mu^\psi \left(\frac{\mu}{\lambda}\, f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda}\, J_\lambda^\psi f \right) \tag{17}$$

(v) Pour tout $\lambda > 0$, $J_\lambda^\psi : L^\infty(\mathbf{R}^N) \to L^\infty(\mathbf{R}^N)$ est σ-continue pour l'ordre, i.e. pour toute suite $\{f_n\} \subset L^\infty(\mathbf{R}^N)$ bornée dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que $f_n \to f$ p.p. alors $J_\lambda^\psi f_n \to J_\lambda^\psi f$ p.p.

Remarque 2. — (i) L'équation résolvante (17) permet de construire un opérateur A^ψ de $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ dont les résolvantes $(I + \lambda A^\psi)^{-1}$ sont J_λ^ψ pour tout $\lambda > 0$, défini par

$$v \in A^\psi u \iff \exists\ \lambda > 0 \text{ tel que } u = J_\lambda^\psi(u + \lambda v).$$

(ii) Dans le cas où $\psi \equiv c$ avec $c \in \mathbf{R}$, I. DIAZ et L. VERON ont déterminé A^ψ dans [4] : A^ψ est alors défini par $v \in A^\psi u$ si et seulement si

$$\operatorname{div}_K \varphi(u) + \beta(u - c) \ni v \tag{18}$$

(1) $u_\epsilon \downarrow u$ lorsque $\epsilon \downarrow 0$ signifie : pour toute suite $\{\epsilon_n\} \subset]0, \infty[$ telle que $\epsilon_n \downarrow 0$, $\{u_{\epsilon_n}\}$ est une suite décroissante *p.p.*, et $u_{\epsilon_n} \to u$ *p.p.*.

où β est le graphe maximal monotone de $\mathbf{R}$ défini par :

$$D(\beta) = \mathbf{R}^-, \ \beta(r) = 0 \text{ si } r < 0, \ \beta(0) = [0, \infty[.$$

(18) signifie alors qu'il existe $h \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ tel que

$$h(x) \in \beta\big(u(x) - c\big) \ p.p.\ x, \operatorname{div}_K \varphi(u) = v - h \text{ sur } \mathbf{R}^N.$$

En fait compte tenu du lemme 2 et du théorème 2, il est facile de vérifier ce résultat en remarquant que, pour tout graphe maximal monotone de $\mathbf{R}$ et $u, f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$,

$$\begin{aligned} &u + \operatorname{div}_K \varphi(u) + \beta(u) \ni f \iff \\ &\qquad v \in L^\infty(\mathbf{R}^N), \ u + \beta(u) \ni v, \ v + \operatorname{div}_K \varphi\big((I+\beta)^{-1} v\big) = f \text{ sur } \mathbf{R}^N \end{aligned}$$

3. — Problème d'évolution sur $]0, T[\times \mathbf{R}^N$, énoncé des résultats.

On fixe $T > 0$. Nous poserons $Q =]0, T[\times \mathbf{R}^N$.

DÉFINITION 2. — *Pour $u \in L^1_{loc}(Q)$ et $u_o \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$, on écrira*

$$u(0) \leq u_o \ (resp. \geq u_o, = u_o) \ sur \ \mathbf{R}^N$$

si lorsque $t \to 0$ essentiellement

$$\big(u(t) - u_o\big)^+ \big(resp. \big(u(t) - u_o\big)^-, |u(t) - u_o|\big) \to 0 \ dans \ L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$$

Nous avons les résultats analogues à ceux du problème stationnaire.

LEMME 3. — *Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ continue vérifiant (7).*
(i) si $\omega \in \mathbf{R}$, $u, \widehat{u} \in L^\infty(Q)$, $f, \widehat{f} \in L^1_{loc}(Q)$, $u, \widehat{u}_o \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ vérifient

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_K \big(u, \varphi(u)\big) \leq f - \omega u \ sur \ Q, \ u \leq u_o \ sur \ \mathbf{R}^N \\ &\operatorname{div}_K \big(\widehat{u}, \varphi(\widehat{u})\big) \geq \widehat{f} - \omega \widehat{u} \ sur \ Q, \ \widehat{u} \geq \widehat{u}_o \ sur \ \mathbf{R}^N \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} &\|\big(u(t) - \widehat{u}(t)\big)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq e^{-\omega t} \|(u_o - \widehat{u}_o)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} + \\ &\qquad \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} \|\big(f(\tau) - \widehat{f}(\tau)\big)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} d\tau \quad p.p.\ t \in]0, T[\end{aligned} \tag{19}$$

$$u(t) \leq e^{-\omega t} \textit{ supess } u_o + \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} \textit{ supess } f(\tau,.)d\tau \quad \textit{p.p. } t \in]0,T[\quad (20)$$

$$\widehat{u}(t) \geq e^{-\omega t} \textit{ infess } \widehat{u}_o + \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} \textit{ infess } \widehat{f}(\tau,.)d\tau \quad \textit{p.p. } t \in]0,T[\quad (21)$$

(ii) Pour tout $\omega \in \mathbf{R}$, $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *il existe une solution (unique) de*

$$u \in L^\infty(Q), \operatorname{div}_K\big(u, \varphi(u)\big) = f - \omega u \textit{ sur } Q, \quad u(0) = u_o \textit{ sur } \mathbf{R}^N \quad (22)$$

De plus $u \in \mathcal{C}\big([0,T], L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)\big)$.

THÉORÈME 3.— *Soient* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ *continue vérifiant (7),* $f : Q \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *vérifiant (8) (avec* $\Omega = Q$*) et* $u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. *Soit* $\{u_i; i \in I\} \subset L^\infty(Q)$ *majoré dans* $L^\infty(Q)$ *et tel que pour tout* $i \in I$

$$\operatorname{div}_K\big(u_i, \varphi(u_i)\big) \leq f(.,u_i) \textit{ sur } Q, \quad u_i(0) \leq u_o \textit{ sur } \mathbf{R}^N \quad (23)$$

alors si $u = \sup u_i$

$$\operatorname{div}_K\big(u, \varphi(u)\big) \leq f(.,u) \textit{ sur } Q, \quad u(0) \leq u_o \textit{ sur } \mathbf{R}^N.$$

COROLLAIRE .— *Soient* $\varphi_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ *continue vérifiant (7),* $f_i : Q \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *vérifiant (8) pour* $i \in I$, $M : L^\infty(Q) \to L^\infty(Q)$ *croissante et* $u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. *On pose*

$$U = \big\{u \in L^\infty(Q); \operatorname{div}_K\big(u, \varphi_i(u)\big) \leq f_i(.,u) \textit{ sur } Q \ \forall i \in I, \\ u \leq Mu \textit{ sur } Q \textit{ et } u(0) \leq u_o \textit{ sur } \mathbf{R}^N\big\}$$

Alors, si U *est non vide et majoré,* U *admet un élément maximum.*

Donnons enfin le résultat relatif au problème d'obstacle.

THÉORÈME 4.— *Soient* $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ *continue vérifiant (7),* $\psi : Q \to \mathbf{R}$ *mesurable telle que* $\psi^- L^\infty(Q)$.

(i) Pour tout $f \in L^\infty(Q)$, $u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *il existe une solution maximum de*

$$u \in L^\infty(Q), \ \operatorname{div}_K\big(u, \varphi(u)\big) \leq f \textit{ sur } Q, \ u \leq \psi \textit{ sur } Q, \ u(0) \leq u_o \textit{ sur } \mathbf{R}^N \quad (24)$$

Notons $\mathcal{J}(u_o, f)$ *cette solution.*

(ii) Pour tout $f \in L^\infty(Q)$, $u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *et* $\epsilon > 0$, *il existe une solution unique de*

$$u_\epsilon \in L^\infty(Q),\ \operatorname{div}_K\big(u_\epsilon, \varphi(u_\epsilon)\big) = f - \frac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - \psi)^+ \ sur\ Q,\ u_\epsilon(0) = u_o\ sur\ \mathbf{R}^N \tag{25}$$

De plus $u_\epsilon \in \mathcal{C}\big([0,T]; L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)\big)$. *Notons* $\mathcal{J}^\epsilon(u_o, f)$ *cette solution.*

(iii) Pour tout $f \in L^\infty(Q)$, $u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$,

$$\mathcal{J}^\epsilon(u_o, f) \downarrow \mathcal{J}(u_o, f)\ lorsque\ \epsilon \downarrow 0$$

(iv) Pour tout $f, \widehat{f} \in L^\infty(Q)$, $u_o, \widehat{u}_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *posant* $u = \mathcal{J}(u_o, f)$, $\widehat{u} = \mathcal{J}(\widehat{u}_o, \widehat{f})$ *on a*

$$\begin{aligned}\big\|\big(u(t) - \widehat{u}(t)\big)^+\big\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} &\le \\ \|(u_o - \widehat{u}_o)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} &+ \int_0^t \big\|\big(f(\tau) - \widehat{f}(\tau)\big)^+\big\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} d\tau\ p.p.\ t \in]0, T[\end{aligned} \tag{26}$$

$$u(t) \le supess\ u_o + \int_O^t supess\ f(\tau, .)d\tau \quad p.p.\ t \in]0, T[\tag{27}$$

(v) Pour $\{f_n, f\} \subset L^\infty(Q)$, $\{u_{o,n}, u_o\} \subset L^\infty(\mathbf{R}^N)$ *telles que* $f_n \uparrow f$ *(resp* $f_n \downarrow f$*) et* $u_{o,n} \uparrow u_o$ *(resp* $u_{o,n} \downarrow u_o$*) on a*

$$\mathcal{J}(u_{o,n}, f_n) \uparrow \mathcal{J}(u_o, f)\ \big(resp\ \mathcal{J}(u_{o,n}, f_n) \downarrow \mathcal{J}(u_o, f)\big)$$

Remarque 3. — Dans le cas où $\psi \equiv 0$, d'après I.Diaz et L.Veron (cf. [4], $u = \mathcal{J}(u_o, f)$ si et seulement si u est solution de

$$u \in L^\infty(Q),\ \operatorname{div}_K\big(u, \varphi(u)\big) + \beta(u) \ni f,\ u(0) \le u_o \tag{28}$$

où β est le graphe maximal monotone défini dans la remarque 2 et (28) signifie qu'il existe $h \in L^\infty(Q)$ tel que

$$h(t,x) \in \beta\big(u(t,x)\big)\ p.p.\ (t,x)\ \text{et}\ \operatorname{div}_K\big(u, \varphi(u)\big) = f - h\ \text{sur}\ Q.$$

II - Etude du problème stationnaire sur $\mathbf{R}^N$. Démonstration des résultats

Dans tout ce qui suit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ continue est fixée. Nous lui associons l'opérateur A de $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ défini par :

$$Au = v \iff u, v \in L^\infty(\mathbf{R}^N), \operatorname{div}_K \varphi(u) = v \text{ sur } \mathbf{R}^N \tag{29}$$

Pour $\lambda > 0$ nous noterons J_λ la résolvante de A, c'est-à-dire $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$.

Remarques 4 .— i) Le lemme 2 montre en remplaçant φ par $\lambda\varphi$ que sous l'hypothèse (7), pour tout $\lambda > 0$ la résolvante J_λ est une application univoque partout définie et croissante sur $L^\infty(\mathbf{R}^N)$. En d'autres termes,

$$\begin{cases} \text{Pour tout } \lambda > 0,\ f \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe une unique solution de} \\ \qquad u \in L^\infty(\Omega) \qquad u + \lambda\, Au \ni f \\ \text{et pour tout } f, \hat{f} \in L^\infty(\Omega), \\ f \leq \hat{f} \Longrightarrow (I+\lambda A)^{-1} f \leq (I+\lambda A)^{-1} \hat{f} \end{cases} \tag{30}$$

où ici $\Omega = \mathbf{R}^N$.

ii) En accord avec les définitions de [1], un opérateur de $L^\infty(\Omega)$ vérifiant les propriétés (30) est un prégénérateur de sous-potentiels.

iii) D'après la remarque 1.(iii), les estimations (9) et (10) du lemme 2, et la croissance de J_λ pour $\lambda > 0$, il est aisé de remarquer que J_λ est σ-continue pour l'ordre i.e. pour toute suite $\{f_n\} \subset L^\infty(\mathbf{R}^N)$ bornée dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que $f_n \to f$ p.p., alors $J_\lambda f_n \to J_\lambda f$ p.p.

PROPOSITION 1.— *Sous l'hypothèse (7) sur φ, pour $u, v \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v$ sur $\mathbf{R}^N$ si et seulement si $u \leq J_\lambda(u + \lambda v)$ pour tout $\lambda > 0$; dans ce cas $J_\lambda(u+\lambda v) \downarrow u$ lorsque $\lambda \downarrow 0$.*

Preuve de la proposition 1 .— Rappelons l'équation résolvante vérifiée par $(J_\lambda)_{\lambda > 0}$:

$$J_\lambda f = J_\mu \left(\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda f \right) \ \forall \lambda, \mu > 0,\ f \in X \tag{31}$$

d'où

$$u_\lambda = J_\lambda(u + \lambda v) = J_\mu \left(u + \lambda v + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)(u_\lambda - u) \right)$$

donc si $u \leq J_\lambda(u + \lambda v)$ pour tout $\lambda > 0$ et si $\lambda < \mu$, on a

$$J_\lambda(u + \lambda v) \leq J_\mu(u + \mu v)$$

l'on en déduit que $u_\lambda \downarrow \widehat{u}$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. D'autre part nous avons

$$\operatorname{div}_K \varphi(u_\lambda) = \frac{u - u_\lambda}{\lambda} + v \text{ sur } \mathbf{R}^N, \tag{32}$$

donc d'après la remarque 1

$$\operatorname{div} \varphi(u_\lambda) = \frac{u - u_\lambda}{\lambda} + v \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

Il est alors immédiat que $u_\lambda \to u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$; donc $u = \widehat{u}$.

D'autre part, utilisant (32) et $u \leq u_\lambda$, on a $\operatorname{div}_K \varphi(u_\lambda) \leq v$ sur $\mathbf{R}^N$; donc d'après la remarque 1.(iii)

$$\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v \text{ sur } \mathbf{R}^N$$

Réciproquement, si $u, v \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq v$ sur $\mathbf{R}^N$, alors en utilisant (32) on a

$$\operatorname{div}_K \lambda\varphi(u) \leq u + \lambda v - u \text{ et } \operatorname{div}_K \lambda\varphi(u_\lambda) = u + \lambda v - u_\lambda \text{ sur } \mathbf{R}^N$$

donc, d'après le lemme 2, remplaçant φ par $\lambda\varphi$, on a $u \leq u_\lambda$.

Remarque 5.— D'après le début de la démonstration précédente, on a,

$$u \leq J(u + \lambda v)\ \forall \lambda > 0 \iff \exists \lambda_o > 0 \text{ tel que } u \leq J_\lambda(u + \lambda v)\ \forall 0 < \lambda < \lambda_o.$$

D'après la proposition 1, l'inégalité (12) du théorème 1 est équivalente à $u_i \leq J_\lambda\big(u_i + \lambda f(.,u_i)\big)\ \forall \lambda > 0$. Donc le théorème 1 résulte du résultat très général suivant :

PROPOSITION 2.— *Soit A un opérateur de $L^\infty(\Omega)$ de résolvante J_λ et vérifiant (30), et où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^p$. Soit $f : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant (8). Soit $\{u_i,\ i \in I\} \subset L^\infty(\Omega)$ telle que $u = \sup_i u_i$ existe dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifie*

$$u_i \leq J_\lambda\big(u_i + \lambda f(.,u_i)\big) \text{ pour tout } \lambda > 0,\ i \in I \tag{33}$$

Alors, $u \leq J_\lambda\big(u + \lambda f(.,u)\big)$, pour tout $\lambda > 0$.

Preuve de la proposition 2 .— Soit $i_o \in I$, alors $u = \sup(u_i \vee u_{i_o})$; il suffit donc de montrer le résultat pour une famille $\{u_i, i \in I\}$ minorée dans $L^\infty(\Omega)$. Il existe donc $\underline{m}$ et $\overline{m} \in \mathbf{R}$ tels que $\underline{m} \leq u_i \leq \overline{m}\ \forall\ i \in I$. Posons $\omega_o = \operatorname{supess}\big\{\omega(r); r \in [\underline{m}, \overline{m}]\big\}$.

Par hypothèse sur f, $f(.,r)+\omega_o r$ est croissante en r sur $[\underline{m},\overline{m}]$; d'où

$$f(.,u_i) \leq f(.,u) + \omega_o(u-u_i) \qquad \forall i \in I$$

ceci implique, compte tenu de (33) et la croissance de J_λ,

$$u_i \leq J_\lambda\big(u + \lambda f(.,u) + (\lambda\omega_o - 1)(u-u_i)\big) \quad \forall\lambda > 0 \quad \forall i \in I$$

et, comme $u_i \leq u$, on a

$$u_i \leq J_\lambda\big(u + \lambda f(.,u)\big) \quad \forall\lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega_o < 1 \quad \forall i \in I$$

d'où

$$u \leq J_\lambda\big(u + \lambda f(.,u)\big) \quad \forall\lambda > 0 \text{ avec } \lambda\omega_o < 1$$

et donc, d'après la remarque 5, pour tout $\lambda > 0$.

Preuve du théorème 2 .— Rappelons que pour $\lambda > 0$ et $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $J_\lambda f$ est la solution de $\operatorname{div}_K \lambda\varphi(u) = f - u$. On peut toujours supposer $\lambda = 1$ en remplaçant φ par $\lambda\varphi$.

1) Soit $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. Toute constante c telle que $c \leq f \wedge \psi$ vérifie

$$\operatorname{div}_K \varphi(c) = 0 \leq f - c, \ c \leq \psi$$

D'autre part, toute solution $\underline{u}$ de (13), d'après le lemme 2 vérifie $\underline{u} \leq J_1 f$. Nous en déduisons, d'après le corollaire du théorème 1, que (13) admet une solution maximum notée $J_\lambda^\psi f$ et (16) est vérifiée.

2) Soit $\epsilon > 0$. Montrons (ii). Soient $u_\epsilon, \widehat{u}_\epsilon \in L^\infty(\mathbf{R}^N) f, \widehat{f} \in L^1_{\text{loc}}$ tels que

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_K \varphi(u_\epsilon) \leq f - u_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}(u_\epsilon - \psi)^+ \text{ et} \\ &\operatorname{div}_K \varphi(\widehat{u}_\epsilon) \geq \widehat{f} - \widehat{u}_\epsilon - \frac{1}{\epsilon}\,(\widehat{u}_\epsilon - \psi)^+ \text{ sur } \mathbf{R}^N \end{aligned} \tag{34}$$

D'après l'inégalité

$$\left[f - \frac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - \psi)^+ - \widehat{f} + \frac{1}{\epsilon}(\widehat{u}_\epsilon - \psi)^+\right]^+ \leq (f - \widehat{f})^+ + \frac{1}{\epsilon}\,(\widehat{u}_\epsilon - u_\epsilon)^+ \tag{35}$$

et le lemme 2.(i) nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u_\epsilon - \widehat{u}_\epsilon)^+ \leq \int_{u_\epsilon \geq \widehat{u}_\epsilon} (f - \widehat{f})^+ \tag{36}$$

Notons que plus précisément, d'après le lemme 1 de Kurskov et (35),

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u_\epsilon - \widehat{u}_\epsilon)^+ \xi \leq \int_{u_\epsilon \geq \widehat{u}_\epsilon} (\varphi(u_\epsilon) - \varphi(\widehat{u}_\epsilon)).\xi_x + \int_{u_\epsilon \geq \widehat{u}_\epsilon} (f - \widehat{f})^+ \xi \quad \forall \xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N) \tag{37}$$

On déduit de (36) d'une part l'unicité de la solution de (14) et d'autre part, si $J_1^\epsilon f$ est la solution de (14) et $\underline{u}$ une solution de (13) les estimations

$$\underline{u} \leq J_1^\epsilon f \leq \text{supess } f, \text{ infess } (f \wedge \psi) \leq J_1^\epsilon f \leq \text{supess } f \tag{38}$$

Montrons maintenant l'existence de la solution de (14). Pour $u_\epsilon \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, nous avons, en utilisant $(u_\epsilon - \psi)^+ = u_\epsilon - (u_\epsilon \wedge \psi)$,

$$u_\epsilon \text{ est solution de } (14) \iff$$

$$\operatorname{div}_K \varphi(u_\epsilon) = \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\, f + \frac{1}{1+\epsilon}\, (u_\epsilon \wedge \psi) - u_\epsilon\right] \text{ sur } \mathbf{R}^N \iff$$
$$u_\epsilon = J_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left[\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\, f + \frac{1}{1+\epsilon}\, u_\epsilon \wedge \psi\right] \tag{39}$$

Par récurrence on construit la suite $\{u_n\}$ de $L^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$u_o = J_1 f = J_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left[\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\, f + \frac{1}{1+\epsilon}\, u_o\right],\ u_n = J_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left[\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\, f + \frac{1}{1+\epsilon}\, u_{n-1} \wedge \psi\right] \tag{40}$$

Si $\underline{u}$ est solution de (13), d'après la proposition 1

$$\underline{u} \leq J_\lambda\big(\underline{u} + \lambda(f - \underline{u})\big) \quad \forall \lambda > 0$$

en particulier

$$\underline{u} \leq J_1 f \text{ et } \underline{u} \leq J_{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \left[\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\, f + \frac{1}{1+\epsilon}\, \underline{u} \wedge \psi\right] \tag{41}$$

Alors en utilisant (40), (41) et la croissance de $J_{\epsilon/(1+\epsilon)}$, on montre par une récurrence immédiate que $u_n \downarrow u_\epsilon$, et par σ-continuité de $J_{\epsilon/(1+\epsilon)}$ que u_ϵ est solution de (39) et donc de (14).

3) Montrons (iii). Soit $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, et notons $u_\epsilon = J_1^\epsilon f$ pour $\epsilon > 0$. Pour $0 < \eta < \epsilon$, u_η vérifie

$$\operatorname{div}_K \varphi(u_\eta) = f - u_\eta - \frac{1}{\eta}\, (u_\eta - \psi)^+ \leq f - u_\eta - \frac{1}{\epsilon}\, (u_\eta - \psi)^+ \text{ sur } \mathbf{R}^N$$

d'après (34) et (36) on déduit que $u_\eta \leq u_\epsilon$; d'après (38) il existe $u \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ tel que $u_\epsilon \downarrow u$ lorsque $\epsilon \downarrow 0$. Comme u_ϵ est solution de (14), $\operatorname{div}_K \varphi(u_\epsilon) \leq f - u_\epsilon$ sur $\mathbf{R}^N$ et donc à la limite $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq f - u$ sur $\mathbf{R}^N$; d'autre part, d'après (14),

$$(u_\epsilon - \psi)^+ = \epsilon\big(f - u_\epsilon - \operatorname{div}\varphi(u_\epsilon)\big) \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$$

et donc à la limite on obtient $(u-\psi)^+ = 0$, c'est-à-dire $u \leq \psi$. En utilisant (38), u est donc la solution maximum de (13); (15) s'obtient en passant à la limite dans (36).

4) Montrons (v). J_1^ψ étant croissante sur $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ d'après (15), il suffit de montrer (v) pour les suites monotones.

Tout d'abord passant à la limite dans (37), on obtient pour $f, \widehat{f} \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$\int_{\mathbf{R}^N} (J_1^\psi f - J_1^\psi \widehat{f})^+ \xi \leq \int_{J_1^\psi f \geq J_1^\psi \widehat{f}} (\varphi(J_1^\psi f) - \varphi(J_1^\psi \widehat{f})).\xi_x + \int_{\mathbf{R}^N} (f - \widehat{f})^+ \xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N) \quad (42)$$

Soient $f_n \uparrow f$, $f_n, f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$; alors $u_n = J_1^\psi f_n \uparrow \widehat{u}$ avec $\widehat{u} \leq u = J_1^\psi f$; utilisant (42),

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u - u_n)\xi \leq \int_{\mathbf{R}^N} (\varphi(u) - \varphi(u_n)).\xi_x + \int_{\mathbf{R}^N} (f - f_n)\xi \;\; \forall \xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$$

et passant à la limite on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u - \widehat{u})\xi \leq \int_{\mathbf{R}^N} (\varphi(u) - \varphi(\widehat{u})).\xi_x \;\; \forall \xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$$

ce qui d'après le lemme 4 énoncé plus loin donne $\widehat{u} = u$. De la même manière on montrerait que $f_n \downarrow f \Longrightarrow J_1^\psi f_n \downarrow J_1^\psi f$.

5) On montre l'équation résolvante (17). Soient $\lambda, \mu > 0$ et $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. Pour tout u on a

$$\frac{f-u}{\lambda} = \frac{\left[\frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right] - u}{\mu},$$

et donc

$$J_\lambda^\psi f \leq J_\mu^\psi g \text{ avec } g = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda^\psi f.$$

D'autre part l'unicité de la solution de (14) montre que

$$J_\lambda^\epsilon f = J_\mu^\epsilon g_\epsilon \text{ avec } g_\epsilon = \frac{\mu}{\lambda} f + \frac{\lambda - \mu}{\lambda} J_\lambda^\epsilon f.$$

Comme $J_\lambda^\epsilon f \downarrow J_\lambda^\psi f$, $g_\epsilon \downarrow g$ (resp. $g_\epsilon \uparrow g$) si $\mu \leq \lambda$ (resp. $\mu > \lambda$), $J_\mu^\psi g_\epsilon \to J_\mu^\psi g$ p.p. et donc

$$J_\mu^\psi g_\epsilon \leq J_\lambda^\epsilon g_\epsilon = J_\lambda^\epsilon f \Longrightarrow J_\mu^\psi g \leq J_\lambda^\psi f.$$

Preuve du lemme 2 . — Supposons (i) démontré. D'après la remarque 1.(iii) et les estimations (9) et (10)

$$\begin{gathered} f_n \downarrow f (\text{resp. } f_n \uparrow f) \text{ avec } f_n, f \in L^\infty(\mathbf{R}^N), u_n \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ avec} \\ \operatorname{div}_K \varphi(u_n) = f_n - u_n \text{ sur } \mathbf{R}^N \Longrightarrow \\ u_n \downarrow u (\text{resp. } u_n \uparrow u) \text{ avec } u \in L^\infty(\mathbf{R}^N) \text{ et } \operatorname{div}_K \varphi(u) = f - u \text{ sur } \mathbf{R}^N. \end{gathered}$$

D'autre part on sait (cf. [2]) que pour $f \in L'(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$, il existe $u \in L'(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ solution de (11); il est alors aisé de montrer l'existence de la solution de (11) pour tout $f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. Ce qui montre (ii).

Les estimations (10) se déduisent de (9) en prenant $\widehat{f} = f$ et $\widehat{u} = \text{supess } f$ puis $f = \widehat{f}$ et $u = \text{infess } \widehat{f}$.

Il reste à montrer (9). Si $\operatorname{div}_K \varphi(u) \leq f - u$ et $\operatorname{div}_K \varphi(\widehat{u}) \geq \widehat{f} - \widehat{u}$ sur $\mathbf{R}^N$, d'après le lemme 1 de Kruskov, nous avons

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u - \widehat{u})^+ \xi \leq \int_{u \geq \widehat{u}} (\varphi(u) - \varphi(\widehat{u})).\xi_x dx + \int_{u \geq \widehat{u}} (f - \widehat{f})^+ \xi \, dx \; \forall \xi \in D^+(\mathbf{R}^N) \tag{43}$$

alors (9) est une conséquence du

LEMME 4. — *Si φ vérifie (7), $u, \widehat{u} \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $f, \widehat{f} \in L'_{loc}(\mathbf{R}^N)$ vérifient (43) alors*

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u - \widehat{u})^+ dx \leq \int_{u \geq \widehat{u}} (f - \widehat{f})^+ dv. \tag{44}$$

Preuve du lemme 4 . — Soient $0 < t \leq r$, $\rho : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ continue telle que $\rho(s) = 1$ sur $[0, 1]$, $\rho(s) = 0$ sur $[1 + t/r, +\infty[$,, et affine sur $[1, 1 + t/r]$. Alors (43) est vraie pour $\xi(x) = \rho(|x|/r)$. On a supp $\xi \subset \{|x| \leq r + t\}$, supp $\xi_x \subset \{r \le |x| \le r+t\}$, $0 \le \xi \le 1$, $\xi \equiv 1$ sur $\{|x| \le r\}$ et $|\xi_x| \le 1/t$. On obtient

$$\int_{|x|\le r} (u-\widehat{u})^+ \le \frac{1}{t} \int_{\substack{u \ge \widehat{u} \\ r\le|x|\le r+t}} \left|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right| + \int_{u\ge\widehat{u}|x|\le r+t} (f-\widehat{f})^+ \ \forall 0<t\le r \tag{45}$$

On va distinguer deux cas

Cas $N=1$. — On prend $t=r$

$$\frac{1}{r}\int_{r\le|x|\le 2r} \left|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right| \le 2\left\|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right\|_\infty$$

donc d'après (45) si $\int_{u\ge\widehat{u}}(f-\widehat{f})^+ < \infty$, alors $(u-\widehat{u})^+ \in L^1(\mathbf{R})$; il suffit donc de se placer dans ce cas. D'autre part, d'après l'uniforme continuité de φ sur $\left\{|s| \le \|\widehat{u}\|_\infty + 1\right\}$ il existe c continue sur $[0,1]$ avec $c(0)=0$ tel que pour $0<\delta\le 1$

$$\int_{\substack{\widehat{u}\le u\le\widehat{u}+\delta \\ r\le|x|\le 2r}} \left|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right| \le r\ c(\delta)$$

On a également

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\widehat{u}+\delta\langle u \\ r\le|x|\le 2r}} \left|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right| &\le \left\|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right\|_\infty \left|\left\{r\le|x|\le 2r; u>\widehat{u}+\delta\right\}\right| \le \\ &\le \left\|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right\|_\infty \frac{1}{\delta}\int_{r\le|x|\le 2r}(u-\widehat{u})^+ \\ &\le \frac{1}{\delta}\left\|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right\|_\infty \left\|(u-\widehat{u})^+\right\|_1\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{r}\int_{r\le|x|\le 2r}\left|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right| \le c(\delta) + \frac{1}{\delta r}\left\|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right\|_\infty \left\|(u-\widehat{u})^+\right\|_1$$

en faisant $r\to\infty$ puis $\delta\to 0$ on obtient (44) à partir de (45).

Cas $N\ge 2$. — Posons

$$f(r,t) = \frac{1}{t}\int_{\substack{u\ge\widehat{u} \\ r\le|x|\le r+t}} \left|\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\right|$$

Utilisant l'hypothèse (7) sur φ et l'inégalité de Hölder on obtient

$$f(r,t) \leq c\left[\frac{r}{t}\int_{r\leq|x|\leq r+t}(u-\widehat{u})^+\right]^{\frac{N-1}{N}} \qquad \forall 0<t\leq r \tag{46}$$

avec $c = c\,(\varphi, u, \widehat{u}, N)$. Donc si $(u-\widehat{u})^+ \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\lim\limits_{r\to\infty} f(r,r) = 0$ et de (45) et (46) on déduit le lemme. Il suffit de montrer que si $\int_{u\geq\widehat{u}}(f-\widehat{f})^+ < \infty$ alors $(u-\widehat{u})^+ \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Par contradiction, supposons $\int_{u\geq\widehat{u}}(f-\widehat{f})^+ < \infty$ et $(u-\widehat{u})^+ \notin L^1(\mathbf{R}^N)$. Alors pour r assez grand,

$$\int_{u\geq\widehat{u}}(f-\widehat{f})^+ \leq (c_r)^{\frac{N-1}{N}} \leq \left(\frac{r}{t}\,c_{r+t}\right)^{\frac{N-1}{N}} \qquad 0<t\leq r$$

où $c_r = \int_{|x|\leq r}(u-\widehat{u})^+$; d'autre part d'après (45) et (46)

$$c_r \leq k\left(\frac{r}{t}\,c_{r+t}\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad \text{pour } 0<t\leq r \text{ et } r\geq r_o \tag{47}$$

avec $k = k(\varphi, u, \widehat{u}, N)$. Ceci est en contradiction avec $(u-\widehat{u})^+ \notin L^1(\mathbf{R}^N)$, c'est-à-dire $c_r \uparrow \infty$ lorsque $r \uparrow \infty$, en utilisant le lemme suivant.

LEMME 5.— *Soit* $\{c_r; r\in\mathbf{R}^+\} \subset \mathbf{R}^+$ *croissante et vérifiant*

$$c_r \leq k\left(\frac{r}{t}\,c_{r+t}\right)^{\alpha} \quad \textit{pour } \forall 0<t\leq r$$

où $0<\alpha<1$ *et* $k\in\mathbf{R}^+$. *Alors* $\{c_r; r\in\mathbf{R}^+\}$ *est bornée dans* $\mathbf{R}$.

Preuve du lemme 5 .— Pour $r>0$, on construit r_n et t_n par

$$t_n = r\beta^n \quad r_n = r(1+\beta+\cdots+\beta^{n-1}) \ \text{ où } 0<\beta<1$$

de telle sorte que $r_{n+1} = r_n + t_n$. On pose $c_n = c_{r_n}$, on obtient

$$c_n \leq k\left(\frac{r_n}{t_n}\,c_{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{k}{(1-\beta)^{\alpha}}\left(\frac{c_{n+1}}{\beta^n}\right)^{\alpha}$$

et par récurrence

$$c_r = c_1 \leq a^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1}}\,\frac{c_{n+1}^{\alpha^n}}{\beta^{\alpha+2\alpha^2+\cdots+n\alpha^n}} \ \text{ où } \ a = \frac{k}{(1-\beta)^{\alpha}}$$

Comme $c_n \leq c_{\frac{r}{1-\beta}}$, on a $c_{n+1}^{\alpha^n} \to 1$ et donc à la limite $c_r \leq M(k,\alpha,\beta)$.

III - Etude du problème d'évolution sur $[0,T[\times\mathbf{R}^N$. Démonstration des résultats.

L'application $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^N$ continue est fixée.

Preuve du lemme 3 .— Si $\operatorname{div}_K\big(u,\varphi(u)\big) \leq f - \omega u$, $\operatorname{div}_K\big(\widehat{u},\varphi(\widehat{u})\big) \geq \widehat{f} - \omega\widehat{u}$ sur Q alors d'après le lemme 1 de Kruskov appliqué avec $e^{-\omega t}\gamma\xi \in \mathcal{D}^+(Q)$ où $\gamma \in \mathcal{D}^+(]0,T[)$ et $\xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$ nous avons

$$\iint_{Q,u\geq\widehat{u}}\Big\{\big[(u-\widehat{u})^+\xi e^{\omega t}\big]\gamma_t + \big[sgn_o^+(u-\widehat{u})\big(\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\big).\xi_x e^{\omega t} + (f-\widehat{f})^+\xi e^{\omega t}\big]\gamma\Big\} \geq 0 \qquad \forall\gamma \in \mathcal{D}^+(]0,T[)\ \forall\xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$$

Il est alors classique que cela implique, pour tout $\xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$ p.p. $s < t$ $s,t \in]0,T[$

$$\int_{\mathbf{R}^N}\big(u(t)-\widehat{u}(t)\big)^+\xi e^{\omega t} \leq \int_{\mathbf{R}^N}\big(u(s)-\widehat{u}(s)\big)^+\xi e^{\omega s} + \iint_{]s,t[\times\mathbf{R}^N} sgn_o^+(u-\widehat{u})\big(\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\big).\xi_x e^{\omega\tau} + \iint_{]s,t[\times\mathbf{R}^N,u\geq\widehat{u}}(f-\widehat{f})^+\xi e^{\omega\tau} \tag{48}$$

Si de plus $u(0) \leq u_o$ et $\widehat{u}(0) \geq \widehat{u}_o$ sur $\mathbf{R}^N$, alors en faisant $s \to 0$ essentiellement on obtient pour tout $\xi \in \mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$ et p.p. $t \in]0,T[$

$$\int_{\mathbf{R}^N}\big(u(t)-(\widehat{u}(t)\big)^+\xi \leq e^{-\omega t}\int_{\mathbf{R}^N}(u_o-\widehat{u}_o)^+\xi + \iint_{]0,t[\times\mathbf{R}^N} sgn_o^+(u-\widehat{u})\big(\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})\big).\xi_x e^{-\omega(t-\tau)} + \iint_{]0,t[\times\mathbf{R}^N,u\geq\widehat{u}}(f-\widehat{f})^+\xi e^{-\omega(t-\tau)} \tag{49}$$

Alors (19) est une conséquence du lemme suivant; (20) (resp. (21)) se déduit de (19) en prenant $\widehat{u} = \delta(t)$ (resp. $u = \delta(t)$) où $\delta(t)$ est le membre de droite dans (20) (resp. (21)), $\widehat{f} = f$ (resp. $f = \widehat{f}$), et $\widehat{u}_o = u_o$ (resp. $u_o = \widehat{u}_o$).

LEMME 6. — *Si φ vérifie (7), $u, \widehat{u} \in L^\infty(Q)$, u_o, $\widehat{u}_o \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ vérifient (49) alors p.p. $t \in]0,T[$*

$$\int \|(u(t) - \widehat{u}(t))^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq e^{-\omega t}\|(u - \widehat{u}_o)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} + \iint_{]0,t[\times\mathbf{R}^N, u\geq\widehat{u}} (f - \widehat{f})^+ e^{-\omega(t-\tau)} \tag{50}$$

D'après la remarque 1.(iii),(19),(20),(21) et (49) nous avons la

Remarque 6. — Soient $f_n \downarrow f$ (resp. $f_n \uparrow f$), $u_{o,n} \downarrow u_o$ (resp. $u_{o,n}, \uparrow u_o$), $f_n, f \in L^\infty(Q)$, $u_{o,n}, u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $u_n \in L^\infty(Q) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N))$, avec $\operatorname{div}_K(u_n, \varphi(u_n)) = f_n - \omega u_n$ sur Q, $u_n(0) = u_{o,n}$ sur $\mathbf{R}^N$, alors $u_n \downarrow u$ (resp. $u_n \uparrow u$), $u \in L^\infty(Q)$, $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N))$ et $\operatorname{div}_K(u, \varphi(u)) = f - \omega u$ sur Q, $u(0) = u_o$ sur $\mathbf{R}^N$.

Fin de la preuve du lemme 3. — D'après [2] pour tout $f \in L^1(Q) \cap L^\infty(Q)$, $u_o \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$, il existe $u \in \mathcal{C}([0,T]; L^1(\mathbf{R}^N)) \cap L^\infty(Q))$ solution de (22); d'après la remarque 6 la partie (ii) du lemme se montre comme dans le cas stationnaire.

Nous fixons maintenant u_o dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et nous associons à φ et u_o l'opérateur d'évolution E de $L^\infty(Q)$ défini par

$$Eu = v \iff u, v \in L^\infty(Q), \operatorname{div}_K(u, \varphi(u)) = v \text{ sur } Q,\ u(0) = u_o \text{ sur } \mathbf{R}^N \tag{51}$$

On a la

Remarque 7. — (i) Si $v = Eu$ alors $v = \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}_x \varphi(u)$ dans $\mathcal{D}'(Q)$.

(ii) d'après le lemme 3, $D(E) \subset \mathcal{C}([0,T]; L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N))$.

(iii) Le lemme 3 montre que E est un pré-générateur de $L^\infty(Q)$ (voir remarque 4). En fait, pour tout $\omega \in \mathbf{R}$, $(\omega I + E)^{-1}$ est une application croissante partout définie sur $L^\infty(Q)$ et σ-continue pour l'ordre d'après la remarque 6.

PROPOSITION 3. — *Sous l'hypothèse (7) sur φ.*

Pour $u, v \in L^\infty(Q)$, $\operatorname{div}_K(u, \varphi(u)) \leq v$ sur Q, $u(0) \leq u_o$ sur $\mathbf{R}^N$ si et seulement si $u \leq (I + \lambda E)^{-1}(u + \lambda v)$ pour tout $\lambda > 0$; dans ce cas $(I + \lambda E)^{-1}(u + \lambda v) \downarrow u$ et u est s.c.s. (semi-continu supérieurement de $[0,T]$ dans $L'_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

Preuve de la proposition 3 .— Cette proposition se démontre exactement comme la proposition 1 en utilisant le lemme 3 là où on utilisait le lemme 2 et en remarquant, avec des notations analogues,

$$u \leq u_\lambda \Longrightarrow \big(u(s) - u_o\big)^+ \leq \big(u_\lambda(s) - u_o\big)^+ \text{ p.p. } s$$

et donc, puisque $u_\lambda(0) = u_o$, $u(0) \leq u_o$.

Preuve du théorème 3 .— D'après la proposition 3, le théorème 3 est un cas particulier de la proposition 2.

Preuve du théorème 4 .— 1) Soit $f \in L^\infty(Q)$, et c une constante telle que $c < 0, c \leq u_o$, $c \leq \psi$ et $c \leq f$; alors

$$\operatorname{div}_K \big(ce^t, \varphi(ce^t)\big) = ce^t \leq c \leq f, \quad ce^t \leq \psi$$

donc ce^t est solution de (24).

D'autre part si $\underline{u}$ est solution de (24) et si $\overline{u}$ est la solution de

$$\overline{u} \in L^\infty(Q), \ \operatorname{div}_K \big(\overline{u}, \varphi(\overline{u})\big) = f \text{ sur } Q, \ \overline{u}(0) = u_o \text{ sur } \mathbf{R}^N$$

alors d'après le lemme 3, $\underline{u} \leq \overline{u}$ et donc, d'après le corollaire du théorème 3, (24) admet une solution maximum et (27) est vérifiée.

2) Soit $\epsilon > 0$. On montre (ii). Soient $u_\epsilon, \widehat{u}_\epsilon \in L^\infty(Q)$, $f, \widehat{f} \in L^1_{\text{loc}}(Q)$, $u_o, \widehat{u}_o \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ tels que

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}_K \big(u_\epsilon, \varphi(u_\epsilon)\big) \leq f - (u_\epsilon - \psi)^+/\epsilon, \ \operatorname{div}_K \big(\widehat{u}_\epsilon, \varphi(\widehat{u}_\epsilon)\big) \ \geq \\ &\widehat{f} - (\widehat{u}_\epsilon - \psi)^+/\epsilon \text{ sur } Q, \ u_\epsilon \leq u_o, \ \widehat{u}_\epsilon \geq \widehat{u}_o \text{ sur } \mathbf{R}^N.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1 de Kruskov et

$$\left(f - \frac{1}{\epsilon}\,(u_\epsilon - \psi)^+ - \widehat{f} + \frac{1}{\epsilon}\,(\widehat{u}_\epsilon - \psi)^+\right)^+ \leq (f - \widehat{f})^+ + \frac{1}{\epsilon}\,(\widehat{u}_\epsilon - u_\epsilon)^+$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^N} \big(u_\epsilon(t) - \widehat{u}_\epsilon(t)\big)^+ \xi \leq \int_{\mathbf{R}^N} (u_o - \widehat{u}_o)^+ \xi + \\ &\int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} sgn_o^+(u_\epsilon - \widehat{u}_\epsilon)\big(\varphi(u_\epsilon) - \varphi(\widehat{u}_\epsilon)\big).\xi_x + \\ &\int_0^t \int_{\mathbf{R}^N} (f - \widehat{f})^+ \xi \qquad \forall \xi \in \mathcal{D}^+, \text{p.p } t\end{aligned} \tag{52}$$

et d'après le lemme 6, p.p. t

$$\|(u_\epsilon(t)-\widehat{u}_\epsilon(t))^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq \|(u_o-\widehat{u}_o)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} + \int_0^t \|(f(\tau)-\widehat{f}(\tau))^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} d\tau \tag{53}$$

On en déduit d'une part l'unicité de la solution de (25); aussi notant $\mathcal{J}^\epsilon(u_o,f)$ la solution de (25), pour $\underline{u}$ solution de (24) alors

$$\underline{u} \leq \mathcal{J}^\epsilon(u_o,f) \tag{54}$$

On montre l'existence de la solution de (25) comme dans le théorème 2 en remarquant que

$$u_\epsilon \in L^\infty(Q) \text{ est solution de (25) } \Longleftrightarrow u_\epsilon = R_{1/\epsilon}\big(f+(1/\epsilon)(u_\epsilon \wedge \psi)\big)$$

où pour $g \in L^\infty(Q)$, $R_\omega g$ désigne la solution de (22).

3) Soit $f \in L^\infty(Q)$. On pose $u_\epsilon = \mathcal{J}^\epsilon(u_o,f)$; de manière analogue au théorème 2 on montre à l'aide de (53) et (54) qu'il existe $u \in L^\infty(Q)$ tel que $u_\epsilon \downarrow u$ et que l'on a $u \geq \underline{u}$ pour tout $\underline{u}$ solution de (24), $\mathrm{div}_K\,(u,\varphi(u)) \leq f$ sur Q, $u \leq \psi$ sur Q, et enfin $u(0) \leq u_o$ sur $\mathbf{R}^N$, puisque $(u(s)-u_o)^+ \leq (u^\epsilon(t)-u_o)^+$.

L'estimation (26) s'obtient en passant à la limite dans (53).

4) En passant à la limite dans (52), on obtient en posant $u = \mathcal{J}(u_o,f)$ et $\widehat{u} = \mathcal{J}(\widehat{u}_o,\widehat{f})$

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u(t)-\widehat{u}(t))^+\xi \leq \int_{\mathbf{R}^N} (u_o,\widehat{u}_o)^+\xi + \cdots \iint_{]0,t[\times\mathbf{R}^N, u\geq\widehat{u}} (\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})).\xi_x + \iint_{]0,t[\times\mathbf{R}^N} (f-\widehat{f})^+\xi \qquad \forall\xi\in\mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N) \tag{55}$$

Soit $f_n \uparrow f$, $u_{o,n} \uparrow u_o$, avec $f_n, f \in L^\infty(Q)$ $u_{o,n}, u_o \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ alors $\mathcal{J}(u_{o,n},f_n) \uparrow \widehat{u}$ avec $\widehat{u} \leq u = \mathcal{J}(u_o,f)$. On utilise (55) et on passe à la limite, on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^N} (u(t)-\widehat{u}(t))\xi \leq \iint_{]0,t[\times\mathbf{R}^N, u\geq\widehat{u}} (\varphi(u)-\varphi(\widehat{u})).\xi_x \qquad \forall\xi\in\mathcal{D}^+(\mathbf{R}^N)$$

ce qui d'après le lemme 6 donne $\widehat{u} = u$. La démonstration est la même pour les suites décroissantes.

Preuve du lemme 6 . — Ce lemme se montre comme le lemme 4 et nous suivons le même schéma. L'estimation (49) est vraie avec le même ξ particulier et l'on obtient, $\forall 0 < \widehat{R} \leq R$ p.p. t

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq R} (u(t) - \widehat{u}(t))^+ &\leq e^{-\omega t} \int_{|x|\leq R} (u_o - \widehat{u}_o)^+ + \\ & \frac{1}{\widehat{R}} \int_0^t \int_{R\leq |x| \leq R+\widehat{R}} |\varphi(u) - \varphi(\widehat{u})| e^{-\omega(t-\tau)} + \\ & \int_0^t \int_{|x|\leq R+\widehat{R}, u\geq \widehat{u}} (f - \widehat{f})^+ e^{-\omega(t-\tau)} \end{aligned} \tag{56}$$

Le cas $N = 1$ se traite exactement comme pour le lemme 4. Pour $N \geq 2$, posons

$$f(R, \widehat{R}) = \frac{1}{\widehat{R}} \int_0^t \int_{R\leq |x| \leq R+\widehat{R}} |(\varphi(u) - \varphi(\widehat{u})| e^{-\omega(t-\tau)} d\tau \ dx$$

D'après l'hypothèse (7) et l'inégalité de Hölder on a :

$$f(R, \widehat{R}) \leq c \left[\frac{R}{\widehat{R}} \int_0^t \int_{R\leq |x| \leq R+\widehat{R}} (u - \widehat{u})^+ \right]^{\frac{N-1}{N}} \qquad \forall\, 0 < \widehat{R} \leq R \tag{57}$$

avec $c = c(\varphi, u, \widehat{u}, N, \omega, t)$.

Donc si $(u - \widehat{u})^+ \in L^1(]0, t[\times \mathbf{R}^N)$, $\lim\limits_{R\to\infty} f(R, R) = 0$, et de (56) on déduit (50) p.p. $s \in]0, t[$. Il suffit donc de montrer que si

$$\|(u_o - \widehat{u}_o)^+\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^N, u\geq \widehat{u}} (f - \widehat{f})^+ e^{\omega\tau} \ d\tau \ dx < \infty \tag{58}$$

alors $(u - \widehat{u})^+ \in L^1(]0, t[\times \mathbf{R}^N)$. Pour cela on suppose (58) et $(u - \widehat{u})^+ \notin L^1(]0, t[\times \mathbf{R}^N)$, et alors pour R assez grand,

$$c_R \leq k \left[\frac{R}{\widehat{R}} \, c_{R+\widehat{R}} \right]^{\frac{N-1}{N}} \qquad 0 < \widehat{R} \leq R \tag{59}$$

où $k = k(\varphi, u, \widehat{u}, N, \omega, t)$ et $c_R = \int_0^t \int_{|x|\leq R} (u - \widehat{u})^+$

(59) est en contradiction avec le lemme 5 et $(u - \widehat{u})^+ \notin L^1(]0, T[\times \mathbf{R}^N)$.

Références

[1] BARTHELEMY (L.), BENILAN (Ph.). — *Sous-potentiels non linéaires.* (à paraître).

[2] BENILAN (Ph.). — *Equations d'évolution dans un espace de Banach et applications.* Thèse d'Etat, Université d'Orsay, 1972.

[3] BENILAN (Ph.), CRANDALL (M.G.), PAZY (A.). — *Evolution equation governed by accretive operators.* (livre en préparation).

[4] DIAZ (J.I.), VERON (L.). — Existence theory and qualitive properties of solutions of some first order quasilinear variational inequalities, *Indiana Un. Math. J.*, t. **32**, N°**3**, 1983.

[5] KRUSKOV (S.N.). — First order quasilinear equation in several independent variables, *Math. U.R.S.S. Sb*, t. **10**, 1970, p. 217-243.

(Manuscrit reçu le 7 juin 1987)