

FRANÇOIS DE THÉLIN

**Résultats d'existence et de non-existence pour
la solution positive et bornée d'une e.d.p.
elliptique non linéaire**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 8, n^o 3
(1986-1987), p. 375-389

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_375_0

© Université Paul Sabatier, 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Résultats d'existence et de non-existence pour la solution positive et bornée d'une e.d.p. elliptique non linéaire

FRANÇOIS DE THELIN ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous obtenons quelques résultats d'existence et de non existence de la solution positive et bornée $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de l'équation :

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2}) + g(x, u) = 0. \tag{E}$$

Pour prouver les résultats d'existence, nous utilisons soit le théorème de Passe-Montagne, soit la construction explicite de sur et sous-solutions. Les résultats de non existence sont des conséquences d'une identité de type POHOZAEV.

ABSTRACT. — In this paper we obtain some existence and nonexistence results for bounded positive solutions $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ of the equation:

$$\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2}) + g(x, u) = 0. \tag{E}$$

Proving the existence results, either we use the Pass-Mountain lemma or we explicitly construct subsolutions and supersolutions of (E). The nonexistence result follows from a POHOZAEV identity.

I. Introduction

Soient Ω un ouvert borné régulier de \mathbf{R}^N et $1 < p < \infty$. Dans cet article, nous étudions l'existence ou la non-existence d'une solution u positive et bornée, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de :

$$\Delta_p u + g(x, u) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

où $F(\nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$, $\Delta_p u = \operatorname{div} F(\nabla u)$.

⁽¹⁾ Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse Cedex.

Le cas $p = 2$ a été étudié par de nombreux auteurs. Pour $p \neq 2$ et $g(x, u) = \lambda u^{\gamma-1}$, l'étude de l'existence de la solution a d'abord été entreprise par OTANI [10] en dimension 1, puis DE THÉLIN [17] en dimension N ; l'étude de la non-existence, basée sur une égalité de type POHOZAEV [13] a été faite indépendamment par DE THÉLIN [17] et NI-SERRIN [7,8] pour des solutions radiales dans \mathbf{R}^N , puis complétée par OTANI [12] pour un ouvert quelconque.

Le but de ce papier est de présenter un ensemble de résultats d'existence et de non existence en dimension N , généralisant les précédents [7, 8, 10, 12] sans se limiter au seul cas $g(x, u) = \lambda u^{\gamma-1}$. On reprend plusieurs idées d'OTANI [12] et l'essentiel des énoncés de ses théorèmes.

- Dans le cas particulier $g(x, u) = \lambda u^{\gamma-1}$, on retrouve les résultats connus :
- existence pour $\gamma(N - p) < Np$
 - non existence pour $\gamma(N - p) \geq Np$ lorsque Ω est un ouvert strictement étoilé.

Rappelons enfin qu'un théorème de DIAZ-SAA [4] permet d'affirmer que la solution de notre problème est unique si $u \rightarrow \frac{g(x, u)}{u^{p-1}}$ est strictement décroissante.

Par ailleurs, pour l'étude du problème de la première valeur propre de Δ_p , on peut voir [11] et [18].

II. Existence

Soient Ω un ouvert borné régulier de \mathbf{R}^N , $1 < p < +\infty$ et $g: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Nous nous intéressons au problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \text{Trouver } u \in W_0^{1,p}(\Omega), & u \geq 0, \quad u \not\equiv 0 \text{ telle que :} \\ \Delta_p u + g(x, u) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

THÉORÈME 1. — *On suppose qu'il existe γ_1 et $\gamma_2 : 1 < \gamma_1 < \gamma_2 < p$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $\mu \geq 0$ tels que :*

- (i) $\forall x \in \Omega, \forall u \geq 0 : \lambda_1 u^{\gamma_1-1} \leq g(x, u)$,
- (ii) $\forall x \in \Omega, \forall u \geq 0 : g(x, u) \leq \mu + \lambda_2 u^{\gamma_2-1}$.

Alors (\mathcal{P}) admet au moins une solution u . De plus $u \in L^\infty(\Omega)$, ne s'annule pas dans Ω , et possède les propriétés de régularité suivante :

- Si $1 < p \leq 2$, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,p}(\Omega)$;
- si $p > 2$, $u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap B_{\infty,loc}^{p,p}(\Omega)$.

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

Si en outre la fonction : $u \rightarrow \frac{g(x, u)}{u^{\gamma_2-1}}$ est strictement décroissante, cette solution est unique.

Remarque. — Ici $p^* = \frac{p}{p-1}$ et $B_\infty^{p^*, p}$ est l'espace de Besov $[W^{1,p}, W^{2,p}]_{p^*-1, \infty}$ défini par interpolation.

Nous dirons que $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ [resp. $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$] est sursolution de \mathcal{P} [resp. sous solution de \mathcal{P}] si $\Delta_p \bar{u} + g(x, \bar{u}) \leq 0$ [resp. $\Delta_p \underline{u} + g(x, \underline{u}) \geq 0$] dans Ω et si $\bar{u} > 0$ sur $\partial\Omega$ [resp. $\underline{u} \leq 0$ sur $\partial\Omega$].

La démonstration du théorème 1 utilise les lemmes suivants.

LEMME 1. — Sous l'hypothèse (ii), pour tout $M > 0$, (\mathcal{P}) admet une sursolution \bar{u} telle que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \bar{u}(x) \geq M.$$

Démonstration. — Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset B(0, R)$ et cherchons \bar{u} sous la forme : $\bar{u}(x) = \varphi(r) = ar^{p^*} + b$ avec $r = |x|$, $a < 0$, $b > 0$. On aura bien $\bar{u}(x) \geq M$ si on prend $a = -\frac{b-M}{R^{p^*}}$.

De manière générale, on a :

$$\Delta_p \bar{u} + g(x, \bar{u}) = (p-1)|\varphi'(r)|^{p-2} \varphi''(r) + \frac{(N-1)}{r} |\varphi'(r)|^{p-2} \varphi'(r) + g(x, \bar{u}). \quad (1)$$

Il vient donc ici :

$$\begin{aligned} \Delta_p \bar{u} + g(x, \bar{u}) &\leq -N|ap^*|^{p-1} + \mu + \lambda_2 (ar^{p^*} + b)^{\gamma_2-1} \\ &\leq -N \left(\frac{(b-M)p^*}{R^{p^*}} \right)^{p-1} + \mu + \lambda_2 b^{\gamma_2-1}. \end{aligned}$$

Sachant que $p > \gamma_2$, on pourra choisir b assez grand pour que

$$\Delta_p \bar{u} + g(x, \bar{u}) \leq 0. \square$$

LEMME 2. — Sous l'hypothèse (i), pour tout $M > 0$, \mathcal{P} admet une sous solution $\underline{u} \neq 0$ telle que :

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 \leq \underline{u}(x) \leq M.$$

Démonstration. — Supposons pour simplifier les notations que $0 \in \Omega$ et considérons $R > 0$ tel que $B(0, R) \subset \Omega$. Cherchons \underline{u} sous la forme :

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} \alpha|x|^{p^*} + \beta & \text{pour } 0 \leq |x| \leq \frac{NR}{N+1} \\ \delta(R - |x|)^{p^*} & \text{pour } \frac{NR}{N+1} < |x| \leq R \\ 0 & \text{pour } x \in \Omega \setminus B(0, R) \end{cases}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta = \left(\frac{\lambda_1 R^p}{(N+1)^{\gamma_1} (p^*)^{p-1}} \right)^{1/(p-\gamma_1)} \\ \alpha = -\frac{\beta}{R^{p^*}} \left(\frac{N+1}{N} \right)^{p^*-1} \\ \delta = -\alpha N^{p^*-1}. \end{cases}$$

Les deux dernières relations assurent que $\underline{u} \in C^1(\bar{\Omega})$; de plus $\underline{u} \geq 0$, $u \neq 0$ dans Ω et $\underline{u} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Sachant que $p > \gamma_1$, on peut choisir R assez petit pour que $\beta \leq M$ et donc $\underline{u} \leq M$ dans Ω .

De plus, pour $\frac{NR}{N+1} \leq |x| \leq R$, il vient avec (1) :

$$\begin{aligned} \Delta_p \underline{u} + g(x, \underline{u}) &= (\delta p^*)^{p-1} \left(1 - \frac{(N-1)(R-r)}{r} \right) + g(x, \bar{u}) \\ &\geq (\delta p^*)^{p-1} \left(N - \frac{(N-1)(N+1)}{N} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Et pour $0 \leq |x| \leq \frac{NR}{N+1}$:

$$\begin{aligned} \Delta_p \underline{u} + g(x, \underline{u}) &\geq -N|\alpha p^*|^{p-1} + \lambda_1 \left(\alpha \left(\frac{NR}{N+1} \right)^{p^*} + \beta \right)^{\gamma_1-1} \\ &\geq -\frac{N+1}{R^p} (\beta p^*)^{p-1} + \lambda_1 \left(\frac{\beta}{N+1} \right)^{\gamma_1-1} = 0 \end{aligned}$$

par choix de β . D'où le résultat. \square

Démonstration du théorème 1. — Il résulte des lemmes 1 et 2 qu'il existe \bar{u} sursolution et \underline{u} sous solutions de (\mathcal{P}) telles que $\underline{u} \leq \bar{u}$. D'après le théorème de DEUEL et HESS [2], il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ et :

$$\Delta_p u + g(x, u) = 0.$$

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

Evidemment $u \in L^\infty(\Omega)$; d'après TOLKSDORF [19], il existe alors $\alpha > 0$ tel que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Il résulte donc du principe du maximum de VAZQUEZ [20] que :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) > 0.$$

Par ailleurs pour $1 < p \leq 2$, $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ [16] et pour $p > 2$, $u \in B_{\infty,loc}^{p^*,p}(\Omega)$ [14].

Enfin l'unicité résulte d'un théorème de DIAZ et SAA [4]. \square

THÉORÈME 2. — *On suppose :*

- (i) $\forall x \in \Omega, \forall u > 0, g(x, u) > 0$;
- (ii) $u \rightarrow g(x, u)$ dérivable et telle que :

$$\forall M, \sup_{\substack{|u| \leq M \\ x \in \Omega}} \left| \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) \right| \leq K_M < +\infty;$$

- (iii) $g(x, u) = o(u^{p-1})$ quand $u \rightarrow 0$, uniformément en x ;
- (iv) il existe $a \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) > 0$ dans Ω , et $\gamma \in]p, \bar{\gamma}[$ avec $\bar{\gamma} = +\infty$ si $p \geq N$ et $\bar{\gamma} = \frac{Np}{N-p}$ si $p < N$ tels que, pour u suffisamment grand :

$$g(x, u) = a(x)u^{\gamma-1}.$$

Alors \mathcal{P} admet au moins une solution u .

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses du théorème 2, $u \in L^\infty(\Omega)$, ne s'annule pas dans Ω et possède les propriétés de régularité suivantes :*

$$\begin{aligned} \text{Si } 1 < p \leq 2, & \quad u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,p}(\Omega); \\ \text{si } p > 2, & \quad u \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap B_{\infty,loc}^{p^*,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2. — Il suffit d'adapter au problème (\mathcal{P}) la démonstration de NIRENBERG [9] en appliquant le lemme de Passe-Montagne à la fonction $J(u) = A(u) - B(u)$ où

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p = \frac{1}{p} \|u\|_X^p, & X &= W_0^{1,p}(\Omega) \\ B(u) &= \int_{\Omega} G(x, u(x)) dx, & G(x, u) &= \int_0^u g(x, v) dv. \end{aligned}$$

a) Pour montrer que A est de classe C^1 sur X , il suffit de voir que d'après une relation algébrique de SIMON [14] et l'inégalité de HÖLDER :

$$\begin{aligned} \|A'(u_1) - A'(u_2)\|_{X'} &\leq \|F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)\|_{p^*} \\ &\leq c \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_p^{\alpha-1} \{\|\nabla u_1\|_p + \|\nabla u_2\|_p\}^{p-\alpha} \end{aligned}$$

avec $\alpha = p$ si $1 < p \leq 2$, $\alpha = 2$ si $p > 2$.

De plus g étant régulière, B est de classe C^1 .

b) Soit $(u_n) \subset X$ telle que $J(u_n)$ soit bornée et $J'(u_n) \rightarrow 0$. On montre comme dans [9] que $\|u_n\|_X$ est bornée; par compacité de l'injection de X dans $L^\gamma(\Omega)$, une sous-suite encore notée u_n , converge dans $L^\gamma(\Omega)$. Soit

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_{\Omega} [F(\nabla u_n) - F(\nabla u_m)] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m) \\ I_{n,m} &= \langle J'(u_n) - J'(u_m), u_n - u_m \rangle + \int_{\Omega} [g(x, u_n) - g(x, u_m)] (u_n - u_m). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} I_{n,m} = 0$.

Or F vérifie la relation algébrique [14] :

$$\begin{aligned} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p &\leq c \{ [F(\nabla u_n) - F(\nabla u_m)] \cdot (\nabla u_n - \nabla u_m) \}^{\alpha/2} \\ &\quad (|\nabla u_n|^p + |\nabla u_m|^p)^{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

avec $\alpha = p$ si $1 < p \leq 2$ et $\alpha = 2$ si $p > 2$.

Par application de l'inégalité de HÖLDER, on en déduit :

$$\|u_n - u_m\|_X^p \leq c(I_{n,m})^{\alpha/2} \{\|u_n\|_X^p + \|u_m\|_X^p\}^{1-\alpha/2}$$

et donc $\lim_{n,m} \|u_n - u_m\|_X = 0$.

X étant complet, la suite u_n converge dans X et la condition de PALAIS-SMALE est vérifiée.

c) $J(0) = 0$ et, étant donné u_0 tel que $J(u_0) > 0$, $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} J(\mu u_0) = -\infty$, d'où l'existence de $v_0 \neq 0$ tel que $J(v_0) = 0$.

Enfin pour tout $\varepsilon > 0$, on montre comme [9] que

$$J(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|_X^p - C(\varepsilon \|u\|_X^p + C_\varepsilon \|u\|_X^\gamma)$$

et donc pour $\|u\|_X = \alpha$ assez petit, $J(u) \geq \beta > 0$.

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

De a), b), c), on déduit l'existence de $u \neq 0$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que :

$$\forall v \in X, \quad \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla v - \int_{\Omega} g(x, u)v = 0$$

$g(x, u)$ pouvant être prise ≥ 0 pour tout u , on montre en prenant $v = \bar{u}$ que $u \geq 0$. \square

Démonstration du théorème 3. — Montrons d'abord que $u \in L^{\infty}(\Omega)$. La démonstration est quasiment celle d'OTANI [12] que nous allons inclure ici pour que l'exposé soit plus complet. Le résultat étant évident si $p > N$, nous supposons $p \leq N$ et définissons :

$$\pi = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{si } p < N \\ \max(2p, 2\gamma) & \text{si } p = N. \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite :

$$q_k = \left\{ \left(\frac{\pi}{p} \right)^{k-1} (\pi - \gamma) - (p - \gamma) \right\} \frac{\pi}{\pi - p}$$

$q_1 = \pi$ et pour tout k , on a :

$$q_{k+1} = (q_k + p - \gamma) \frac{\pi}{p}.$$

LEMME 3. — $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u \in L^{q_k}(\Omega)$ et de plus $\|u\|_{\infty} = \overline{\lim} \|u\|_{q_k} < +\infty$.

Démonstration du lemme 3. — Montrons par récurrence que $u \in L^{q_k}(\Omega)$.

La propriété est vraie pour $k = 1$, d'après le théorème 2, l'injection de $W^{1,p}$ dans L^{π} étant continue [1].

Supposons donc $u \in L^{q_k}$. Les hypothèses du théorème 2 donnent la majoration :

$$\begin{aligned} |g(x, u)| &\leq \mu + \lambda |u|^{\gamma-1} \\ \|g(\cdot, u)\|_{q_k/(\gamma-1)} &\leq \mu (\text{mes } \Omega)^{(\gamma-1)/q_k} + \lambda \|u\|_{q_k}^{\gamma-1}. \end{aligned}$$

Il existe alors une suite $(v_{\varepsilon}) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon} - g(\cdot, u)\|_{q_k/(\gamma-1)} = 0.$$

Considérons u_ε la solution classique, $u_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ du problème

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \begin{cases} -\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon = v_\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon = \operatorname{div} \left[(|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} \nabla u_\varepsilon \right]$.

a) Montrons que u_ε converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Notant $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \varepsilon\}$ et $\alpha = \max(1, 2^{(2-p)/2})$, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \alpha \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 = \varepsilon \int_{\Omega} v_\varepsilon u_\varepsilon. \quad (2)$$

D'où avec l'inégalité de HÖLDER :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \alpha \|v_\varepsilon\|_{\gamma^*} \|u_\varepsilon\|_{\gamma} + \varepsilon^{p/2} \operatorname{mes}(\Omega). \quad (3)$$

La suite v_ε est bornée dans L^{γ^*} puisque $\gamma^* = \frac{\gamma}{\gamma-1} < \frac{qk}{\gamma-1}$; $W^{1,p}$ s'injecte continuellement dans L^γ ; il résulte alors de (3) :

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \leq C \|\nabla u_\varepsilon\|_p + \varepsilon^{p/2} \operatorname{mes}(\Omega).$$

Donc la suite u_ε , bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, admet une sous-suite, encore notée u_ε , faiblement convergente vers $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Définissons dans $L^p(\Omega)$:

$$\Phi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \int_{\Omega} (|\nabla z|^2 + \varepsilon)^{p/2} & \text{si } z \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$-\Delta_p^\varepsilon$ étant le sous-différentiel de Φ_ε , on a :

$$\forall z \in L^p(\Omega), \quad \Phi_\varepsilon(z) \geq \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) + \int_{\Omega} v_\varepsilon(z - u_\varepsilon).$$

Sachant que, pour tout z , $\Phi_\varepsilon(z) \geq \Phi_0(z)$, il vient, par semi-continuité inférieure faible de Φ_0 dans $W^{1,p}$:

$$\forall z \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \Phi_0(z) \geq \Phi_0(w) + \int_{\Omega} g(\cdot, u)(z - u)$$

qui implique $-\Delta_p w = g(\cdot, u)$ et donc $w = u$ par unicité.

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

b) Montrons que $u \in L^{q^{k+1}}(\Omega)$. Soit $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq k$. Multipliant l'équation par $|u_\varepsilon|^{q^m - \gamma} u_\varepsilon$, on a comme dans (3) :

$$\begin{aligned} (q_m - \gamma + 1) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma} &\leq \alpha \int_{\Omega} v_\varepsilon |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma} u_\varepsilon + \varepsilon^{p/2} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma} \\ &\leq \alpha \|v_\varepsilon\|_{q_m/(\gamma-1)} \| |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma + 1} \|_{(q_m/(\gamma-1))^*} \\ &\quad + \varepsilon^{p/2} (\text{mes}(\Omega))^{\gamma/q_m} \| |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma} \|_{q_m/(q_m - \gamma)} \\ &\leq (C_1 + C_2 \|u_\varepsilon\|_{q_m}^{\gamma-1}) \|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q^m - \gamma + 1} + C_3 \|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q^m - \gamma}. \end{aligned}$$

D'où, par application de l'inégalité de YOUNG :

$$(q_m - \gamma + 1) \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma} \leq C_4 + C_5 \|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q_m}. \quad (4)$$

Par ailleurs il existe une constante K telle que [1] :

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|w\|_\pi \leq K \|\nabla w\|_p,$$

donc :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{q_m + p}^{q_m + p - \gamma} &= \| |u_\varepsilon|^{1 + \frac{q_m - \gamma}{p}} \|_\pi^p \leq K^p \int_{\Omega} \left| \nabla \left(u_\varepsilon^{1 + \frac{q_m - \gamma}{p}} \right) \right|^p \\ &\leq \left(1 + \frac{q_m - \gamma}{p} \right)^p K^p \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p |u_\varepsilon|^{q^m - \gamma}. \end{aligned}$$

Il en résulte alors avec (4) :

$$\|u_\varepsilon\|_{q_m + p}^{q_m + p - \gamma} \leq \{C_6 + C_7 \|u_\varepsilon\|_{q_m}^{q_m}\} (q_m + p - \gamma)^p.$$

On en déduit par récurrence sur m que u_ε est borné dans chaque L^{q^m} , $1 \leq m \leq k + 1$ et donc $u \in L^{q^{k+1}}(\Omega)$.

c) La relation ci-dessous montre en particulier que u_ε est borné dans $L^{q^{k+1}}$; sachant de plus que ∇u_ε est borné dans L^p , il résulte du théorème de RELICH (voir par exemple [15], p. 22) qu'une sous suite extraite de u_ε converge fortement vers u dans L^{q^k} . On obtient donc à la limite la relation :

$$\left(\|u\|_{q_{k+1}}^{q_{k+1}} \right)^{\frac{2}{p}} \leq \{C_6 + C_7 \|u\|_{q^k}^{q^k}\} (q_k + p - \gamma)^p.$$

Remarquant que $q_k \leq \pi \left(\frac{\pi}{p} \right)^{k-1}$ et posant :

$$a = \frac{\pi}{p}, \quad b = \frac{\pi}{p} \log \max\{1, C_6 + C_7\},$$

$$E_k = q_k \log \max\{1, \|u\|_{q^k}\}, \quad r_k = b + \pi(k-1) \log a,$$

il vient :

$$E_{k+1} \leq r_k + aE_k \leq r_k + ar_{k-1} + \dots + a^{k-1}r_1 + a^k E_1.$$

Des calculs élémentaires donnent alors :

$$E_{k+1} \leq a^k \left\{ E_1 + \frac{b}{a-1} + \frac{\pi \log a}{(a-1)^2} \right\} = da^k.$$

D'où l'on tire

$$\|u\|_\infty \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{E_k}{q_k}\right) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{da^{k-1}}{q_k}\right) \leq \exp\left(\frac{d}{\pi}\right). \square$$

FIN de la DÉMONSTRATION du THÉORÈME 3. — Grâce au lemme 3, la fin de la démonstration est analogue à celle du théorème 1. \square

III. Non existence

Nous dirons que l'ouvert Ω est étoilé [respectivement strictement étoilé] si, pour un choix convenable de l'origine, $n(x) \cdot x \geq 0$ [respectivement $n(x) \cdot x \geq \rho > 0$] pour tout $x \in \partial\Omega$, où $n(x)$ désigne la normale extérieure en $x \in \partial\Omega$.

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons au cas où la fonction g ne dépend que de u ; le résultat principal est le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit g une fonction continue sur \mathbf{R} telle que :*

$$g(u) > 0 \text{ pour } u > 0.$$

Considérons :

$$G(u) = \int_0^{|u|} g(v) dv.$$

On suppose que l'une des deux hypothèses suivantes est réalisée :

- (i) Ω est étoilé et $u \rightarrow \frac{G(u)}{u^{Np/(N-p)}}$ est strictement croissante;
- (ii) Ω est strictement étoilé et $u \rightarrow \frac{G(u)}{u^{Np/(N-p)}}$ est croissante.

Alors le problème (\mathcal{P}) n'admet pas de solution $u \in L^\infty(\Omega)$.

Remarque. — NI et SERRIN [8] ont prouvé un résultat analogue pour des solutions radiales singulières.

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

Comme dans [8], [17], la démonstration de ce théorème utilise essentiellement une égalité de type POHOZAEV [13]. Nous allons reprendre en partie l'idée de la démonstration d'OTANI [12].

Démonstration. — Par l'absurde. Supposons que (\mathcal{P}) admette une solution $u \in L^\infty(\Omega)$; alors $g(u) \in L^\infty(\Omega)$ et il existe $(v_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon - g(u)\|_{p^*} = 0.$$

Soit u_ε la solution classique $u \in C^2(\overline{\Omega})$ du problème (\mathcal{P}) . On note $F_i^\varepsilon = (|\nabla u_\varepsilon| + \varepsilon)^{p-2/2} D_i u_\varepsilon$ et $F^\varepsilon = (F_1^\varepsilon, \dots, F_N^\varepsilon)$.

LEMME 4. — u_ε converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration du lemme 4. — Reprenons la démonstration du lemme 3; nous avons d'après (2) :

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^p \leq \alpha \int_{\Omega} v_\varepsilon u_\varepsilon + \varepsilon^{p/2} \text{mes}(\Omega).$$

D'après l'inégalité de POINCARÉ il existe $c > 0$ tel que :

$$\|u_\varepsilon\|_p^p \leq c \|\nabla u_\varepsilon\|_p^p,$$

d'où

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_p^p \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_\varepsilon\|_p^p + \left(\frac{2c}{p}\right)^{p^*/p} \frac{\alpha^{p^*}}{p^*} \|v_\varepsilon\|_{p^*}^{p^*} + \varepsilon^{p/2} \text{mes}(\Omega).$$

On en déduit que u_ε est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et, comme pour le lemme 3, converge faiblement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. \square

LEMME 5. — u vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} & -p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) v_\varepsilon - (N-p) \int_{\Omega} u_\varepsilon v_\varepsilon - N\varepsilon \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} \\ & = (p-1) \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 (x \cdot n) d\sigma \\ & \quad - \varepsilon \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} (x \cdot n) d\sigma. \end{aligned} \tag{5}$$

Démonstration du lemme 5. — u_ε étant constant sur $\partial\Omega$, ∇u_ε est porté par la normale extérieure n en $x \in \partial\Omega$ et il vient par la formule de GAUSS :

$$\begin{aligned}
 & p \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 (x \cdot n) \, d\sigma \\
 &= p \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) (F^\varepsilon \cdot n) \, d\sigma \\
 &= p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} F_i^\varepsilon + p \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) F_i^\varepsilon \\
 &= p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) \Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon + p \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} F_i^\varepsilon \\
 &\quad + p \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &= -p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) v_\varepsilon + p \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 \\
 &\quad + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{p/2}.
 \end{aligned}$$

De même pour la formule de GAUSS :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{\frac{p}{2}} (x \cdot n) \, d\sigma \\
 &= N \int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{p/2} + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{p/2}.
 \end{aligned}$$

Retranchant membre à membre ces deux relations, on déduit (5) puisque :

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} |\nabla u_\varepsilon|^2 = - \int_{\Omega} (\Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon) u_\varepsilon = \int_{\Omega} v_\varepsilon u_\varepsilon. \square$$

LEMME 6. — Si Ω est étoilé, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} (x \cdot n) \, d\sigma &\leq \varepsilon^{p/2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) \, d\sigma && \text{si } 1 < p \leq 2 \\
 \varepsilon \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} (x \cdot n) \, d\sigma &\leq \frac{2\varepsilon^{p/2}}{p} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) \, d\sigma \\
 &+ \frac{p-2}{p} \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{p/2} (x \cdot n) \, d\sigma && \text{si } p > 2.
 \end{aligned}$$

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

Démonstration. — Immédiate. \square

Démonstration du théorème 3, partie (i). — Ω étant étoilé, des lemmes 5 et 6 on déduit,

pour $1 < p \leq 2$:

$$\begin{aligned} & -p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_{\varepsilon}) v_{\varepsilon} - (N-p) \int_{\Omega} u_{\varepsilon} v_{\varepsilon} \\ & \geq (p-1) \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon}|^2 + \varepsilon)^{(p-2)/2} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 \cdot (x \cdot n) d\sigma - \varepsilon^{p/2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) d\sigma \\ & \geq -\varepsilon^{p/2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) d\sigma \end{aligned}$$

et pour $p > 2$:

$$\begin{aligned} & -p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_{\varepsilon}) v_{\varepsilon} - (N-p) \int_{\Omega} u_{\varepsilon} v_{\varepsilon} \\ & \geq [(p-1) - (p-2)/p] \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon}|^2 + \varepsilon)^{p/2} (x \cdot n) d\sigma - \frac{2\varepsilon^{p/2}}{p} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) d\sigma \\ & \geq -\frac{2\varepsilon^{p/2}}{p} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) d\sigma. \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il en résulte avec le lemme 4, pour $1 < p < +\infty$:

$$-p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) g(u) - (N-p) \int_{\Omega} u g(u) \geq 0. \quad (6)$$

Or $G(u)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc :

$$\int_{\Omega} (x \cdot \nabla u) g(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} G(u) = -N \int_{\Omega} G(u). \quad (7)$$

Enfin, sachant que $u \rightarrow \frac{G(u)}{u^{Np/(N-p)}}$ est strictement croissante.

$$-u^{Np/(N-p)} g(u) + \frac{Np}{(N-p)} u^{-1+Np/(N-p)} G(u) < 0 \quad (8)$$

d'où une contradiction avec (6), (7), (8). \square

Démonstration du théorème 3, partie (ii). — Supposons Ω strictement étoilé. Les lemmes 5 et 6 donnent toujours :

$$\begin{aligned} & -p \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u_{\varepsilon}) v_{\varepsilon} - (N-p) \int_{\Omega} u_{\varepsilon} v_{\varepsilon} \\ & \geq \min\left(\frac{2}{p}, p-1\right) \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_{\varepsilon}|^2 + \varepsilon)^{p/2} (x \cdot n) d\sigma - \varepsilon^{p/2} \int_{\partial\Omega} (x \cdot n) d\sigma. \end{aligned} \quad (9)$$

Or d'après HÖLDER :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{p/2} (x \cdot n) \, d\sigma \\
 & \geq \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\partial\Omega} (|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon)^{(p-1)/2} \, d\sigma \right|^{p/(p-1)} \\
 & \geq \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\partial\Omega} F^\varepsilon \cdot n \, d\sigma \right|^{p^*} \\
 & \geq \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\Omega} \Delta_p^\varepsilon u_\varepsilon \right|^{p^*} \\
 & = \frac{\rho}{(\text{mes}\partial\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\Omega} v_\varepsilon \right|^{p^*}.
 \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit avec (9) et le lemme 4 :

$$Np \int_{\Omega} G(u) - (N-p) \int_{\Omega} u g(u) \geq \frac{\rho \min\left(\frac{2}{p}, p-1\right)}{(\text{mes}\partial\Omega)^{1/(p-1)}} \left| \int_{\Omega} g(u) \right|^{p^*} > 0$$

d'où une contradiction. \square

Remerciements. — L'auteur remercie M. OTANI pour ses intéressantes remarques.

Références

- [1] ADAMS (R.A.) .— *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] DEUEL-HESS .— A criterion for the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, Proc. Royal Soc. Edimburgh A, vol. 74, 1975, p. 49-54.
- [3] DIAZ (J.I.) .— Nonlinear partial differential equations and free boundaries, I-Elliptic equations, Pitmann n° 106, 1985.
- [4] DIAZ-SAA .— Uniqueness of non-negative solutions for elliptic nonlinear diffusion equations with a general perturbation term, Proc. VII - Cedy, Santander, 1985.
- [5] LIONS (J.L.) .— *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.
- [6] NI-SERRIN .— Nonexistence theorems for quasilinear partial differential equations, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, Suppl. Studies.
- [7] NI-SERRIN .— Existence and nonexistence theorems for ground states for quasilinear partial differential equations, Proc. Acad. Lincei (à paraître).

Résultats d'existence et de non-existence pour une e.d.p. elliptique non linéaire

- [8] NI-SERRIN .— Nonexistence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations, *Comm. Pure Appl Math*, 34, 1986, p. 379-399.
- [9] NIRENBERG .— Variational and topological method in nonlinear problems, *Bulletin of the A.M.S.*, vol. 4 n° 3, 1981, p. 267-302.
- [10] OTANI (M.) .— On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev - Poincaré - type inequalities, *Nonlinear Analysis T.M.A.* n° 8, 1984, p. 1255-1270.
- [11] OTANI (M.) .— A remark on certain nonlinear elliptic equations, *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.* n° 19, 1984, p. 23-28.
- [12] OTANI (M.) .— Existence and nonexistence of nontrivial solutions of some nonlinear degenerate elliptic equations, *J. Functional Analysis*, vol. 76 n°1, 1988, p. 140-159.
- [13] POHOZAEV (S.I.) .— Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet. Math. Dokl.* n° 6, 1965, p. 1408-1411.
- [14] SIMON (J.) .— Sur des équations aux dérivées partielles non-linéaires, Thèse, Paris, 1977.
- [15] STRAUSS (W.A.) .— The energy method in non linear partial differential equations, *Notas de Matematica* n°47, Rio de Janeiro, 1969.
- [16] DE THELIN (F.) .— Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation, *Nonlinear Analysis T.M.A.* vol. 6 n° 8, 1982, p. 839-844.
- [17] DE THELIN (F.) .— Quelques résultats d'existence et de non existence pour une E.D.P. elliptique non linéaire, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 299, série I n° 18, 1984, p. 911-914.
- [18] DE THELIN (F.) .— Sur l'espace propre associé à la première valeur propre du pseudo-laplacien, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 303, série I, n° 8, 1986, p. 355-357.
- [19] TOLKSDORF (P.) .— On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points, *Comm. P.D.E.*, n° 8, 1983, p. 773-817.
- [20] VAZQUEZ (J.L.) .— A strong maximum principle for somme quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. and Optimization* n° 12, 1984, p. 191-202.

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1986)