ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

EUGÈNE OKASSA

Prolongement des champs de vecteurs à des variétés de points proches

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 3 (1986-1987), p. 349-366

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_349_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°3, 1986-1987

Prolongement des champs de vecteurs a des variétés de points proches

EUGÈNE OKASSA[1] [2]

RÉSUMÉ. — Etant donné une variété différentielle paracompacte M de classe C^∞ et une algèbre locale A de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ayant un idéal maximal de codimension 1, on note M^A la variété des points proches de M d'espèce A. On utilise la structure de A-module sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M^A pour donner une caractérisation des prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M.

ABSTRACT. — Given a differentiable paracompact manifold M of class C^∞ and a local algebra A of finite dimension 1 over $\mathbf{R}$ such that the maximal ideal is of codimension 1 over $\mathbf{R}$, we denote by M^A the bundle of near points of A-kind on M. Using the A-module structure on the Lie algebra of vector fields on M^A, we give a characterization of the prolongations to M^A of the vector fields on M.

0. Introduction

Dans tout ce qui suit, on entend par "*variété différentielle*" ou tout simplement "*variété*" une variété différentielle, paracompacte de classe C^∞ et par "*algèbre locale*" une algèbre commutative, unitaire de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ayant un idéal maximal unique de codimension 1. Si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal, le plus petit entier k tel que $\mathfrak{m}^{k+1} = (0)$ est la hauteur de l'algèbre locale.

Etant donné une variété différentielle M et une algèbre locale A, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, un point proche de $x \in M$ d'espèce A est un homomorphisme

(1) Université de Grenoble I Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques B.P. 74, 38402 St Martin dHères - France
(2) Université Marien NGouabi Faculté des Sciences Département de Mathématiques B.P. 69, Brazzaville - Congo

d'algèbres ξ de $C^\infty(M)$ [algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M] dans A tel que $\xi(f) \equiv f(x) \bmod \mathfrak{m}$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ ([5]). Si M_x^A désigne l'ensemble des points proches de x d'espèce A, $M^A = \cup_{x \in M} M_x^A$ est une variété différentielle de dimension $n \cdot \dim A$ où $n = \dim M$: c'est la variété des points proches de M d'espèce A. On a une fibration canonique $\pi : M^A \to M$: c'est le fibré des points proches. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales sur un ouvert U de M, si $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est une base de A et si $(a_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est la base duale, les applications $\xi \mapsto a_\alpha^*[\xi(x_i)]$ pour $\alpha \in \mathcal{J}$ et $i = 1, \ldots, n$ sont un système de coordonnées locales sur $\pi^{-1}(U)$.

Lorsque $A = \mathbf{D} = \mathbf{R}[T]/(T^2)$ est l'algèbre des nombres duaux, $M^{\mathbf{D}}$ s'identifie à l'espace tangent TM. Plus généralement lorsque $A = \mathbf{R}[T_1, \ldots, T_s]/(T_1, \ldots, T_s)^{k+1}$, M^A est l'espace $J_0^k(\mathbf{R}^s, M)$ des jets d'ordre k des applications de classe C^∞ de $\mathbf{R}^s$ dans M ayant pour source $0 \in \mathbf{R}^s$. Plus particulièrement lorsque $A = \mathbf{R}[T_1, \ldots, T_n]/(T_1, \ldots, T_n)^{k+1}$ où $n = \dim M$, l'ouvert de M^A constitué des points proches de rang maximum est l'espace $P^k(M)$ des repères d'ordre k sur M.

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$, E^A s'identifie à $A \otimes E$. En particulier $\mathbf{R}^A$ s'identifie à A.

Si $f \in C^\infty(M)$, l'application $f^A : \xi \mapsto \xi(f)$ de M^A dans A est une application différentiable de classe C^∞ : c'est le prolongement de f sur M^A à valeurs dans A. L'application $\gamma : C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$ qui à toute fonction numérique f de classe C^∞ sur M associe son prolongement f^A sur M^A à valeurs dans A est un homomorphisme d'algèbres. Si $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est une base de A et si $(a_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ est la base duale, pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a : $\gamma(f) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes (a_\alpha^* \circ f^A)$.

THÉORÈME 0 (Weil [5]). — *Etant donné une variété différentielle M et deux algèbres locales A et B, l'application $\eta \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes \eta) \circ \gamma$ de $(M^A)^B$ dans $M^{A \otimes B}$ est un isomorphisme de variétés différentielles.*

Si $\varphi : F_1 \to F_2$ est un homomorphisme d'algèbres, une application $\partial : F_1 \to F_2$ est une φ-dérivation si ∂ est linéaire et si $\partial(xy) = \varphi(x)\partial(y) + \partial(x)\varphi(y)$ pour tous x, y dans F_1. Lorsque $F_1 = F_2$, une dérivation de F_1 est une id_{F_1}-dérivation.[3]

1. Conséquences du Théorème de Weil

Si ξ est un point proche de M d'espèce A, on note $\mathrm{Der}_\xi\left(C^\infty(M), A\right)$ l'espace des ξ-dérivations de $C^\infty(M)$ dans A.

PROPOSITION 1.— *Pour tout $\xi \in M^A$, l'application $W \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes W)\circ\gamma$ de $T_\xi M^A$ dans $\mathrm{Der}_\xi\left(C^\infty(M), A\right)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration.— Soit $x_0 \in M$ et ξ un point proche de x_0 d'espèce A. L'application $W \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes W)\circ\gamma$ de $T_\xi M^A$ dans $\mathrm{Der}_\xi\left(C^\infty(M), A\right)$ est $\mathbf{R}$-linéaire.

Surjection. Si $\mathbf{D}$ est l'algèbre des nombres duaux sur $\mathbf{R}$, on désigne $(1,\varepsilon)$ une base de $\mathbf{D}$ où 1 est l'élément unité de $\mathbf{D}$, ε un élément tel que $\varepsilon^2 = 0$ et $(1^*,\varepsilon^*)$ la base duale. Soit $\varphi : C^\infty(M) \to A$ une ξ-dérivation. L'application $\widetilde{\varphi} : f \mapsto \xi(f)\otimes 1 + \varphi(f)\otimes\varepsilon$ de $C^\infty(M)$ dans $A\otimes\mathbf{D}$ est point proche de x_0 d'espèce $A\otimes\mathbf{D}$. Il existe, d'après le théorème de Weil, un point proche $\psi : C^\infty(M^A) \to \mathbf{D}$ de M^A d'espèce $\mathbf{D}$ tel que : $(\mathrm{id}_A\otimes\psi)\circ\gamma = \widetilde{\varphi}$. On vérifie que ψ est un point proche de ξ d'espèce $\mathbf{D}$. L'application $\varepsilon^*\circ\psi : C^\infty(M^A)\to\mathbf{R}$ est un vecteur tangent en ξ tel que : $[\mathrm{id}_A\otimes(\varepsilon^*\circ\psi)]\circ\gamma = \varphi$.

Injection. Si $(\mathrm{id}_A\otimes W)\circ\gamma = 0$, on a : $W(a_\alpha^*\circ f^A) = 0$ pour tous $\alpha\in\mathcal{J}$ et $f\in C^\infty(M)$. Il s'ensuit que $W = 0$.

Un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M (resp. sur M^A) sera identifié à une dérivation de $C^\infty(M)$ [resp. de $C^\infty(M^A)$]. On note $\mathcal{X}(M)$ [resp. $\mathcal{X}(M^A)$] le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M [resp. le $C^\infty(M^A)$-module des champs de vecteurs sur M^A].

PROPOSITION 2.— *L'application $X \mapsto (\mathrm{id}_A\otimes X)\circ\gamma$ est un isomorphisme du $C^\infty(M^A)$-module $\mathcal{X}(M^A)$ sur le module $\mathrm{Der}_\gamma[C^\infty(M), A\otimes C^\infty(M^A)]$.*

Démonstration.— *Injection.* Evident. *Surjection.* Pour tout $\xi\in M^A$, on note $\widetilde{\xi} : F\mapsto F(\xi)$ de $C^\infty(M^A)$ dans $\mathbf{R}$: c'est un point proche de ξ d'espèce $\mathbf{R}$. On a : $(\mathrm{id}_A\otimes\widetilde{\xi})\circ\gamma = \xi$. Soit $\varphi : C^\infty(M)\to A\otimes C^\infty(M^A)$ une γ-dérivation. L'application $(\mathrm{id}_A\otimes\widetilde{\xi})\circ\varphi : C^\infty(M)\to A$ est une ξ- dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur tangent à M^A en ξ et un seul

[3] Je remercie Monsieur le Professeur Jean-Louis Koszul dont les remarques et les suggestions ont permis l'élaboration de cet article.

W_ξ tel que $(\mathrm{id}_A \otimes W_\xi) \circ \gamma = (\mathrm{id}_A \otimes \widetilde{\xi}) \circ \varphi$. L'application $W : M^A \to TM^A$ qui à ξ associe W_ξ est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M^A. Le champ de vecteurs W considéré comme dérivation de $C^\infty(M^A)$ vérifie : $(\mathrm{id}_A \otimes W) \circ \gamma = \varphi$.

2. Structure de A-module dans $T_\xi M^A$ et $\mathcal{X}(M^A)$

1.— Etant donné $a \in A$, on note $\mu_a : A \to A$ la multiplication par a dans A. Soit $\xi \in M^A$ et $W \in T_\xi M^A$. Pour tout $a \in A$, $(\mu_a \otimes W) \circ \gamma : C^\infty(M) \to A$ est une ξ-dérivation. D'après la proposition 1, il existe un vecteur aW dans $T_\xi M^A$ et un seul tel que $(\mathrm{id}_A \otimes aW) \circ \gamma = (\mu_a \otimes W) \circ \gamma$. L'application $(a, W) \mapsto aW$ est une structure de A-module dans $T_\xi M^A$. Pour tout $\xi \in M^A$, $T_\xi M^A$ est un A-module libre de rang $\dim M$.

PROPOSITION 3.— *Si I est un idéal de A, pour tout $\xi \in M^A$, $I \cdot T_\xi M^A$ est un espace vectoriel de dimension $n \cdot \dim I$ où $n = \dim M$. En particulier pour tout $a \in A$, $\dim(a \cdot T_\xi M^A) = n \cdot \mathrm{rang}(\mu_a)$.*

Démonstration.— Soit $x_0 \in M$ et ξ un point proche de x_0. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales dans un voisinage de x_0. On note encore $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ les coordonnées sur M^A définies au voisinage de $\pi^{-1}(x_0)$ par : $x_i \circ \pi$ où $\pi : M^A \to M$ est la projection canonique. Pour toute base $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{H}}$ de I, les vecteurs $(a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i})(\xi)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ forment une base de $I \cdot T_\xi M^A$.

Soit X un champ de vecteurs sur M^A. Pour tout $a \in A$, on note aX le champ de vecteurs sur M^A défini par : $(aX)(\xi) = a \cdot X(\xi)$ pour tout $\xi \in M^A$. Si X est de classe C^∞, alors aX est de classe C^∞.

Puisque pour tout $\xi \in M^A$, $(aX)(\xi) = a \cdot X(\xi)$, alors

$$[\mathrm{id}_A \otimes (aX)(\xi)] \circ \gamma = [\mathrm{id}_A \otimes a \cdot X(\xi)] \circ \gamma = [\mu_a \otimes X(\xi)] \circ \gamma.$$

Il en résulte que $(\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma = (\mu_a \otimes X) \circ \gamma$. Comme $(\mu_a \otimes X) \circ \gamma : C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$ est une γ-dérivation, on déduit, d'après la proposition 2 que aX est l'unique champ de vecteurs sur M^A caractérisé par $(\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma = (\mu_a \otimes X) \circ \gamma$. L'application $(a, X) \mapsto aX$ de $A \times \mathcal{X}(M^A)$ dans $\mathcal{X}(M^A)$ est une structure de A-module dans $\mathcal{X}(M^A)$.

Exemple.— Lorsque $A = \mathbf{R}[T]/(T^3)$, M^A est le fibré tangent d'ordre 2. Soit $(1, e, e^2)$ avec $e^3 = 0$ une base de A et $(1^*, e^*, (e^2)^*)$ la base duale. Soit

$(x_1, \dots, x_n)$ un système de coordonnées locales dans un ouvert U de M. Les applications $(x_i = 1^* \circ x_i^A ; y_i = e^* \circ x_i^A ; z_i = (e^2)^* \circ x_i^A)$ pour $i = 1, \dots, n$ sont un système de coordonnées sur $\pi^{-1}(U)$. On a : $\gamma(x_i) = 1 \otimes x_i + e \otimes y_i + e^2 \otimes z_i$. Si X est un champ de vecteurs sur M^A dont l'expression sur $\pi^{-1}(U)$ est

$$X = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

(où p_i, q_i, r_i pour $i = 1, 2, , \dots, n$ sont des fonctions C^∞ sur $\pi^{-1}(U)$), en écrivant $(\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma(x_i) = (\mu_a \otimes X) \circ \gamma(x_i)$ avec $a \in A$ et pour tout $i = 1, \dots, n$ on obtient :

$$\begin{aligned} eX &= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial}{\partial z_i} \\ e^2 X &= \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial z_i} \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉS .— *i)* $a(\psi \cdot X) = \psi \cdot aX$ *pour tous* $a \in A$, $\psi \in C^\infty(M^A)$, $X \in \mathcal{X}(M^A)$

ii) $[aX, aY] = a[aX, Y] + a[X, aY] - a^2[X, Y]$ *pour tous* $a \in A$, X *et* Y *dans* $\mathcal{X}(M^A)$.

Démonstration.— ii) Calculons :

$$\begin{aligned} &\left[\mathrm{id}_A \otimes \left([aX, aY] - a[aX, Y] - a[X, aY] + a^2[X, Y]\right)\right] \circ \gamma \\ &\quad = \left(\mathrm{id}_A \otimes [aX, aY]\right) \circ \gamma - \left(\mu_a \otimes [aX, Y]\right) \circ \gamma - \left(\mu_a \otimes [X, aY]\right) \circ \gamma \\ &\qquad + \left(\mu_{a^2} \otimes [X, Y]\right) \circ \gamma \\ &\quad = (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma - (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\qquad - (\mu_a \otimes aX) \circ (\mathrm{id}_A \otimes Y) \circ \gamma + (\mu_a \otimes Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\qquad - (\mu_a \otimes X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma + (\mu_a \otimes aY) \circ (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma \\ &\qquad + (\mu_a \otimes X) \circ (\mu_a \otimes Y) \circ \gamma - (\mu_a \otimes Y) \circ (\mu_a \otimes X) \circ \gamma \\ &\quad = (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma - (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\qquad - (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma + (\mu_a \otimes Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\qquad - (\mu_a \otimes X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma + (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma \\ &\qquad + (\mu_a \otimes X) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma - (\mu_a \otimes Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma = 0 \end{aligned}$$

D'où l'assertion.

2.— Soit $I \neq A$ un idéal de A et $q : A \to A/I$ la surjection canonique. On note $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$ l'application de classe C^∞ qui à $\xi \in M^A$ associe $q \circ \xi$ et $\widetilde{q}^T : TM^A \to TM^{A/I}$ l'application linéaire tangente. Un vecteur $W \in T_\xi M^A$ est vertical pour $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$ si $\widetilde{q}^T(W) = 0$.

Soit $\gamma_{A/I} : C^\infty(M) \to A/I \otimes C^\infty(M^{A/I})$ l'homomorphisme d'algèbres qui à toute fonction numérique de classe C^∞ sur M associe son prolongement sur $M^{A/I}$ à valeurs dans A/I. Etant donné $W \in T_\xi M^A$, on vérifie que $[\mathrm{id}_{A/I} \otimes \widetilde{q}^T(W)] \circ \gamma_{A/I} = (q \otimes W) \circ \gamma$. Comme $(q \otimes W) \circ \gamma : C^\infty(M) \to A/I$ est une q-dérivation, on conclut, d'après la proposition 1, que $\widetilde{q}^T(W)$ est l'unique vecteur de $T_{q\circ\xi} M^{A/I}$ tel que $[\mathrm{id}_{A/I} \otimes \widetilde{q}^T(W)] \circ \gamma_{A/I} = (q \otimes W) \circ \gamma$. Il en résulte immédiatement :

PROPRIÉTÉS .— *i) Un vecteur* $W \in T_\xi M^A$ *est vertical pour* $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$ *si et seulement si* $(q \otimes W) \circ \gamma = 0$. *En conséquence un champ de vecteurs* X *sur* M^A *est vertical pour* $M^A \to M^{A/I}$ *si et seulement si* $(q \otimes X) \circ \gamma = 0$.

ii) $\widetilde{q}^T(aW) = q(a)\widetilde{q}^T(W)$ *pour tout* $a \in A$ *et pour tout* $W \in T_\xi M^A$.

Conséquence.— équence Il résulte de la propriété *ii)* ci-dessus et de la proposition 3 que pour tout $\xi \in M^A$, $\widetilde{q}^T : T_\xi M^A \to T_{q\circ\xi} M^{A/I}$ admet pour noyau l'espace $I \cdot T_\xi M^A$. Ainsi l'application $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$ est une submersion.

3. Champs de vecteurs sur M^A associés aux dérivations de A

Etant donné une dérivation d de A, pour tout $\xi \in M^A$, $d\circ\xi : C^\infty(M) \to A$ est une ξ-dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur $d_M(\xi)$ de $T_\xi M^A$ et un seul tel que : $[\mathrm{id}_A \otimes d_M(\xi)] \circ \gamma = -d \circ \xi$. Le champ de vecteurs $d_M : \xi \mapsto d_M(\xi)$ sur M^A ainsi défini est de classe C^∞. Comme $[\mathrm{id}_A \otimes d_M(\xi)] \circ \gamma = -d \circ \xi$ pour tout $\xi \in M^A$, il s'ensuit que : $(\mathrm{id}_A \otimes d_M) \circ \gamma = (-d \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma$. Puisque $(-d \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma : C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$ est une γ-dérivation, le champ de vecteurs d_M est caractérisé, d'après la proposition 2, par : $(\mathrm{id}_A \otimes d_M) \circ \gamma = (-d \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}) \circ \gamma$.

Exemples.— 1) Si $A = \mathbf{D} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}\varepsilon$, où $\varepsilon^2 = 0$, est l'algèbre des nombres duaux sur $\mathbf{R}$, alors $M^{\mathbf{D}}$ est la variété TM des vecteurs tangents à M et si d est la dérivation de $\mathbf{D}$ telle que $d(\varepsilon) = -\varepsilon$, d_M est le champ de vecteurs sur TM qui engendre le flot des homothéties dans les fibres.

2) Si $A = \mathbf{R}[T]/(T^3) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e \oplus \mathbf{R}e^2$, où $e^3 = 0$, M^A est le fibré tangent d'ordre 2. En reprenant les notations de l'exemple du paragraphe 2, on a :

- Si d est la dérivation de A telle que $d(e) = -e$, alors

$$d_M = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} 2z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

- Si d est la dérivation de A telle que $d(e) = -e^2$, alors

$$d_M = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Lorsque d est une dérivation de A, pour tout $t \in \mathbf{R}$, les applications $\Phi_t : \xi \mapsto \exp(-td) \circ \xi$ de M^A dans M^A sont un groupe à un paramètre des difféomorphismes de M^A. Géométriquement, le champ de vecteurs d_M est la transformation infinitésimale de $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbf{R}}$.

PROPRIÉTÉS .— *i) Pour toute dérivation d de A, le champ de vecteurs d_M est vertical pour la fibration $\pi : M^A \to M$.*

ii) Quels que soient $a \in A$ et $d \in \mathrm{Der}(A)$, $(ad)_M = ad_M$.

iii) Quels que soient d et d' dans $\mathrm{Der}(A)$, $[d,d']_M = [d_M, d'_M]$.

iv) Quels que soient $d \in \mathrm{Der}(A)$, $X \in \mathcal{X}(M^A)$, on a :

$$[d_M, aX] = d(a)X + a[d_M, X].$$

Démonstration. — *i)* Soit aug $: A \to \mathbf{R}$ l'augmentation. Si $d \in \mathrm{Der}(A)$, on a :

$$(\mathrm{aug} \otimes d_M) \circ \gamma = [\mathrm{aug} \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ (\mathrm{id}_A \otimes d_M) \circ \gamma.$$

Puisque $(\mathrm{aug}) \circ d = 0$ alors $(\mathrm{aug} \otimes d_M) \circ \gamma = 0$. Compte tenu de la propriété *ii)* du pararaphe 2, on conclut que d_M est vertical pour $\pi : M^A \to M$.

Les autres assertions se vérifient facilement.

Remarque. — Soit A une algèbre locale différente de $\mathbf{R}$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de hauteur k. Soit δ une dérivation non nulle de A dans $\mathbf{R}$ par rapport à l'augmentation. Si a est un élément non nul de $\mathfrak{m}^k$, l'application $x \mapsto a \cdot \delta(x)$ est une dérivation de A qui n'est pas nulle. Ainsi l'espace, $\mathrm{Der}(A)$, des dérivations de A est nul si et seulement si $A = \mathbf{R}$.

4. Familles de champs de vecteurs sur M^A associées aux dérivations de A dans son quotient

Soit $I \neq A$ un idéal de A et $q : A \to A/I$ la surjection canonique.

PROPOSITION 4. — *Soit $\delta : A \to A/I$ une q-dérivation. Il existe des champs de vecteurs Z sur M^A tel que : $[q \otimes Z(\xi)] \circ \gamma = -\delta \circ \xi$ pour tout $\xi \in M^A$. De plus $[(q \otimes Z)] \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$.*

Démonstration. — Soit $\xi \in M^A$. Puisque $\delta : A \to A/I$ est une q-dérivation, $\delta \circ \xi$ est une $q \circ \xi$-dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur W dans $T_{q \circ \xi} M^{A/I}$ et un seul tel que : $(\mathrm{id}_{A/I} \otimes W) \circ \gamma_{A/I} = -\delta \circ \xi$. L'application $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$ étant une submersion, il existe un vecteur V_ξ dans $T_\xi M^A$ tel que $\widetilde{q}^T(V_\xi) = W$: ce qui donne $(q \otimes V_\xi) \circ \gamma = -\delta \circ \xi$. En chaque point $\xi \in M^A$, on se fixe un supplémentaire $\mathcal{V}_\xi$ de $I \cdot T_\xi M^A$ et on note $\overline{V}_\xi$ la composante de V_ξ suivant $\mathcal{V}_\xi$. L'application $Z : \xi \mapsto \overline{V}_\xi$ de M^A dans TM^A est un champ de vecteurs tel que $[q \otimes Z(\xi)] \circ \gamma = -\delta \circ \xi$ pour tout $\xi \in M^A$. Ce champ de vecteurs ainsi défini est de classe C^∞. On vérifie que : $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$.

Pour une q-dérivation δ de A dans A/I, les champs de vecteurs Z sur M^A tels que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ ne sont parfaitement déterminés par δ que modulo les champs verticaux pour $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$.

Exemple. — Soit $A = \mathbf{R}[T]/(T^3) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e \oplus \mathbf{R}e^2$ où $e^3 = 0$. En reprenant les notations de l'exemple du paragraphe 2, on a :

* $I = (e)$ l'idéal de A engendré par e. Si δ est la dérivation de A dans $A/(e) = \mathbf{R}$ telle que $\delta(e) = -1$, alors les champs de vecteurs Z sur $\pi^{-1}(U)$ tels que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ sont de la forme :

$$Z = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les f_i et g_i sont dans $C^\infty[\pi^{-1}(U)]$.

* $I = (e^2)$ est l'idéal de A engendré par e^2.

α) Si δ est la dérivation de A dans $A/(e^2)$ telle que $\delta(e) = -1$, alors

$$Z = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} 2z_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les $f_i \in C^\infty[\pi^{-1}(U)]$.

β) Si δ est la dérivation de A dans $A/(e^2)$ telle que $\delta(e) = -\overline{e}$, alors

$$Z = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

où les $f_i \in C^\infty[\pi^{-1}(U)]$.

Soit a un élément de l'annulateur de I c'est-à-dire $ax = 0$ pour tout $x \in I$. On note τ_a l'unique application linéaire de A/I dans A telle que $\tau_a \circ q = \mu_a$. Pour toute q-dérivation δ de A dans A/I, l'application $\tau_a \circ \delta$ est une dérivation de A.

PROPOSITION 5.— *Si δ est une q-dérivation de A dans A/I et si a est un élément de l'annulateur de I, alors pour tout champ de vecteurs Z sur M^A tel que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ le champ de vecteurs aZ est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation $\tau_a \circ \delta$ c'est-à-dire $aZ = (\tau_a \circ \delta)_M$.*

Démonstration.— Si Z est un champ de vecteurs sur M^A tel que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_A \otimes aZ) \circ \gamma &= (\mu_a \otimes Z) \circ \gamma \\ &= [(\tau_a \circ q) \otimes Z] \circ \gamma \\ &= [\tau_a \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ (q \otimes Z) \circ \gamma \\ &= [\tau_a \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma \\ &= \left([\tau_a \circ (-\delta)] \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}\right) \circ \gamma \\ &= [\mathrm{id}_A \otimes (\tau_a \circ \delta)_M] \circ \gamma.\end{aligned}$$

On conclut, d'après la proposition 2, que $aZ = (\tau_a \circ \delta)_M$.

5. Le prolongement à M^A des champs de vecteurs sur M

Soit V un champ de vecteurs sur M considéré comme dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$. Pour tout $\xi \in M^A$, $\xi \circ V : C^\infty(M) \to A$ est une ξ-dérivation. Il existe, d'après la proposition 1, un vecteur $V^A(\xi)$ dans $T_\xi M^A$ et un seul tel que : $[\mathrm{id}_A \otimes V^A(\xi)] \circ \gamma = \xi \circ V$. Le champ de vecteurs $V^A : \xi \mapsto V^A(\xi)$ ainsi défini est de classe C^∞. Puisque $\gamma \circ V : C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$ est une γ-dérivation, le champ de vecteurs V^A est caractérisé, d'après la proposition 2, par : $(\mathrm{id}_A \otimes V^A) \circ \gamma = \gamma \circ V$: V^A

est le prolongement de V à M^A. Si $\{\varphi_t\}_t$ est le groupe à un paramètre sur M engendré par V, le champ de vecteurs V^A est la transformation infinitésimale du groupe à un paramètre $\{\varphi_t^A\}_t$ sur M^A où $\varphi_t^A : M^A \to M^A$ est tel que $\varphi_t^A(\xi)(f) = \xi(f \circ \varphi_t)$ pour tous $\xi \in M^A$ et $f \in C^\infty(M)$.

De la définition du prolongement, il résulte immédiatement :

PROPRIÉTÉS .— *Si V est un champ de vecteurs sur M, on a :*

i) V^A est projetable sur M et a pour projection V.

ii) L'application $V \mapsto V^A$ de $\mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}(M^A)$ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie.

iii) Pour tout $d \in \mathrm{Der}(A)$, $[V^A, d_M] = 0$.

iv) Pour tout $a \in A$ et pour tout champ de vecteurs X sur M^A, $[V^A, aX] = a[V^A, X]$.

v) Pour tout $f \in C^\infty(M)$, $(fV)^A = f^A \cdot V^A$ c'est-à-dire $(fV)^A(\xi) = \xi(f) \cdot V^A(\xi)$ pour tout $\xi \in M^A$.

vi) Si $\delta : A \to A/I$ est une q-dérivation, pour tout champ de vecteurs Z sur M^A tel que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$, alors le champ de vecteurs $[V^A, Z]$ sur M^A est vertical pour la submersion $\widetilde{q} : M^A \to M^{A/I}$.

Soit $P^k(M)$ le fibré des repères d'ordre k sur M et $J_x^k(\underline{TM})$ l'espace des jets d'ordre k en $x \in M$ des champs de vecteurs sur M. Si V est un champ de vecteurs sur M, on note $P^k(V)$ le prolongement de V à $P^k(M)$. Il est bien connu que lorsque u est un repère d'ordre k en $x \in M$, l'application $J_x^k(V) \mapsto P^k(V)(u)$ de $J_x^k(\underline{TM})$ dans $T_u P^k(M)$ est un isomorphisme. On va donner dans ce qui suit, la version pour les points proches.

PROPOSITION 6.— *Soit $\xi \in M^A$. Le sous-espace vectoriel de $T_\xi M^A$ engendré par les $V^A(\xi)$ où V est un champ de vecteurs sur M est de dimension* $\dim M \cdot r_\xi$ *où r_ξ est le rang de l'application linéaire $\xi : C^\infty(M) \to A$.*

Démonstration.— Soit $P_\xi = \{V^A(\xi) \in T_\xi M^A / V$ champ de vecteurs sur $M\}$. Soit $x_0 \in M$ et ξ un point proche de x_0 d'espèce A. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales au voisinage de x_0 et $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{H}}$ une famille de fonctions C^∞ sur M telles que $\{\xi(f_\alpha)\}_\alpha \in \mathcal{H}$ est une base de $\xi[C^\infty(M)]$. On vérifie que les vecteurs $(f_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_i})^A(\xi)$ forment une base de P_ξ.

De la proposition 6, il résulte qu'étant donné $\xi \in M^A$, point proche de $x \in M$, l'application $J_x^k(V) \mapsto V^A(\xi)$ de $J_x^k(\underline{TM})$ dans $T_\xi M^A$, où k est la hauteur de A, est de rang $\dim M \cdot r_\xi$. Lorsque $A = \mathbf{R}[T_1, \ldots, T_n]/(T_1, \ldots, T_n)^{k+1}$

avec $n = \dim M$, si $\xi \in M^A$ est un repère en $x \in M$, l'application $J^k_x(V) \mapsto V^A(\xi)$ de $J^k_x(\underline{TM})$ dans $T_\xi M^A$ est un isomorphisme.

6. Le A-module engendré par les prolongements

Notons $\mathcal{X}_A(M^A)$ le sous-espace de $\mathcal{X}(M^A)$ formé par les champs de vecteurs X tels que $[X, aY] = a[X,Y]$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$. Un champ de vecteurs X sur M^A appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$ si et seulement si

$$(\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma = (\mathrm{id}_A \otimes Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma$$

pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$. On vérifie que si $a \in A$ et $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ alors aX appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$. L'application $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ de $\mathcal{X}_A(M^A) \times \mathcal{X}_A(M^A)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ est bilinéaire sur A : l'espace $\mathcal{X}_A(M^A)$ est une algèbre de Lie sur A.

PROPOSITION 7.— *Pour toute dérivation d de A, on a $[d_M, \mathcal{X}_A(M^A)] \subset \mathcal{X}_A(M^A)$ et l'application $X \mapsto [d_M, X]$ de $\mathcal{X}_A(M^A)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ est une dérivation de $\mathbf{R}$-algèbres de Lie qui n'est pas intérieure pour $d \neq 0$.*

Démonstration.— *i)* Soit $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ et $d \in \mathrm{Der}(A)$. Pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$, on a :

$$\begin{aligned}
[[d_M, X], aY] &= \big[d_M, [X, aY]\big] - \big[X, [d_M, aY]\big] \\
&= \big[d_M, a[X,Y]\big] - \big[X, [d(a)Y + a[d_M, Y]\big] \\
&= d(a)[X,Y] + a\big[d_M, [X,Y]\big] - d(a)[X,Y] - a\big[X, [d_M, Y]\big] \\
&= a\left(\big[d_M, [X,Y]\big] - \big[X, [d_M, Y]\big]\right) \\
&= a\big[[d_M, X], Y\big]
\end{aligned}$$

Ainsi $[d_M, \mathcal{X}_A(M^A)] \subset \mathcal{X}_A(M^A)$.

ii) Soit $d \neq 0$ une dérivation de A. Supposons que $X \mapsto [d_M, X]$ est une dérivation de $\mathcal{X}_A(M^A)$ qui est intérieure. Il existe donc $Y \in \mathcal{X}_A(M^A)$ tel que : $[d_M, X] = [Y, X]$ pour tout $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$. En particulier $[d_M, aX] = [Y, aX]$ pour tout $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ et pour tout $a \in A$. On a donc : $d(a)X + a[d_M, X] = a[Y, X] = a[d_M, X]$. Ce qui implique que $d(a)X = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$ et pour tout $a \in A$. Il s'ensuit que $d = 0$: ce qui contredit l'hypothèse $d \neq 0$. La dérivation $X \mapsto [d_M, X]$ de $\mathcal{X}_A(M^A)$ n'est donc pas intérieure pour $d \neq 0$.

D'après la propriété *iv)* §5, le prolongement à M^A d'un champ de vecteurs sur M appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$. En réalité l'espace $\mathcal{X}_A(M^A)$ est parfaitement déterminé par les prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M.

THÉORÈME 1.— *L'application bilinéaire $(a,V) \mapsto aV^A$ de $A \times \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ induit un isomorphisme de $A \otimes \mathcal{X}(M)$ sur $\mathcal{X}_A(M^A)$ compatible avec la structure d'algèbres de Lie sur A.*

La démonstration utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 1.— *Si $\sigma : M \to M^A$ est l'injection canonique et si σ^* est l'homomorphisme de $C^\infty(M^A)$ dans $C^\infty(M)$ qui à $F \in C^\infty(M^A)$ associe $F \circ \sigma$, alors :*

$$\left[\bigcap_{\substack{a\in A\\ Y\in\mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0)\right] \cap [(\mathrm{id}_A \otimes \sigma^*)^{-1}(0)] = (0).$$

Démonstration.— Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et k la hauteur de A. Pour tout $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 1$, les idéaux $\mathfrak{m}^r$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{m}$. Pour $i = 2,3,\ldots,k$, on note S_i le supplémentaire de $\mathfrak{m}^i$ dans $\mathfrak{m}^{i-1}$. En posant $S_1 = \mathbf{R}$ et $S_{k+1} = \mathfrak{m}^k$, on a : $A = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_{k+1}$. Pour $i = 1,2,\ldots,k+1$, soit (a_{α_i}) une base de S_i et $(a^*_{\alpha_i})$ la base duale. Ainsi $(a_{\alpha_i})_{i=1,2,\ldots,k+1}$ est une base de A et $(a^*_{\alpha_i})_{i=1,2,\ldots,k+1}$ la base duale. Soit $\sum_{(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots,k+1}} a_{\alpha_i} \otimes \varphi_{\alpha_i}$ un élément de $A \otimes C^\infty(M^A)$ qui appartient à

$$\left[\bigcap_{\substack{a\in A\\ Y\in\mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0)\right] \cap [(\mathrm{id}_A \otimes \sigma^*)^{-1}(0)] = (0).$$

On a :

$$\begin{cases} (aY)(\varphi_{\alpha_i}) = \displaystyle\sum_{\substack{\alpha_j\\ j=1,2,\cdots,k+1}} a^*_{\alpha_i}(aa_{\alpha_j})Y(\varphi_{\alpha_j}) & \begin{array}{l}\text{pour tout } a \in A,\\ \text{pour tout } Y \in \mathcal{X}(M^A),\\ \text{pour tout } i = 1,2,\cdots,k+1,\end{array} \\ \varphi_{\alpha_i} \circ \sigma = 0 & \text{pour } i = 1,2,\cdots,k+1 \end{cases}$$

En particulier :

$$(aV^A)(\varphi_{\alpha_i}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=1,2,\cdots,k+1}} a^*_{\alpha_i}(aa_{\alpha_j})V^A(\varphi_{\alpha_j}) \quad \begin{array}{l}\text{pour tous } a \in m,\ V \in \mathcal{X}(M),\\ \text{et } i = 1,2,\cdots,k+1,\end{array} \qquad (1)$$

$$\varphi_{\alpha_i} \circ \sigma = 0 \qquad \text{pour } i = 1,2,\cdots,k+1 \qquad (2)$$

1er cas : $i = 1$

$$(aV^A)(\varphi_{\alpha_1}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=1,2,\ldots,k+1}} a^*_{\alpha_1}(aa_{\alpha_j})V^A(\varphi_{\alpha_j}) \text{ pour tous } a \in \mathsf{m} \text{ et } V \in \mathcal{X}(M).$$

Pour tout $j = 1,2,\ldots,k+1$ et pour tout $a \in \mathsf{m}$, $aa_{\alpha_j} \in \mathsf{m}$. Comme a_{α_1} est une base de S_1. Ainsi $(aV^A)(\varphi_{\alpha_1}) = 0$ pour tout $a \in \mathsf{m}$ et pour tout $V \in \mathcal{X}(M)$. D'où : $\varphi_{\alpha_1} = f_{\alpha_1} \circ \pi$ où $f_{\alpha_1} \in C^\infty(M)$ et $\pi : M^A \to M$ la projection canonique. Compte tenu de (2), on déduit que $\varphi_{\alpha_1} = 0$.

2ème cas : $i = 2$

$$(aV^A)(\varphi_{\alpha_2}) = \sum_{\substack{\alpha_j \\ j=2,3,\ldots,k+1}} a^*_{\alpha_2}(aa_{\alpha_j})V^A(\varphi_{\alpha_j}) \text{ pour tous } a \in \mathsf{m} \text{ et } V \in \mathcal{X}(M).$$

Pour tout $j = 2,3,\ldots,k+1$ et pour tout $a \in \mathsf{m}$, $aa_{\alpha_j} \in \mathsf{m}^2$. Comme a_{α_2} est une base de S_2, supplémentaire de m^2 dans m, alors $(aV^A)(\varphi_{\alpha_2}) = 0$ pour tout $a \in \mathsf{m}$ et pour tout $V \in \mathcal{X}(M)$. Ainsi $\varphi_{\alpha_2} = f_{\alpha_2} \circ \pi$ où $f_{\alpha_2} \in C^\infty(M)$ et $\pi : M^A \to M$. Puisque $\varphi_{\alpha_2} \circ \sigma = 0$, alors $\varphi_{\alpha_2} = 0$.

La suite de la démonstration se fait par récurrence.

LEMME 2. —

$$\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) = A \cdot \gamma[C^\infty(M)].$$

Démonstration.

1ère inclusion. — Puisque pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$, $(\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ \gamma = (\mu_a \otimes Y) \circ \gamma$ alors

$$\gamma[C^\infty(M)] \subset \bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0).$$

Il s'ensuit que $A \cdot \gamma[C^\infty(M)] \subset \bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0)$.

2ème inclusion. — Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une base de A. Si $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes \varphi_\alpha$ est un élément de $A \otimes C^\infty(M^A)$ qui appartient à

$$\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0).$$

On vérifie que : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes \varphi_\alpha - \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(\varphi_\alpha \circ \sigma)$ est un élément de

$$\left[\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) \right] \cap \left[(\mathrm{id}_A \otimes \sigma^*)^{-1}(0) \right].$$

Compte tenu du lemme 1, on conclut que : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes \varphi_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \gamma(\varphi_\alpha \circ \sigma)$. Ainsi

$$\bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) \subset A \cdot \gamma[C^\infty(M)].$$

Remarque. — Démonstration du théorème 1— On vérifie que l'application bilinéaire $(a, V) \mapsto aV^A$ de $A \times \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$ induit un homomorphisme d'algèbres de Lie sur A de $A \otimes \mathcal{X}(M)$ dans $\mathcal{X}_A(M^A)$.

Injection. Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une base de A et $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ une famille de champs de vecteurs sur M tels que : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A = 0$. Pour tout $\xi \in M^A$, $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A(\xi) = 0$. D'où $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} \mu_{a_\alpha} \circ \xi \circ V_\alpha = 0$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \cdot \xi(V_\alpha \cdot f) = 0$ pour tout $\xi \in M^A$. En particulier pour tout point proche $f \mapsto f(x)$ de $C^\infty(M)$ dans A, on a : $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} (V_\alpha f)(x) a_\alpha = 0$ pour tous $x \in M$ et $f \in C^\infty(M)$. Ainsi $(V_\alpha f)(x) = 0$ pour tous $\alpha \in \mathcal{J}$, $x \in M$ et $f \in C^\infty(M)$. On déduit que $V_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$. Ainsi $\sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \otimes V_\alpha = 0$.

Surjection. Soit $X \in \mathcal{X}_A(M^A)$. Puisque $(\mathrm{id}_A \otimes aY) \circ (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma = (\mathrm{id}_A \otimes Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes aX) \circ \gamma$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$, alors $(\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y) \circ (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma = 0$. Compte tenu du lemme 2, on a :

$$\mathrm{Im}[(\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma] \subset \bigcap_{\substack{a \in A \\ Y \in \mathcal{X}(M^A)}} (\mathrm{id}_A \otimes aY - \mu_a \otimes Y)^{-1}(0) = A \cdot \gamma[C^\infty(M)].$$

Etant donné une fonction $g \in C^\infty(M)$, il existe une famille unique $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ de fonctions de classe C^∞ sur M telle que : $(\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma(g) =$

$\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha\gamma(f_\alpha)$. On définit les applications : $V_\alpha : g \mapsto f_\alpha$ de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$. En écrivant $\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha\gamma(V_\alpha g) = (\mathrm{id}_A \otimes X)\circ\gamma(g)$, on vérifie que $V_\alpha : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est une dérivation. D'où :

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_A \otimes X)\circ\gamma(g) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha\gamma(V_\alpha g) &= \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \left[\mu_{a_\alpha} \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}\right]\circ\gamma(V_\alpha g)\\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \left[\mu_{a_\alpha} \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}\right]\circ\gamma\circ V_\alpha(g).\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_A \otimes X)\circ\gamma &= \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} (\mu_{a_\alpha} \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)})\circ\gamma\circ V_\alpha\\ &= \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \left(\mu_{a_\alpha} \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}\right)\circ(\mathrm{id}_A \otimes V_\alpha^A)\circ\gamma\\ &= \left[\mathrm{id}_A \otimes \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A\right]\circ\gamma.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$X = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A.$$

7. Caractérisation du prolongement des champs de vecteurs

On a vu que le prolongement à M^A de tout champ de vecteurs sur M appartient à $\mathcal{X}_A(M^A)$ et qu'il commute avec tout champ de vecteurs sur M^A associé à une dérivation de A. Ces deux conditions ne donnent pas toujours une caractérisation du prolongement à M^A des champs de vecteurs sur M. On va dans ce qui suit construire une suite décroissante de sous-algèbres locales de A qui permettra de donner une caractérisation du prolongement.

Soit $A = A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_r \supset \cdots$ la suite des sous-algèbres locales de A définie par la condition : pour $r > 0$, A_r est l'intersection des noyaux des dérivations de A_{r-1}. On a $A_r = \mathbf{R}$ à partir d'un certain rang.

Exemple. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{R}[T_1,\ldots,T_s]$. Si on note $\overline{P}$ l'image de $P \in \mathbf{R}[T_1,\ldots,T_s]$ dans $\mathbf{R}[T_1,\ldots,T_s]/\mathfrak{a}$ par la surjection canonique, pour toute dérivation d de $\mathbf{R}[T_1,\ldots,T_s]/\mathfrak{a}$, on a : $d(\overline{P}) = \sum_{i=1}^{s} \overline{\frac{\partial P}{\partial T_i}} d(\overline{T}_i)$. Par conséquent si $\mathfrak{a} = \left(\frac{\partial P}{\partial T_1},\ldots,\frac{\partial P}{\partial T_s}\right)$, $\overline{P}$ appartient à l'intersection des noyaux des dérivations de $\mathbf{R}[T_1,\ldots,T_s]/\mathfrak{a}$. Dans $\mathbf{R}[T_1,T_2]$, en prenant $P = T_1^3 - T_1T_2^5 + T_2^7$, alors $\overline{P}$ est dans l'intersection des noyaux des dérivations de $A = \mathbf{R}[T_1, T_2]/(3T_1^2 - T_2^5, 7T_2^6 - 5T_1T_2^4, T_2^8)$. On vérifie que $\overline{P} \neq 0$. Donc $A_1 \neq \mathbf{R}$.

La suite décroissante des sous-algèbres locales $(A_r)_{r\in\mathbf{N}}$ détermine une suite décroissante $(M^{A_r})_{r\in\mathbf{N}}$ de sous-variétés fermées de M^A.

PROPOSITION 8.— *Pour $r > 0$, M^{A_r} est l'ensemble des points $\xi \in M^{A_{r-1}}$ tels que $d_M(\xi) = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}(A_{r-1})$.*

Démonstration.— 1) Soit $\xi \in M^{A_r}$ et $j_r : A_r \to A_{r-1}$ l'injection canonique. Puisque $j_r \circ \xi \in M^{A_{r-1}}$, alors pour tout $d \in \mathrm{Der}(A_{r-1})$, on a : $\left[\mathrm{id}_{A_{r-1}} \otimes d_M(j_r \circ \xi)\right] \circ \gamma_{A_{r-1}} = -d \circ j_r \circ \xi = 0$. D'où $d_M(j_r \circ \xi) = 0$.

2) Soit $\xi \in M^{A_{r-1}}$ tel que $d_M(\xi) = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}(A_{r-1})$. On a donc $d \circ \xi = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}(A_{r-1})$. Par conséquent $\xi[C^\infty(M)]$ est contenu dans l'intersection des noyaux des dérivations de A_{r-1} c'est-à-dire $\xi[C^\infty(M)] \subset A_r$. D'où $\xi \in M^{A_r}$.

THÉORÈME 2.— *Soit $[\mathcal{X}(M)]^A$ l'espace des prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M. Si $X \in A_r[\mathcal{X}(M)]^A$, alors :*

1) X est tangent à M^{A_r}

2) Pour que $X \in A_{r+1} \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$ il faut et il suffit que :

$$(C_r) \qquad [d_M, X/M^{A_r}] = 0 \text{ pour tout } d \in \mathrm{Der}(A_r)\ .$$

Démonstration.— 1) Soit V un champ de vecteurs sur M et soit V^A le prolongement de V à M^A. Si $j_r : A_r \to A$ est l'injection canonique, alors pour tout $\xi \in M^{A_r}$ et pour tout $a \in A_r$, on a : $(aV^A)(j_r \circ \xi) = a \cdot V^{A_r}(\xi)$. Ainsi tout champ de vecteurs X sur M^A qui appartient à $A_r \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$ est tangent à M^{A_r}.

2) On va démontrer pour $r = 0$ c'est-à-dire que si $X \in A \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$, pour qu'il appartienne à $A_1 \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$ il faut et il suffit que $[d_M, X] = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}(A)$.

Condition nécessaire. Soit $X \in A_1 \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}_1}$ une base de A_1 et $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}_1}$ une famille de champs de vecteurs sur M telles que $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}_1} a_\alpha V_\alpha^A$. Pour tout $d \in \mathrm{Der}(A)$, $[d_M, X] = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}_1} d(a_\alpha) V_\alpha^A = 0$.

Condition suffisante. Soit $X \in A \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$. Soit $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ une base de A et $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ une famille de champs de vecteurs sur M telles que $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A$. Supposons $[d_M, X] = 0$ pour tout $d \in \mathrm{Der}(A)$:

ce qui donne $\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} d(a_\alpha)V_\alpha^A = 0$. Ainsi $\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} d(a_\alpha)\xi[V_\alpha f] = 0$ pour tous $d \in \mathrm{Der}(A)$, $\xi \in M^A$ et $f \in C^\infty(M)$. En particulier pour tout $x \in M, \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}(V_\alpha f)(x)d(a_\alpha) = 0$ pour tout $f \in C^\infty(M)$ et pour tout $d \in \mathrm{Der}(A)$. On déduit que pour tout $x \in M$ et pour $f \in C^\infty(M)$, $\sum_{\alpha\in\mathcal{J}}(V_\alpha f)(x)a_\alpha$ appartient à A_1. Pour tout $f \in C^\infty(M)$, la fonction $x \mapsto \sum_{\alpha\in\mathcal{J}}(V_\alpha f)(x)a_\alpha$ est une fonction sur M à valeurs dans A_1. D'où pour tout $f \in C^\infty(M), \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha \otimes V_\alpha(f)$ appartient à $A_1 \otimes C^\infty(M)$. Alors $X = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} a_\alpha V_\alpha^A$ appartient à $A_1 \cdot [\mathcal{X}(M)]^A$.

COROLLAIRE .— *Pour qu'un champ de vecteurs X sur M^A soit le prolongement à M^A d'un champ de vecteurs sur M il faut et il suffit que :*

1) $[X, aY] = a[X, Y]$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$

2) X vérifie la condition (C_r) pour $r = 0, 1, 2, \ldots$

Dans tous les cas usuels en géométrie, A est une algèbre graduée par des éléments de degrés strictement positifs. Dans ce cas, il existe une dérivation d° de A telle que $(d^\circ)^{-1}(0) = \mathbf{R}$. On a alors $A_1 = A_2 = \cdots = \mathbf{R}$ et la condition 2) se réduit à

$$(2') \qquad [(d^\circ)_M, X] = 0\ .$$

8. Autres caractérisations du prolongement lorsque A est une algèbre de polynômes tronquée

Soit $A = \mathbf{R}[T_1, \ldots, T_s]/(T_1, \ldots, T_s)^{k+1}$, m l'idéal maximal de A et $q : A \to A/\mathsf{m}^k$ la surjection canonique. Etant donné une q-dérivation δ de A dans A/m^k, on note $\mathcal{M}(\delta)$ l'espace des champs de vecteurs Z sur M^A tels que $(q \otimes Z) \circ \gamma = [-\delta \otimes \mathrm{id}_{C^\infty(M^A)}] \circ \gamma$ et $\mathcal{M}$ le $C^\infty(M^A)$-sous-module de $\mathcal{X}(M^A)$ engendré par les $\mathcal{M}(\delta)$ où δ décrit l'espace $\mathrm{Der}(A, A/\mathsf{m}^k)$ des q-dérivations de A dans A/m^k.

PROPOSITION 10 [3].— *On suppose $\dim M \geq s$. Il existe une application $C^\infty(M^A)$-linéaire et une seule $\omega : \mathcal{M} \to C^\infty(M^A) \otimes \mathrm{Der}(A, A/\mathsf{m}^k)$ telle que $\omega[\mathcal{M}(\delta)] = 1_{C^\infty(M^A)} \otimes \delta$ pour toute q-dérivation δ de A dans A/m^k et dont le noyau est le $C^\infty(M^A)$-module des champs verticaux pour la fibration $M^A \to M^{A/\mathsf{m}^k}$.*

On a la caractérisation suivante :

THÉORÈME 3.— *Si X est un champ de vecteurs sur M^A, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) X est le prolongement à M^A d'un champ de vecteurs sur M.

2) i) $[X, aY] = a[X, Y]$ pour tout $a \in A$ et pour tout $Y \in \mathcal{X}(M^A)$

ii) $[X, d_M] = 0$ où d est une dérivation de A telle que $d(A) = \mathfrak{m}$.

3) Pour toute q-dérivation δ de A dans $A/\mathfrak{m}^k$ et pour tout $Z \in \mathcal{M}(\delta)$, le champ de vecteurs $[X, Z]$ est vertical pour la fibration $M^A \to M^{A/\mathfrak{m}^k}$.

4) i) $[X, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$

ii) $\theta_X \omega = 0$ c'est-à-dire $X \cdot \omega(Y) - \omega[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{M}$.

En effet, d'après le théorème 1, *1)* est équivalent à *2)*. La propriété *vi)* §5 donne : *1)* implique *3)*. Dans [3], se trouve une démonstration de l'équivalence entre 3) et 4).

Remarque. — Lorsque $\dim M = s$ et lorsqu'on se restreint à l'ouvert $P^k(M)$ de M^A constitué des repères d'ordre k sur M, le module $\mathcal{M}$ décrit le $C^\infty[P^k(M)]$-module $\mathcal{X}[P^k(M)]$ et l'application ω est la forme canonique de Kobayashi sur le fibré des repères d'ordre k. Dans ce cas, l'assertion 4) se réduit à $\theta_X \omega = 0$ et ceci n'est autre que la caractérisation classique du prolongement à $P^k(M)$ des champs de vecteurs sur M ([1]).

REFERENCES

[1] S. Kobayashi. — Canonical forms on frame bundles of higher order contact, *Proc. Sym. Diff. Geom. Tucson*, t. , 1960, p. 186-193.

[2] A. Morimoto. — Prolongation of connections to bundles of infinitely near points, *J. Diff. Geom.*, t. **11**, 1976, p. 479-498.

[3] E. Okassa. — Prolongement par une algèbre locale, *Congrès National des Sociétés Savantes, Grenoble*, t. **III**, 1983, p. 47-59.

[4] E. Okassa. — Prolongements des champs de vecteurs à des variétés de points proches, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. t.300*, t. **6**, 1985, p. 173-176.

[5] A. Weil. — Théorie des points proches sur les variétés différentiables, *Colloque Géom. Diff. Strasbourg*, t. , 1953, p. 111-117.

(Manuscrit reçu le 12 mai 1987)