ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

DOMINIQUE AZÉ

Caractérisation de la convergence au sens de Mosco en terme d'approximations inf-convolutives

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 3 (1986-1987), p. 293-314

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_3_293_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°3, 1986–1987

Caractérisation de la convergence au sens de Mosco en terme d'approximations inf-convolutives

DOMINIQUE AZÉ[1]

RÉSUMÉ. — On montre que la convergence au sens de Mosco d'une suite de fonctions convexes définies sur un espace de Banach réflexif est équivalente à la convergence simple d'une famille à un paramètre d'approximations inf-convolutives. Les noyaux admissibles d'inf-convolution recouvrent les noyaux du type $|\cdot|^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$ où $|\cdot|$ désigne un renormage approprié de l'espace de base.

ABSTRACT. — The convergence in the sense of Mosco of a sequence of convex functions defined on a reflexive Banach space is shown to be equivalent to the pointwise convergence of a one parameter family of inf-convolutive approximations. Various kernels of approximation are studied involving kernels of the type $|\cdot|^\alpha$ with $\alpha \geq 1$ where $|\cdot|$ is a suitable renorming of the underlying space.

0. Introduction

Le but de ce travail est de caractériser la convergence variationnelle introduite par U.MOSCO et J.L.JOLY ([M1], [M2], [J]) par la convergence simple d'approximées inf-convolutives du type

$$F_\lambda(x) = \inf_{u \in X} \left\{ F(u) + \frac{1}{\lambda}\, k(|x-u|) \right\}$$

où X est un espace de Banach, $|\cdot|$, sa norme et k une fonction de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$.

[1] Mathématiques, Avenue de Villeneuve, Université de Perpignan - 66025 Perpignan Cedex

Des résultats de ce type ont été démontrés par H.ATTOUCH dans [A1] pour le noyau $k(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

Dans la section 2., nous traitons le cas du noyau $k(t) = |t|$. Les approximations inf-convolutives définies par ce noyau semblent remonter à R.BAIRE, voir aussi E.J.Mc SHANE ([MS]).

Elles ont été étudiées entre autre par J-B.HIRIART-URRUTY ([H-U1], [H-U2]).

Dans la section 3., on s'intéresse à une classe de noyaux contenant les fonctions du type $k(t) = |t|^\alpha$ avec $\alpha > 1$, et on démontre également l'équivalence entre convergence au sens de Mosco et convergence simple des approximées.

Les résultats obtenus mettent à nouveau en lumière le lien entre épi (ou Γ) convergence et approximations de type inf-convolutif, citons par exemple [A1], [DG], [F-T], [W].

1. Approximation par inf-convolution avec la norme

On considère un espace de Banach $(X, |\cdot|)$ et on note classiquement $\Gamma_o(X)$ l'ensemble des fonctions convexes s.c.i. et propres définies sur X à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.

Pour $F \in \Gamma_o(X)$ et $\lambda > 0$, on pose

$$F_{[\lambda]}(x) = \inf_{u \in X} \Big\{ F(u) + \frac{1}{\lambda} |x - u| \Big\}. \tag{1}$$

LEMME 1.1. —

$$F_{[\lambda]} > -\infty \iff dom\ F^* \cap B^*_{\frac{1}{\lambda}} \neq \emptyset$$

où

$$B_{\frac{1}{\lambda}} = \big\{ x^* \in X^* ; |x^*| \leq \frac{1}{\lambda} \big\}.$$

Démonstration. — $F_{[\lambda]}$ est convexe et continue, on a donc

$$F_{[\lambda]} > -\infty \iff F^*_{[\lambda]} \not\equiv +\infty.$$

On remarque alors que

$$F_{[\lambda]} = F \nabla \frac{1}{\lambda} |\cdot| \text{ (inf-convolution)}$$

d'où

$$F^*_{[\lambda]} = F^* + I_{B^*_{\frac{1}{\lambda}}}$$

I_E désignant la fonction indicatrice de l'ensemble $E \subset X^*$.

On a donc bien

$$F_{[\lambda]} > -\infty \iff \text{dom } F^* \cap B^*_{\frac{1}{\lambda}} \neq \emptyset.$$

Remarque 1.— Quand $F_{[\lambda]} > -\infty$, on sait ([H-U1] Prop.2.1), que $F_{[\lambda]}$ est Lipschitzienne de constante de Lipschitz $\frac{1}{\lambda}$.

Remarque 2.— On déduit du lemme 1.1 que

$$\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*) \Longrightarrow F_{[\lambda]} > -\infty. \tag{2}$$

Dans le cas ou $\frac{1}{\lambda} = d(0, \text{dom } F^*)$, diverses situations peuvent se présenter.

- $F_{[\lambda]} > -\infty$ et l'infimum est atteint dans la définition de $F_{[\lambda]}$.

Exemple.—

$$X = \mathbf{R},\ F(u) = u,\ F^*(v) = I_{\{1\}}(v) \text{ donc } d(0, \text{dom } F^*) = 1.$$

Pour $\lambda = 1$, on a

$$F(u) + |x - u| = \begin{cases} x & \text{si } u \leq x \\ 2u - x & \text{si } u \geq x \end{cases}$$

- $F_{[\lambda]} > -\infty$ et l'infimum n'est pas atteint dans la définition de $F_{[\lambda]}$.

Exemple.—

$$X = \mathbf{R}, F(u) = e^u + u,\ F^*(v) = \begin{cases} (v-1)(\log(v-1)) - v + 1 & \text{si } v > 1 \\ +\infty & \text{si } v < 1 \end{cases}$$

On a $d(0, \text{dom } F^*) = 1$. Pour $\lambda = 1$, on a

$$F(u) + |x - u| = \begin{cases} e^u + x & \text{si } u \leq x \\ e^u + 2u - x & \text{si } u \geq x \end{cases}$$

- $F_{[\lambda]} \equiv -\infty$

Exemple.—

$$X = \mathbf{R},\ F(u) = \begin{cases} -\sqrt{u} - u & \text{si } u \geq 0 \\ +\infty & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

On a

$$F^*(v) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4(v+1)} & \text{si } v < -1 \\ +\infty & \text{si } v \geq -1 \end{cases}$$

Dans ce cas, $d(0, \mathrm{dom}\ F^*) = 1$ et, pour $\lambda = 1$, on a clairement $F_{[\lambda]} \equiv -\infty$. On suppose à partir de maintenant que

$$X \text{ est réflexif} \tag{3}$$

Dans ce cas on a le

LEMME 1.2.— *Soit $F \in \Gamma_0(X)$ et $\lambda > 0$ tel que $1/\lambda > d(0, dom\ F^*)$. Alors*

(i) pour tout $x \in X$, la fonction $F(\cdot) + \dfrac{1}{\lambda}\ |x - \cdot|$ atteint son minimum sur X. Notons

$$J_{[\lambda]}(x) = \ \mathit{Argmin}\ \big(F(\cdot) + \frac{1}{\lambda}\ |x - \cdot|\big).$$

On a

(ii) $J_{[\lambda]}(x)$ est un ensemble convexe faiblement compact. De plus

(iii) $\partial F_{[\lambda]}(x) = \partial F(u) \cap \partial(\dfrac{1}{\lambda}\ |\cdot|)(x - u)$ pour tout $u \in J_{[\lambda]}(x)$.

Démonstration.— Posons $c = d(0, \mathrm{dom}\ F^*)$ et choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\dfrac{1}{\lambda} > c + \epsilon$. Il existe alors $u^* \in \mathrm{dom}\ F^*$ tel que $\dfrac{1}{\lambda} > c + \epsilon > |u^*| \geq c$. Il vient alors, pour tout $u \in X$

$$F(u) \geq \ < u^*, u > -F^*(u^*)$$
$$F(u) \geq -(c + \epsilon)\ |u| - F^*(u^*)$$

et donc

$$F(u) + \frac{1}{\lambda}\ |x - u| \geq (\frac{1}{\lambda} - c - \epsilon)|u| - \frac{1}{\lambda}\ |x| - F^*(u^*). \tag{4}$$

Les conclusions (i) et (ii) du lemme découlent alors de (4). La conclusion (iii) n'est autre que le calcul classique du sous-différentiel d'une inf-convolution lorsque celle-ci est exacte (voir [L] par exemple).

Remarque 3. — Un résultat important est le suivant ([H-U1] Proposition 2.3)

$$F_{[\lambda]}(x) = F(x) \Longleftrightarrow \partial F(x) \cap B^*_{\frac{1}{\lambda}} \neq \emptyset.$$

On a clairement

$$F_{[\lambda]}(x) = F(x) \Longleftrightarrow x \in J_{[\lambda]}(x).$$

On remarque alors que

$$\partial F(x) \cap \overset{\circ}{B}{}^*_{\frac{1}{\lambda}} \neq 0 \Longrightarrow J_{[\lambda]}(x) = \{x\} \tag{5}$$

où $\overset{\circ}{B}{}^*_{\frac{1}{\lambda}} = \{x^* \in X^*; |x^*| < \frac{1}{\lambda}\}$, en effet, pour tout $u \in X$ et $u^* \in \partial F(x)$ vérifiant $|u^*| < \frac{1}{\lambda}$, il vient

$$F(u) + \frac{1}{\lambda}\,|x-u| \geq F(x) + \Big(\frac{1}{\lambda} - |u^*|\Big)|x-u|.$$

Par contre l'implication réciproque est fausse dans (5) comme le montre l'exemple suivant

$$X = \mathbf{R},\ F(u) = \frac{u^2}{2} + u\ ,\ x = 0\ ,\ \lambda = 1.$$

On a

$$F(u) + |u| = \begin{cases} \dfrac{u^2}{2} + 2u & \text{pour } u \geq 0 \\ \dfrac{u^2}{2} & \text{pour } u \leq 0 \end{cases}$$

il s'ensuit que $J_{[1]}(0) = 0$ alors que $\partial F(0) = \{1\}$.

2. Equivalence entre convergence au sens de Mosco et convergence simple des approximées

Commençons par donner la définition de la convergence introduite par U.Mosco (voir [M1], [M2], [J]).

On considère X espace de Banach réflexif et $\{F, F^n : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\},\ n \in \mathbf{N}\}$ des fonctions convexes, s.c.i. et propres.

On dit que $(F^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge au sens de Mosco vers F et on note $F = M - \lim_e F^n$ si

$$\begin{cases} \forall x \in X\ ,\ \forall x_n \overset{w}{\to} x, & \liminf\limits_n F^n(x_n) \geq F(x) \\ \forall x \in X\ ,\ \exists \xi_n \overset{s}{\to} x, & \limsup\limits_n F^n(\xi_n) \leq F(x) \end{cases} \tag{6}$$

les lettres w et s dénotant respectivement les topologies faibles et fortes.

Dans le cas où les deux propriétés intervenant dans la définition (6) sont vérifiées pour une topologie τ, on note

$$F = \tau - \lim_e F^n. \tag{7}$$

Dans [A1], H.ATTOUCH a démontré l'équivalence entre la convergence au sens de Mosco de (F^n) vers F et la convergence simple, pour tout $\lambda > 0$, de F^n_λ vers F_λ, où pour $\Phi \in \Gamma_0(X)$,

$$\Phi_\lambda(x) := \inf_{u \in X} \left\{ \Phi(u) + \frac{1}{2\lambda} \, |x-u|^2 \right\}$$

est l'approximation Moreau-Yosida de Φ.

Dans cette section, on se propose de démontrer que le résultat précédent reste vrai quand on remplace les approximations de Moreau-Yosida par celles considérées dans la section 1.

PROPOSITION 2.1.— *Soit X un espace de Banach réflexif et $\{F, F^n : X \to R \cup \{+\infty\}, n \in \mathbf{N}\}$ des fonctions convexes, s.c.i. et propres, alors*

$$F = M - \lim_e F^n \Longrightarrow \begin{cases} \textit{pour tout } \lambda > 0 \textit{ tel que } \dfrac{1}{\lambda} > d(0, \textit{ dom } F^*) \\ \textit{on a } F_{[\lambda]}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F^n_{[\lambda]}(x) \textit{ pour tout } x \in X. \end{cases}$$

Démonstration.— Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et considérons $\epsilon > 0$ tel que $\dfrac{1}{\lambda} > c + \epsilon$. Il existe $u^* \in$ dom F^* tel que $\dfrac{1}{\lambda} > c + \epsilon > |u^*|$.

On sait ([M1]) que $F = M - \lim_e F^n \Longleftrightarrow F^* = M - \lim_e (F^n)^*$.

Il existe donc $u^*_n \xrightarrow{s} u^*$ tel que $(F^n)^*(u^*_n) \xrightarrow{n \to +\infty} F^*(u^*)$.

Pour n assez grand on a

$$\frac{1}{\lambda} > c + \epsilon > |u^*_n|.$$

Il vient alors, pour tout $u \in X$

$$F^n(u) \geq \, < u^*_n, u > \; - \; F^*_n(u^*_n)$$

$$F^n(u) \geq -(c+\epsilon)|u| - M \quad \text{où} \quad M = \sup_{n \in \mathbf{N}} (F^n)^*(u^*_n) < +\infty.$$

D'où
$$F^n(u) + \frac{1}{\lambda}\,|x-u| \geq \Big(\frac{1}{\lambda} - c - \epsilon\Big)|u| - \frac{1}{\lambda}\,|x| - M.$$

La suite $F^n(\cdot) + \frac{1}{\lambda}\,|x-\cdot|$ converge au sens de Mosco vers $F(\cdot) + \frac{1}{\lambda}\,|x-\cdot|$ (la fonction $\frac{1}{\lambda}\,|x-\cdot|$ étant continue) et cette suite est équi-coercive, on sait donc que (voir par exemple [A1], Theorem 2.11)

$$\inf_{u\in X}\Big\{F^n(u) + \frac{1}{\lambda}\,|x-u|\Big\} \xrightarrow{n\to+\infty} \inf_{u\in X}\Big\{F(u) + \frac{1}{\lambda}\,|x-u|\Big\}$$

$$F^n_{[\lambda]}(x) \xrightarrow{n\to+\infty} F_{[\lambda]}(x).$$

Le point délicat est la réciproque. On suppose que les espaces X et X^* sont renormés par des normes strictement convexes, différentiables hors de l'origine et vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{w} x \\ |x_n| \to |x| \end{array}\right. \Longrightarrow x_n \xrightarrow{s} x \tag{8}$$

ce qui est toujours possible (voir par exemple E. Asplund [As], S.L. Troyanski [T] et aussi [S]).

Théorème 2.2. — *Soit X un espace de Banach réflexif, tel que (8) soit vérifié. On considère $\{F, F^n : X \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\},\ n\in\mathbf{N}\}$ des fonctions convexes, s.c.i. et propres, on suppose que*

$$\begin{array}{l} \textit{pour tout } \lambda > 0 \textit{ vérifiant } \dfrac{1}{\lambda} \geq d(0, dom\ F^*) \textit{ et pour tout } x \in X \\ \textit{on a } F_{[\lambda]}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F^n_{[\lambda]}(x), \end{array} \tag{9}$$

alors
$$F = M - \lim{}_e F^n.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que si $J_{[\lambda]}(x) \neq \{x\}$, on a, grâce au point (iii) du lemme 1.2 et au fait que, pour $u \neq 0$, $|\partial|.|(u)| = 1$

$$|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}. \tag{10}$$

(La norme dans le dual est la norme duale de celle de X).

1er point

Soit $x \in$ dom F on veut montrer qu'il existe $x_n \xrightarrow{s} x$ tel que

$$\limsup_n F^n(x_n) \leq F(x).$$

Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et considérons $\lambda_0 > 0$ tel que $\dfrac{1}{\lambda_0} > c$. On observe que, grâce à (9), $F^n_{[\lambda]} \in \Gamma_0(X)$ pour tout $\lambda \leq \lambda_0$ et $n \geq n_0(\lambda_0)$.

On a alors

$$F_{[\lambda_0]} = s - \lim{}_e F^n_{[\lambda_0]} \qquad \text{(voir (7))}$$

car les fonctions $F^n_{[\lambda_0]}$ convergent simplement vers $F_{[\lambda_0]}$ et sont équi-Lipschitziennes.

Par ailleurs la suite $(F^n_{[\lambda_0]})^*$ est équi-coercive, on a donc, utilisant le théorème 3.9 de [A1]

$$F^* + I_{B^*_{1/\lambda_0}} = w - \lim{}_e\Big((F^n)^* + I_{B^*_{1/\lambda_0}}\Big) \qquad \text{(voir (7))}.$$

Il existe donc $u^*_0 \in$ dom $F^* \cap B^*_{1/\lambda_0}$ et $u^*_{0,n} \in B^*_{1/\lambda_0}$ tels que

$$F^*(u^*_0) = \lim_{n \to +\infty} (F^n)^*(u^*_{0,n}). \tag{11}$$

On en déduit que, pour $\lambda < \lambda_0$ on a, pour n assez grand

$$\frac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^{n*}). \tag{12}$$

On a alors

$$\lim_{\lambda \downarrow 0}\big(\lim_{n \to +\infty} F^n_{[\lambda]}(x)\big) = \lim_{\lambda \downarrow 0} F_{[\lambda]}(x) = F(x).$$

Utilisant un lemme de diagonalisation ([A1] Corollary 18.p 37), il existe $\lambda(n) \downarrow 0$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} F^n_{[\lambda(n)]}(x) = F(x).$$

Grâce à (12) et à la conclusion (ii) du lemme 1.2, on a $J^{F^n}_{[\lambda(n)]}(x) \neq \emptyset$.

Considérons alors $u^n_{\lambda(n)} \in J^{F^n}_{[\lambda(n)]}(x)$ et posons

$$x_n = u^n_{\lambda(n)}.$$

D'après (11) on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $u \in X$

$$F^n(u) \geq -\frac{1}{\lambda_0}\,|u| - M \quad \text{où} \quad M = \sup_n (F^n)^*(u^*_{0,n}) < +\infty.$$

On a alors

$$\sup_n \Big\{ -\frac{1}{\lambda_0}\,|x_n| - M + \frac{1}{\lambda(n)}\,|x - x_n| \Big\} < +\infty.$$

Il s'ensuit que (x_n) est bornée puis que $x_n \xrightarrow{s} x$, de plus

$$\begin{aligned}\limsup_n F^n(x_n) &\leq \limsup_n F^n_{[\lambda(n)]}(x)\\ &\leq F(x)\end{aligned}$$

ce qui démontre bien le premier point.

2ème point

Soit $x \in X$ et $x_n \xrightarrow{w} x$, on veut montrer que

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x). \tag{14}$$

Pour ceci, on distingue deux cas :

- $d(0, \operatorname{dom} F^*) = 0$.

Posons

$$\overline{\lambda} = \inf\{\lambda > 0,\ F_{[\lambda]}(x) < F(x)\}.$$

Supposons $\overline{\lambda} < +\infty$, pour $\lambda > \overline{\lambda}$ on a donc $F_{[\lambda]}(x) < F(x)$, ce qui montre que $x \notin J_{[\lambda]}(x)$ et donc, d'après (10), que

$$|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}.$$

Choisissons alors $v^n_\lambda \in \partial F^n_{[\lambda]}(x)$, on a $|v^n_\lambda| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ donc à une sous-suite près, v^n_λ converge faiblement vers $v_\lambda \in X^*$.

On observe que

$$\forall \xi \in X, \quad F^n_{[\lambda]}(\xi) - F^n_{[\lambda]}(x) \geq \langle v^n_\lambda, \xi - x \rangle$$

passant à la limite grâce à l'hypothèse (9) on en déduit que $v_\lambda \in \partial F_{[\lambda]}(x)$, on remarque alors que

$$\frac{1}{\lambda} = |v_\lambda| \leq \liminf_n |v_\lambda^n| \leq \limsup_n |v_\lambda^n| \leq \frac{1}{\lambda}$$

d'où

$$v_\lambda^n \xrightarrow{w} v_\lambda$$

$$|v_\lambda^n| \longrightarrow |v_\lambda|$$

donc, utilisant (8), $v_\lambda^n \xrightarrow{s} v_\lambda$.

On sait que

$$F_{[\lambda]}^n(x_n) \geq F_{[\lambda]}^n(x) + < v_\lambda^n, x_n - x >$$
$$\liminf_n F^n(x_n) \geq \liminf_n F_{[\lambda]}^n(x_n)$$

il s'ensuit que

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F_{[\lambda]}(x). \tag{15}$$

Comme $\sup_{\lambda > \overline{\lambda}} F_{[\lambda]}(x) = F(x)$ on a bien

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x).$$

Supposons alors $\overline{\lambda} = +\infty$ cela signifie que $F_{[\lambda]}(x) = F(x)$, pour tout $\lambda > 0$. Il s'ensuit que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} F_{[\lambda]}^n(x) \right) = F(x)$$

Il existe donc $\lambda(n) \uparrow +\infty$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(F_{[\lambda(n)]}^n(x) \right) = F(x).$$

Choisissons $v_{\lambda(n)}^n \in \partial F_{[\lambda(n)]}^n(x)$, on a

$$|v_{\lambda(n)}^n| \leq \frac{1}{\lambda(n)}$$

d'où $v_{\lambda(n)}^n \xrightarrow{s} 0$ et on achève la démonstration comme en (15).

- $d(0, \text{dom } F^*) > 0$

Posons $c = d(0, \text{dom } F^*)$ et définissons

$$\overline{\lambda} = \inf\left\{ \lambda > 0; 0 < \lambda < \frac{1}{c},\ F_{[\lambda]}(x) < F(x) \right\}.$$

Supposons $\overline{\lambda} < \frac{1}{c}$, pour $\lambda > \overline{\lambda}$ on a donc $F_{[\lambda]}(x) < F(x)$, d'où $x \notin J_{[\lambda]}(x)$ et $|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}$.

Choisissons $v_\lambda^n \in \partial F_{[\lambda]}^n(x)$, comme $|v_\lambda^n| \leq \frac{1}{\lambda}$, la suite (v_λ^n) converge à une sous-suite près vers $v_\lambda \in \partial F_{[\lambda]}(x)$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{\lambda} = |v_\lambda| \leq \liminf_n |v_\lambda^n| \leq \limsup_n |v_\lambda^n| \leq \frac{1}{\lambda}$$

ce qui montre que v_λ^n converge fortement vers v_λ, on achève alors la démonstration comme en (15).

Il reste donc le cas ou l'ensemble, dont $\overline{\lambda}$ est la borne inférieure, est vide, ce qui signifie que $F_{[\lambda]}(x) = F(x)$ pour tout $\lambda < \frac{1}{c}$.

Posons $\lambda^* = \frac{1}{c}$, on observe donc que, pour tout $\lambda < \lambda^*$, il existe $u_\lambda \in \partial F(x) \cap B^*_{1/\lambda}$, utilisant la remarque 3 qui suit le lemme 1.2.

Donc, à une sous-suite près on a $u_\lambda \overset{w}{\to} u_{\lambda^*}$ quand $\lambda \to \lambda^*$, où $u_{\lambda^*} \in \partial F(x)$. Il s'ensuit que

$$|u_{\lambda^*}| \leq \liminf_{\lambda \to \lambda^*} |u_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda^*} = c.$$

Or $u_{\lambda^*} \in \partial F(x)$ donc $u_{\lambda^*} \in \operatorname{dom} F^*$ et

$$|u_\lambda^*| \geq d(0, \operatorname{dom} F^*) = c$$

d'où $|u_\lambda^*| = c$, on en déduit que $F_{[\lambda^*]}(x) = F(x)$.

Choisissons alors $v_{\lambda^*}^n \in \partial F_{[\lambda^*]}^n(x)$, à une sous-suite près, on a $v_{\lambda^*}^n \overset{w}{\to} v_{\lambda^*}$ avec $v_{\lambda^*} \in \partial F_{[\lambda^*]}(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} &\liminf_n |v_{\lambda^*}^n| \geq |v_{\lambda^*}| \\ &|v_{\lambda^*}| \geq c \text{ car } v_{\lambda^*} \in \operatorname{dom} F^*, \text{ de plus} \\ &c \geq \limsup_n |v_{\lambda^*}^n| \text{ car } |v_{\lambda^*}^n| \leq \frac{1}{\lambda^*} = c. \end{aligned}$$

On en déduit que $v_{\lambda^*}^n$ converge fortement vers v_{λ^*} et on conclut comme en (15).

Remarque. — Quand $x \notin J_{[\lambda]}(x)$, on a $|\partial F_{[\lambda]}(x)| = \frac{1}{\lambda}$, il en résulte que $\partial F_{[\lambda]}(x)$ est réduit à un seul élément, grâce à la stricte convexité de la norme de X^*, et donc que $F_{[\lambda]}$ est Gâteaux-différentiable en x.

3. Etude d'une classe générale d'approximation inf-convolutives

On commence par rappeler que l'on définit dans un espace de Banach X (voir [Bro] par exemple), l'application de dualité

$$\begin{aligned} H : X &\longrightarrow X^* \\ x &\longmapsto \partial\Big(\frac{1}{2}\,|\cdot|^2\Big) \end{aligned} \tag{16}$$

$H(x)$ est caractérisée par

$$H(x) = \{x^* \in X^*, |x^*| = |x| \text{ et } < x^*, x > = |x|^2\}. \tag{17}$$

Dans le cas ou l'espace X est réflexif et renormé comme en (8), l'application de dualité est univoque, de plus, pour tout $x \neq 0$

$$\nabla(|\cdot|)(x) = \frac{H(x)}{|x|}. \tag{18}$$

On considère alors

$$k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ \text{ une fonction convexe coercive paire nulle en } 0. \tag{19}$$

Pour $F \in \Gamma_0(X)$ et $\lambda > 0$, on pose

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \inf_{u\in X}\Big\{F(u) + \frac{1}{\lambda}\,k\big(|x-u|\big)\Big\} \\ &= \Big(F\nabla\frac{1}{\lambda}\,k(|\cdot|)\Big)(x) \end{aligned} \tag{20}$$

$F_\lambda(x)$ est une fonction convexe continue.

Définissons

$$C = \{x^* \in X^*,\ |x^*| \in \operatorname{dom} k^*\} \tag{21}$$

C est un convexe équilibré d'intérieur non vide, la jauge de C, notée $\|\cdot\|$, est alors une semi-norme continue sur X^*

$$\forall x^* \in X^*,\ \|x^*\| = \inf\{\alpha > 0,\ |x^*| \in \alpha \operatorname{dom} k^*\}. \tag{22}$$

On a alors le

LEMME 3.1.— *On suppose que $k(\cdot)$ vérifie (19), alors*

i) $F_\lambda > -\infty \Longleftrightarrow \lambda$ *dom* $F^* \cap C \neq \emptyset$.

ii) $\dfrac{1}{\lambda} > d(0, dom\ F^*) \Longrightarrow F_\lambda > -\infty$, *de plus si on pose*

$$J_\lambda(x) := Argmin \left\{F(\cdot) + \frac{1}{\lambda}\ k(|x - \cdot|)\right\},$$

$J_\lambda(x)$ est non vide, convexe et faiblement compact.

iii) $\dfrac{1}{\lambda} < d(0, dom\ F^*) \Longrightarrow F_\lambda \equiv -\infty$.

Démonstration.— i) F_λ étant convexe et continue on a

$$F_\lambda > -\infty \Longleftrightarrow (F_\lambda)^* \not\equiv +\infty.$$

Or

$$(F_\lambda)^*(x^*) = F^*(x^*) + \frac{1}{\lambda}\ k^*(\lambda|x^*|) \text{ d'où i).}$$

ii) Supposons $\dfrac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*)$, il existe donc $x^* \in \text{dom } F^*$ tel que $\|x^*\| < \dfrac{1}{\lambda}$. Utilisant la définition de $\|x^*\|$ et le fait que la semi-norme $\|\cdot\|$ est continue, il vient

$$\lambda|x^*| \in \text{int}(\text{dom } k^*).$$

Posons $z^* = \lambda x^*$, il s'ensuit que

$$z^* \in \text{int}\big(\text{dom } (k(|\cdot|))^*\big). \tag{23}$$

Il vient alors, pour tout $u \in X$

$$\begin{aligned} F(u) + \frac{1}{\lambda}\ k(|x-u|) &\geq\ < x^*, u > -F^*(x^*) + \frac{1}{\lambda}\ k(|x-u|) \\ &\geq \frac{1}{\lambda}\Big\{< z^*, u > + k(|x-u|)\Big\} - F^*(x^*). \end{aligned} \tag{24}$$

Posons $\varphi(u) =< z^*, u > -k(|x-u|)$, on observe que

$$\begin{aligned} \varphi^*(u^*) &=< u^* - z^*, x > \ + k^*(|u^* - z^*|) \\ \varphi^*(0) &=< -z^*, x > \ + k^*(|z^*|) \end{aligned} \tag{25}$$

d'où $\inf_X \varphi > -\infty$ et ii) est bien démontré.

De plus, grâce à (23) et (25). φ^* est continue en 0 donc φ est coercive ce qui montre que le minimum est atteint dans la définition de $F_\lambda(x)$ et que l'ensemble $J_\lambda(x)$ des points réalisant ce minimum est convexe faiblement compact.

iii) On suppose que $\dfrac{1}{\lambda} < d(0, \text{dom } F^*)$.

Soit $x^* \in \text{dom } F^*$, on a donc

$$\frac{1}{\lambda} < \inf\{\alpha > 0,\ |x^*| \in \alpha \text{ dom } k^*\}$$

d'où $\lambda|x^*| \notin$ dom k^*, comme $(F_\lambda)^*(x^*) = F^*(x^*) + \dfrac{1}{\lambda}\, k^*(|\lambda x^*|)$ on a

$$(F_\lambda)^* \equiv +\infty, \text{ d'où } F_\lambda \equiv -\infty.$$

Remarques. — 1) Si $\dfrac{1}{\lambda} = d(0, \text{dom } F^*)$, on ne peut rien dire en général (voir les exemples suivant le lemme 1.1).

2) Si $k(\cdot)$ est fortement coercive, à savoir

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{k(t)}{t} = +\infty,$$

on a dom $k^* = \mathbf{R}$ d'où $\|\cdot\| \equiv 0$, la condition $\dfrac{1}{\lambda} > d(0, \text{dom } F^*)$ est donc vérifiée pour tout $\lambda > 0$.

On va s'intéresser maintenant à la régularité des approximées, pour ceci, on fait à partir de maintenant l'hypothèse

$$\begin{aligned} &k(\cdot) \text{ est strictement convexe, dérivable et } k'(0) = 0 \\ &\text{et on suppose que la norme de } X \text{ vérifie (8).} \end{aligned} \tag{26}$$

PROPOSITION 3.2. — *On suppose que $k(\cdot)$ vérifie (19) et (26), alors, pour tout $\lambda > 0$ vérifiant $\dfrac{1}{\lambda} > d(0, dom\ F^*)$*

i) $J_\lambda(x)$ est réduit à un élément

ii) F_λ est de classe C^1 et on a

$$A_\lambda(x) := \nabla F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\, k'\big(|x - J_\lambda(x)|\big) \frac{H\big(x - J_\lambda(x)\big)}{|x - J_\lambda(x)|} \tag{27}$$

où l'on fait la convention $\dfrac{0}{|0|} = 0$ *et où* H *est l'application de dualité de* X *dans* X^* *définie en (16).*

Démonstration. — i) se déduit immédiatement de la stricte convexité de $k(\cdot)$.

Pour démontrer ii), on remarque, suivant P.J.Laurent ([L]) que

$$\begin{aligned}\partial F_\lambda(x) &= \partial F(J_\lambda(x)) \cap \frac{1}{\lambda}\, \partial k(|\cdot|)(x - J_\lambda(x)) \\ &= \partial F(J_\lambda(x))) \cap \left\{ \frac{1}{\lambda}\, k'(|x - J_\lambda(x)|) \frac{H(x - J_\lambda(x)}{|x - J_\lambda(x)|} \right\}.\end{aligned}$$

On observe donc que $\partial F_\lambda(x)$ est réduit à un seul élément, la fonction F_λ est donc Gâteaux-différentiable et sa Gâteaux dérivée est donnée par (27). Il suffit alors de montrer que $\nabla F_\lambda(\cdot)$ est continue.

Pour ceci, on considère $x \in X$ et une suite $x_n \xrightarrow{s} x$. Posons

$$G_n(u) = F(u) + \frac{1}{\lambda}\, k(|x_n - u|),$$

il est clair que

$$G = M - \lim_e G_n$$

où

$$G(u) = F(u) + \frac{1}{\lambda}\, k(|x - u|).$$

Les fonctions F_n étant équi-coercives (voir (23), (24), et (25)) on obtient, utilisant les propriétés variationnelles de l'épi-convergence

$$\begin{cases} J_\lambda(x_n) \xrightarrow{w} J_\lambda(x) \\ F(J_\lambda(x_n)) + \dfrac{1}{\lambda}\, k(|J_\lambda(x_n) - x_n|) \xrightarrow{n \to +\infty} F(J_\lambda(x))) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\lambda}\, k(|J_\lambda(x) - x|) \end{cases} \tag{28}$$

on en déduit, utilisant la propriété

$$\left.\begin{aligned} &a_n + b_n \xrightarrow{n \to +\infty} a + b \\ &\liminf_n \ a_n \geq a \\ &\liminf_n \ b_n \geq b \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} &a_n \xrightarrow{n \to +\infty} a \\ &\text{et} \\ &b_n \xrightarrow{n \to +\infty} b \end{aligned}$$

$$k\big(|J_\lambda(x_n)-x_n|\big)\xrightarrow{n\to+\infty}k\big(|J_\lambda(x)-x|\big)$$

et donc, utilisant la continuité de $k^{-1}(\cdot)$

$$|J_\lambda(x_n)-x_n|\xrightarrow{n\to+\infty}|J_\lambda(x)-x|.$$

On en déduit que

$$J_\lambda(x_n)\xrightarrow{s}J_\lambda(x). \tag{29}$$

La suite $\big(A_\lambda(x_n)\big)$ est alors bornée et converge faiblement vers $A_\lambda(x)$ grâce à la semi-continuité supérieure de $\partial F_\lambda(\cdot)$ et au fait que $\partial F_\lambda(x)=\big\{\nabla F_\lambda(x)\big\}$.

De plus

$$|A_\lambda(x_n)|=k'\big(|J_\lambda(x_n)-x_n|\big).$$

donc

$$|A_\lambda(x_n)|\xrightarrow{n\to+\infty}|A_\lambda(x)|$$

ce qui, joint au fait que $A_\lambda(x_n)\xrightarrow{w}A_\lambda(x)$ montre que $A_\lambda(x_n)\xrightarrow{s}A_\lambda(x)$.

On peut alors relier la convergence au sens de Mosco d'une suite de fonctions convexes, s.c.i. et propres à la convergence simple des approximées définies en (20).

THÉORÈME 3.3. — *Soient* $\big\{F^n,\ F:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\},\ n\in\mathbf{N}\big\}$ *des fonctions de* $\Gamma_0(X)$ *où* X *est un espace de Banach réflexif vérifiant (8).*

i) Si $F=M-\lim_e F_n$ *alors, pour tout* $\lambda>0$ *vérifiant* $\dfrac{1}{\lambda}>d(0,dom\ F^*)$ *et pour tout* $x\in X$,

$$F_\lambda(x)=\lim_{n\to+\infty}F_\lambda^n(x). \tag{30}$$

ii) Réciproquement, si (30) a lieu pour tout $\lambda>0$ *assez petit, et pour tout* $x\in X$, *alors*

$$F=M-\lim_e F^n. \tag{31}$$

Démonstration. — i) considérons $\lambda>0$ tel que $\dfrac{1}{\lambda}>d(0,\mathrm{dom}\ F^*)$, il existe donc $x^*\in\mathrm{dom}\ F^*$ tel que

$$\frac{1}{\lambda}>\|x^*\|. \tag{32}$$

Par ailleurs, comme $F = M - \lim_e F^n$, on sait ([M2]) que $F^* = M - \lim_e (F^n)^*$. Il existe donc $x^* \in \operatorname{dom} F^*$ et $x_n^* \xrightarrow{s} x^*$ telle que $F^*(x^*) = \lim_{n \to +\infty} (F^n)^*(x_n^*)$.

Utilisant (32), il vient $\|\lambda x^*\| < 1$ donc $\lambda x^* \in \operatorname{int}(C)$. Il existe donc $0 < r \leq R$ tel que

$$|\lambda x^*| < r \quad \text{et} \quad [-R, +R] \subset \operatorname{dom} k^*. \tag{33}$$

Pour n assez grand, il s'ensuit que

$$|\lambda x_n^*| < r. \tag{34}$$

Posons $z_n^* = \lambda x_n^*$, il vient, pour tout $u \in X$

$$F^n(u) + \frac{1}{\lambda}\, k(|x-u|) \geq \frac{1}{\lambda}\, \{< z_n^*, u > \ + k(|x-u|)\} - (F^n)^*(x_n^*). \tag{35}$$

Définissons

$$\varphi^n(u) \ = \ < z_n^*, u > \ + \ k(|x-u|)$$

on observe que

$$(\varphi^n)^*(u^*) = k^*(|z_n^* - u^*|) \ + \ < u^* - z_n^*,\ x >$$

ce qui, joint à (33) et (34) montre que la suite (φ^n) est équi-coercive (la suite $(\varphi^n)^*$ étant équi-majorée sur $B_{R-r}(0)$.

La suite de fonctions

$$\widetilde{F}^n(u) = F^n(u) + k(|x-u|)$$

converge au sens de Mosco vers

$$\widetilde{F}(u) = F(u) + k(|x-u|).$$

Cette suite étant équicoercive, on a bien, utilisant les propriétés variationnelles de l'épi-convergence

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\inf_X \widetilde{F}^n\right) = \inf_X \widetilde{F}$$
$$\lim_{n \to +\infty} F_\lambda^n(x) = F_\lambda(x),$$

ce qui démontre i).

ii) 1er point

Soit $x \in X$ et $x_n \xrightarrow{w} x$, on veut montrer

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x). \tag{36}$$

Pour ceci, on remarque que

$$F^n(x_n) \geq F^n_\lambda(x_n)$$

$$F^n(x_n) \geq F^n_\lambda(x) + < A^n_\lambda(x), x_n - x > . \tag{37}$$

Supposons que l'on ait, pour tout $\lambda > 0$ assez petit

$$A^n_\lambda(x) \xrightarrow{s} A_\lambda(x). \tag{38}$$

Passant à la limite inférieure dans (37) et utilisant l'hypothèse (30), il vient

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F_\lambda(x). \tag{39}$$

Comme $\sup_{\lambda>0} F_\lambda(x) = F(x)$, on obtient

$$\liminf_n F^n(x_n) \geq F(x). \tag{40}$$

Il reste à démontrer (38).

Pour tout $x \in X$, $\xi \in X$ et $n \in \mathbf{N}$, on sait que

$$F^n_\lambda(x+\xi) - F^n_\lambda(x) \geq < A^n_\lambda(x), \xi > . \tag{41}$$

Grâce à l'hypothèse (30), il s'ensuit que la suite $(< A^n_\lambda(x), \xi >)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, la suite $\left(A^n_\lambda(x)\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, elle converge donc faiblement, à une sous-suite près vers un certain $\eta \in X^*$. Passant à la limite dans (41), il vient

$$F_\lambda(x+\xi) - F_\lambda(x) \geq < \eta, \xi >$$

d'où $\eta = \nabla F_\lambda(x) = A_\lambda(x)$, ce qui montre

$$A^n_\lambda(x) \xrightarrow{w} A_\lambda(x). \tag{42}$$

Il suffit alors de démontrer, utilisant (8) que

$$|A^n_\lambda(x)| \xrightarrow{n \to +\infty} |A_\lambda(x)|. \tag{43}$$

Définissons alors

$$h^n(\lambda) := \lambda F_\lambda^n(x) = \inf_{u\in X}\{\lambda F^n(u) + k(|x-u|)\} \tag{44}$$

$$h(\lambda) := \lambda F_\lambda(x) = \inf_{u\in X}\{\lambda F(u) + k(|x-u|)\}. \tag{45}$$

La fonction $h^n(\cdot)$ est concave, elle est donc continue sur l'intérieur de son domaine effectif, qui contient $]0, \dfrac{1}{d(0, \mathrm{dom}(F^n)^*}[$.

De plus, utilisant le théorème 1 de [V]

$$\partial h^n(\lambda) = \{F^n(J_\lambda^n(x))\} \text{ pour tout } \lambda > 0, \lambda \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}\ h^n).$$

ce qui montre que $h^n(\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\ h^n)$ et

$$(h^n)'(\lambda) = F^n(J_\lambda^n(x)). \tag{46}$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to+\infty} h^n(\lambda) = h(\lambda) \text{ pour } \lambda \text{ assez petit.}$$

D'après le lemme 3.28 de [A1] on obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} (h^n)'(\lambda) = h'(\lambda). \tag{47}$$

Réunissant (30), (46) et (47), il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\{F^n(J_\lambda^n(x)) + \frac{1}{\lambda}\, k(|x - J_\lambda^n(x)|)\} = F(J_\lambda(x)) + \frac{1}{\lambda}\, k(|x - J_\lambda(x)|)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} F^n(J_\lambda^n(x)) = F(J_\lambda(x))$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} k(|x - J_\lambda^n(x)|) = k(|x - J_\lambda(x)|)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |x - J_\lambda^n(x)| = |x - J_\lambda(x)|.$$

Comme $|A_\lambda^n(x)| = k'(|x - J_\lambda^n(x)|)$ on obtient bien

$$\lim_{n\to+\infty} |A_\lambda^n(x)| = |A_\lambda(x)|$$

ce qui achève de démontrer (38) et le premier point de ii).

ii) **2ème point**

Soit $x \in X$, il est clair que, pour tout $F \in \Gamma_0(X)$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} F_\lambda(x) = F(x). \tag{48}$$

Utilisant l'hypothèse (30), il vient

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left[\lim_{n \to +\infty} \left(F_\lambda^n(x) \right) \right] = F(x)$$

par diagonalisation, il existe donc $\lambda(n) \downarrow 0$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} F_{\lambda(n)}^n(x) = F(x). \tag{49}$$

Posons $x_n = J_{\lambda(n)}^n(x)$, il vient

$$\begin{aligned} \limsup_n F^n(x_n) &\leq \limsup_n F_{\lambda(n)}^n(x_n) \\ &\leq F(x). \end{aligned}$$

Reste à démontrer que $x_n \xrightarrow{s} x$.

Pour ceci on remarque que, pour $x_0 \in \operatorname{dom} F$ et $\lambda_0 > 0$ fixé, on obtient, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in X$

$$\begin{aligned} &F^n(x) \geq F_{\lambda_0}^n(x) \\ &F^n(x) \geq F_{\lambda_0}^n(x_0) + < A_{\lambda_0}^n(x_0), x - x > \\ &F^n(x) \geq -C\big(|x| + 1\big) \quad . \end{aligned} \tag{50}$$

Par ailleurs, la fonction $k(\cdot)$ étant coercive, il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ telles que

$$k(t) \geq \alpha |t| - \beta \tag{51}$$

Choisissons $\lambda > 0$ tel que $\frac{\alpha}{\lambda} > C$ et combinons (50) et (51), il vient, pour tout $u \in X$

$$F^n(u) + \frac{1}{\lambda} k\big(|x - u|\big) \geq \big(\frac{\alpha}{\lambda} - C\big)|u| - C'.$$

On obtient donc, pour n assez grand

$$\big(\frac{\alpha}{\lambda} - C\big)|x_n| - C' \leq F_{\lambda(n)}^n(x) \leq M.$$

La suite (x_n) est alors bornée et vérifie donc

$$\frac{1}{\lambda(n)}\, k\big(|x_n - x|\big) \leq M$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} k\big(|x_n - x|\big) = 0$$

et on a bien $x_n \xrightarrow{s} x$, ce qui achève la démonstration.

Références

[A] ALART (P.). — *Contribution à la résolution numérique des inclusions différentielles.* Thèse 3ème cycle, Montpellier, 1985.

[As] ASPLUND (E.). — Averaged norms, *Israël Journ. of Math.*, t. **5**, 1967, p. 227-233.

[A1] ATTOUCH (H.). — *Variational convergence for functions and operators.* — Pitman applicable mathematics series, 1984.

[A2] ATTOUCH (H.). — Famille d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité, *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, t. **4**, **120**, 1979, p. 35-111.

[A-Az-W] ATTOUCH (H.), AZE (D.), WETS (R.J.B.). — Continuity properties of the partial Legendre-Fenchel transform : convergence of sequences of augmented Lagrangian functions, Moreau-Yosida approximates and subdifferential operators, *Fermat days 85 Math. for Optimization, J.B. Hiriart-Urruty editor, North-Holland Math. Studies*, t. **129**, 1986, p. 1-42.

[A-W] ATTOUCH (H.), WETS (R.). — Isometries for the Legendre Fenchel transform, *Transactions of the A.M.S.*, t. **296,1**, 1986, p. 33-60.

[B] BOUGEARD (M.). — Contribution à la théorie de Morse, *Cahiers du CEREMADE*, t. **7911**, 1979.

[B-P-P] BOUGEARD (M.), PENOT (J.P.) POMMELET (A.). — *Approximation and decomposition properties of some class of locally D.C. functions.* — A paraître 1986.

[Br] BREZIS (H.). — *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* — North-Holland, 1973.

[Bro] BROWDER (F.). — *Problèmes non linéaires.* — Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[DG] DE GIORGI (E.). — *G-operators and Γ-convergence.* — Congrès international de Mathématiques Varsovie, 1983.

[F-T] FOUGERES (A.), TRUFFERT (A.). — *Régularisation s.c.i. et Γ-convergence, approximations inf-convolutives associées à un référentiel.* — A paraître aux Ann. di Mat. Pura ed Appl., 1986.

[H-U1] HIRIART-URRUTY (J.B.). — Lipschitz r-continuity of the approximate subdifferential of a convex function, *Math. Scand.*, t. **47**, 1980, p. 123-134.

[H-U2] HIRIART-URRUTY (J.B.). — Extension of Lipschitz functions, *Jour. of Math. Anal. and Appl.*, t. **77**, 1980, p. 539-554.

[H] HOLMES (R.B.). — A course on optimization and best approximation, *Lecture Notes in Mathematics, Springer*, t. **257**, 1972.

[J] JOLY (J.L.). — Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue, *Journ. Math. Pure et Appl.*, t. **52**, 1973, p. 421-441.

[L] LAURENT (P.J.). — *Approximation et Optimisation*. — Hermann, 1972.

[MS] Mc SHANE (E.J.). — Extension of range of functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **40**, 1934, p. 837-842.

[MO1] MOREAU (J.J.). — Proximité et dualité dans les espaces Hilbertiens, *Bull. Soc. Math. France*, t. **93**, 1965, p. 273-299.

[MO2] MOREAU (J.J.). — Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques, *Journ. Math. Pures et Appl.*, t. **49**, 1969, p. 510-585.

[M1] MOSCO (U.). — Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. in Math. Vol.3*, t. **4**, 1969, p. 510-585.

[M2] MOSCO (U.). — On the continuity of the Young-Fenchel transformation, *Journ. Math. Anal. and Appl.*, t. **35**, 1971, p. 518-535.

[P] PENOT (J.P.). — *Towards minimal assumptions for the infimal convolution regularization*. — A paraître 1986.

[Po] POMMELLET (A.). — *Analyse convexe et théorie de Morse*. — Thèse 3ème cycle, Univ. Paris IX, 1982.

[R] ROCKAFELLAR (R.T.). — Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM Journ. of Control*, t. **14**, 1976, p. 877-898.

[S-W] SALINETTI (G.), WETS (R.J.B.). — On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, *SIAM rev.*, t. **21**, 1979, p. 18-33.

[S] SONNTAG (Y.). — *Convergence au sens de U. Mosco : Théorie et applications à l'approximation des solutions d'inéquations*. — Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Provence, 1982.

[T] TROYANSKI (S.L.). — On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non separable Banach spaces, *Studia Math.*, t. **37**, 1971, p. 173-180.

[V] VALADIER (M.). — Sous-différentiels d'une borne supérieure et d'une somme continue de fonctions convexes, *C.R.A.S., p.268*, t. **A**, 1969, p. 39-42.

[W] WETS (R.). — *Convergence of convex functions, variational inequalities and convex optimization problems. In "variational inequalities and complementarity problems"* Eds : R. Cottle, F. Gianessi, J.L. Lions, J. Wiley, 1980 p. 375-403.

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1986)