Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Mohamed-Kheir Ahmad

Sur le problème d'isomorphisme et la suite de dimension

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 1 (1986-1987), p. 93-101

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_1_93_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°1, 1986-1987

Sur le problème d'isomorphisme et la suite de dimension

MOHAMED-KHEIR AHMAD [(1)] [(2)]

RÉSUMÉ. — Dans ces papiers nous démontrons les théorèmes suivants :

1) Si $D_6 = \{1\}$ alors $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow G' = H'$ quels que soient les groupes de torsion G et H.

Ce théorème est plus général que celui de J.RITTER et S.SEHGAL Arch. Math. Vol. 40 (1983).

2) Si G et H sont de torsion alors $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$ pour $i \leq j \leq 2(i+1)$.

Ce théorème est aussi plus général que celui de T.FURUKAWA Math. J. Okayama Univ. Vol. 23 (1981).

Puis nous donnons une méthode simple pour démontrer de nombreux résultats connus sur le problème d'isomorphisme.

ABSTRACT. — We denote by $\mathbf{Z}[G]$ the integral group rings of a group G and by D_i the i th dimension subgroup of G.

J.RITTER and S.SEHGAL [1] showed that : "if G is finite, if $D_6 = \{1\}$ and if G has a prime exponent p then $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow G \simeq H$".

In this paper, we prove that : if $D_6 = \{1\}$ then $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow G \simeq H$ for all torsion groups G and H.

Also, T.FURUKAWA [2] showed that : "if G is a torsion group then $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$ for all j with $i \leq j \leq 2i$ (D_i^* is the i th dimension subgroup of H)".

Here we prove that : if G and H are torsion groups then $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow D_i/D_j \simeq D_i/Dj$ for all j with $i \leq j \leq 2(i+1)$.

Introduction

Soit G un groupe de torsion (en particulier fini ou localement fini). Le i^{eme} sous-groupe de dimension de $\mathbf{Z}[G]$ est le groupe $D_i = G \cap [1 + \omega(G)^i]$, où $\omega(G)$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[G]$.

(1) Université de Tichrine, Lattaquié - Syrie

(2) J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur Jean-Pierre Soublin qui m'a permis de venir cet été à l'Université de Provence pour réaliser cet article et avec qui j'ai pu discuter de ce travail

Dans [1] J.Ritter et S.Sehgal ont démontré le théorème suivant : "Si G est fini, si $D_6 = \{1\}$ et si G' a un exposant premier p alors $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow G' \simeq H'$". Nous démontrons ici que : si $D_6 = \{1\}$ alors $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow G' \simeq H'$ quels que soient les groupes de torsion G et H.

D'autre part, dans [2,th.A] T.Furukawa a démontré que : "Si G est un groupe de torsion alors $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$ pour $i \leq j \leq 2i$ où D_j^* est le i^{eme} sous-groupe de dimension de $\mathbf{Z}[H]$". Nous démontrons ici que si G et H sont de torsion alors $\mathbf{Z}[G] \simeq \mathbf{Z}[H] \Rightarrow D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$ pour $i \leq j \leq 2(i+1)$.

Notations. — Dans tout ce qui suit : G et H sont des groupes de torsion, $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ est un isomorphisme normalisé (voir [3]p.63-64).

- Si N est un sous-groupe normal de G (notation $N \triangleleft G$) $\omega_G(N)$ désignera l'idéal bilatère de $\mathbf{Z}[G]$ engendré par $\{1-g\}_{g \in N}$ et $\delta_N : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[G/N]$ sera l'homorphisme qui prolonge linéairement l'homomorphisme canonique $G \to G/N$, en particulier $\omega_G(G) = \omega(G)$ est l'idéal d'augmentation et $\delta_G = \delta$ est l'homomorphisme d'augmentation.

- Si X est un groupe, $X' = X^{(1)}$ est le sous-groupe dérivé de X.

Pour démontrer nos résultats, nous avons besoin des trois lemmes suivants qui sont bien connus :

Lemme 1.— *Soit $N \triangleleft G$. Si $x \in \mathbf{Z}[N]$ est tel que $x \in \omega(G)\omega_G(N)^i$ alors $x \in \omega(N)^{i+1}$ $\forall i \geq 1$.*

Démonstration.— Soit $\{g_i\}_{j \in J}$ un système de représentants des classes de G modulo $N, \sigma : G \to N$ l'application définie par $g_j n \xrightarrow{\sigma} n$. Prolongeons σ linéairement : $\mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[N]$. On a alors : $x = \sum_s x_s \prod_{t=1}^{i}(1-n_{st})$ où $x_s \in \omega(G)$ et $n_{st} \in N$, mais puisque $x \in \mathbf{Z}[N]$ on a :

$$x = \sigma(x) = \sum_s \sigma(x_s) \prod_{t=1}^{i}(1-n_{st}) \in \omega(N)^{i+1}$$

car $x_s \in \omega(G) \Rightarrow \sigma(x_s) \in \omega(N)$ (par définition de σ).

Lemme 2.— *([2] (II)) : Soit $N \triangleleft G$ et $g \in G$. Alors $g \in N' \Longleftrightarrow g \equiv 1$ mod $\omega(G)\omega_G(N)$.*

Lemme 3.— *([2] lemma 1.4) : Soit $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ un isomorphisme normalisé et soit $N \triangleleft G$. Alors il existe $N^* \triangleleft H$ unique tel que $\varphi(\omega_G(N)) = \omega_H(N^*)$ où $N^* = \{h \in H; \delta_N\ \varphi^{-1}(h) = 1\}$.*

Remarque 1.— I) Soient N et M deux sous-groupes normaux de G tels que $N \subseteq M$ alors $\delta_N(\omega_G(M)) = \omega_{G/N}(M/N)$ car quels que soient $g \in G$ et $m \in M$ on a : $\delta_N(g(1-m)) = gN(N - mN)$ puisque δ_N est un homomorphisme.

II) Soit $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ un isomorphisme normalisé, soit $N \triangleleft G$ et soit N^* le sous-groupe normal de H déterminé par le lemme 3 (ce sous-groupe sera appelé le sous-groupe normal de H associé au sous-groupe normal N de G). On peut voir facilement qu'on a un isomorphisme normalisé $\overline{\varphi} : [G/N] \to \mathbf{Z}[H/N^*]$ tel que $\overline{\varphi}\delta_N = \delta_{N^*}\varphi.\overline{\psi}$ sera appelé : l'isomorphisme induit par $\overline{\varphi}$ et associé à N.

III) Soit $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ un isomorphisme normalisé. Soient $N \subseteq M$ deux sous-groupes normaux de G et soient $N^* \subseteq M^*$ leurs associés de H respectivement. On a les propriétés suivantes :

a) Si $\varphi(M) \subseteq H$ alors $\varphi(M) = M^*$.

b) Si $\overline{\varphi} : \mathbf{Z}[G/N] \to \mathbf{Z}[H/N^*]$ est l'isomorphisme induit par φ, alors $\overline{\varphi}(\omega_{G/N}(M/N)) = \omega_{H/N^*}(M^*/N^*)$,

1) si $\varphi(M) = Q$ alors $\varphi(\omega_G(M)) = \omega_H(Q) = \omega_H(M^*)$, d'où $Q = M^*$.

2) par I) et II) on a :

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\omega_{G/M}(M/N)) = \overline{\varphi}_N(\omega_G(M)) = \delta_{N^*}\varphi(\omega_G(M)) = \delta_{N^*}(\omega_H(M))\\ = \omega_{H/N^*}(M/N).\end{aligned}$$

IV) Si $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ est un isomorphisme normalisé et si z (resp. z^*) est le centre de G (resp. de H) alors $\varphi(z) = z^*$. En effet si $g \in z, \varphi(g)$ est unité d'ordre fini central de $\mathbf{Z}[H]$ et $\varphi(g) \in z^*$ ([3] corol. 1.7 p.46) d'où $\varphi(z) \subseteq z^*$ et de même $\varphi^{-1}(z^*) \subseteq z$, donc $\varphi(z) = z^*$.

V) Si N^* est le sous-groupe normal de H associé au sous-groupe normal N de G alors $N^{*\prime}$ est associé à N', car d'après le lemme 3 on sait qu'il existe un sous-groupe normal M^* de H tel que $\varphi(\omega_G(N')) = \omega_H(M^*)$. On a $M^* \subseteq N'^*$ car : $m \in M^* \Rightarrow m - 1 \in \omega_H(M^*) \Rightarrow \varphi^{-1}(m-1) \in \omega_G(N') \subset \omega_G(N)^2$ (puisque $g \in N' \Rightarrow g \in D_2(N)$, le 2ème sous-groupe de dimension de $\mathbf{Z}[N]$, (voir [3] Prop. 1.14 p.75) et $g - 1 \in \omega(N)^2 \subset \omega_G(N)^2$, donc les générateurs de $\omega_G(N')$ sont dans $\omega_G(N)^2$) d'où $m - 1 \in \varphi(\omega_G(N)^2) = \omega_H(N^*)^2 \subset \omega(H)\omega_H(N^*)$ et comme $m - 1 \in \mathbf{Z}[N^*]$ on a $m - 1 \in \omega(N^*)^2$) (lemme 1), d'où $m \in N^* \cap [1 + \omega(N^*)^2] = D_2(N^*) = N^{*\prime}$, donc $M^* \subseteq N^{*\prime}$ et par suite $\varphi(\omega_G(M')) \subseteq \omega_H(N^{*\prime})$ et de la même façon on montre que $\varphi^{-1}(\omega_H(N^*)) \subseteq \omega_G(N')$ d'où $\varphi(\omega_G(N')) = \omega_H(N^{*\prime})$.

D'après ce qui précède, on voit que si $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ est un isomorphisme normalisé, si $N \subseteq M$ sont deux sous-groupes normaux de G, si $N^* \subseteq M^*$ sont leurs associés de H respectivement, et si on pose $\Delta = \omega(G)\ \omega_G(N)$ alors le diagramme suivant est commutatif.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}[G/N'] \arrow[dr, "\psi"'] \arrow[ddd, "\varphi_3"] & \mathbf{Z}[G] \arrow[l, "\delta_{N'}"'] \arrow[r, "N\varrho"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathbf{Z}[G/N] \arrow[ddd, "\varphi_1"] \\
 & \mathbf{Z}[G]/\Delta \arrow[ur, "\overline{\delta}_N"'] \arrow[d, "\varphi_2"] & \\
 & \mathbf{Z}[H]/\Delta^* \arrow[dr, "\overline{\delta}_{N^*}"] & \\
\mathbf{Z}[H/N^{*'}] \arrow[ur, "\psi^*"] & {[H]\mathbf{Z}} \arrow[l, "\delta_{N^{*'}}"] \arrow[r, "\delta_{N^*}"'] \arrow[u, "\gamma^*"'] & \mathbf{Z}[H/N^*]
\end{tikzcd}
$$

Diagramme 1

où φ_i pour

$i = 1, 2, 3$ est l'isomorphisme induit par φ,

γ est l'homomorphisme naturel

$\overline{\delta}_N$ est l'homomorphisme induit par δ_N (on a $\ker \gamma \subseteq \ker \delta_N$)

ψ est l'homomorphisme induit par γ (on a $\ker \delta_N \subseteq \ker \gamma$ par le lemme 2).

Les lettres avec étoile sont définies d'une façon exactement semblable à leurs homologues sans étoile. On note

$$K(M,N) = \{x+\Delta \in \mathbf{Z}[G]/\Delta; \overline{\delta}_N(x+\Delta) \in M/N\}$$
$$K^*(M^*,N^*) = \{x+\Delta^* \in \mathbf{Z}[H]/\Delta^*; \delta_{N^*}(x+\Delta^*) \in M^*/N^*\}$$

PROPOSITION 1.— *Avec les hypothèses et les notations précédentes, on a :*

a) $K(M,N)$(resp. $K^*(M^*,N^*)$) est un groupe multiplicatif de $\mathbf{Z}[G]/\Delta$ (resp. $\mathbf{Z}[H]/\Delta^*$), $\gamma_{|M} : M \to K(M,N)$ (resp. $\gamma^*_{|M^*} : M^* \to K^*(M^*,N^*)$), est un homomorphisme de groupes surjectif et $\ker \gamma_{|M} = N'$ {resp. $\ker \gamma^*_{|M^*} = N^{*\prime}$} et par suite $M/N' \simeq K(M,N)$ et $M^*/N^* \simeq K^*(M^*,N^*)$.

b) $K(M,N)$ est un sous-groupe normal de $K(G,N)$.

c) $\varphi_2(K(M,N)) = K^*(M^*,N^*) \iff \varphi_1(M/N) = M^*/N^* \iff \varphi_1(M/N) \subseteq H/N^*$.

d) Si M/N est contenu dans le centre de G/N alors $\varphi_2(K(M,N)) = K^*(M^*,N^*)$, en particulier on a $\varphi_2(K(N,N)) = K^*(N^*,N^*)$ et $\varphi_2(K(N,N))$ est un sous-groupe normal de $\varphi_2(K(M,N))$ et de $K^*(M^*,N^*)$.

e) $\frac{\varphi_2(K,M,N))}{\varphi_2(K(N,N)} \simeq \frac{K^*(M^*,N^*)}{\varphi_2(K,N,N)} \iff \varphi_1(M/N) \simeq M^*/N^*$.

Démonstration.— a) On a $\gamma(M) = K(M,N)$ car il est évident que $\gamma(M) \subseteq K(M,N)$.

Or $x = \Delta \in K(M,N) \Longrightarrow \delta_N(x) \in M/N \Longrightarrow$ il existe un $m' \in M$ tel que $x - m' \in \ker \delta_N = \omega_G(N) \Longrightarrow x - m' = \sum_i r_i(n_i - 1)$ où $r_i \in \mathbf{Z}[G]$, et $n_i \in N \Longrightarrow x - m' = \sum_i a_i(n_i - 1) + X$, où $X \in \Delta$ et $a_i \in \mathbf{Z}$, car $r_i = (r_i) + X_i = a_i + X_i$ où $a_i \in \mathbf{Z}$ et $X_i \in \omega(G)$, donc $x = 1 + (m' - 1) + \sum_i a_i(n_i - 1) + X$, la formule $(X-1)+(Y-1) = (XY-1)-(X-1)(Y-1)$ implique que $x = m + Y$, où $m \in M$ et $Y \in \Delta$, d'où $Y \in \Delta$, d'où $x + \Delta = m + \Delta = \gamma(m)$, donc $K(M,N) = \gamma(M)$. Cela signifie que $K(M,N)$ est un groupe multiplicatif et que $\gamma_{|M}$ est un homomorphisme du groupe M sur le groupe $K(M,N)$.

En utilisant le lemme 2 on voit immédiatement que $\ker \gamma_{|M} = N'$, d'où $M/N' \simeq K(M,N)$. Pour $K^*(M^*,N^*)$ on a la même démonstration.

b) $M \vartriangle G \Longrightarrow \gamma(M) \vartriangle \gamma(G) \Longrightarrow K(M,N) \vartriangle K(G,N)$.

c) Si $\varphi_2(K(M,N)) = K^*(M^*,N^*)$ alors quel que soit mN de M/N on a :

$$\varphi_1(mN) = \varphi_1\delta_N(m) = \varphi_1\overline{\delta}_N(m+\Delta) = \overline{\delta}_{N^*}\varphi_2(m+\Delta) \in M^*/N^*$$

car

$$\varphi_2(m+\Delta) \in K^*(M^*,N^*),$$

donc $\varphi_1(M/N) \subseteq M^*/N^*$ et de même $\varphi_1^{-1}(M^*/N^*) \subseteq M/N$ d'où $\varphi_1(M/N) = M^*/N^*$. Réciproquement, si $\varphi_1(M/N) = M^*/N^*$ alors :

$$x+\Delta \in K(M,N) \Longrightarrow x+\Delta = \gamma(m) = m+\Delta$$

où $m \in M$ par suite

$$\overline{\delta}_{N^*}\varphi_2(x+\Delta) = \delta_{N^*}\varphi_2(m+\Delta) = \varphi_1\delta_N(m+\Delta) = \varphi_1\delta_N(m) \in M^*/N^*,$$

on en déduit que $\varphi_2(x+\Delta) \in K^*(M^*,N^*)$, donc $\varphi_2(K(M,N)) \subseteq K^*(M^*,N^*)$, de même $\varphi_2^{-1}(K^*(M^*,N^*)) \subseteq K(M,N)$, donc $\varphi_2(K(M,N)) = K^*(M^*,N^*) \Longleftrightarrow \varphi_1(M/N) = M^*/N^*$. D'après la remarque 1, III,a) on a $\varphi_1(M/N) = M^*/N^* \Longleftrightarrow \varphi_1(M/N) \subseteq H/N^*$.

d) Si $M/N \subseteq$ centre G/N alors $\varphi_1(M/N) \subseteq H/N^*$ (par la remarque 1,IV) ce qui implique par c) que $\varphi_2(K(M,N)) = K^*(M^*,N^*)$, le reste est trivial.

e) On a :

$$\varphi_1(M/N) \simeq M/N \simeq (M/N')/(N/N') \simeq \frac{K(M,N)}{K(N,N)} \simeq \frac{\varphi_2(K,M,N)}{\varphi_2(K(N,N))}$$

et

$$M^*/N^* \simeq (M^*/N^*)/(N^*/N^{*\prime}) \simeq \frac{K^*(M^*,N^*)}{K^*(N^*,N^*)} = \frac{K^*(M^*,N^*)}{\varphi_2(K(N,N))}$$

d'où le résultat demandé.

COROLLAIRE 1.— *Avec les hypothèses et notations de la proposition précédente et si on suppose que $M/N \subseteq$ centre G/N, alors $\varphi_1(M/N) = M^*/N^*$ et $M/N' \simeq M^*/N^*$. En particulier, si N est abélien alors $M \simeq M^*$. [D'après la démonstration de d) et a) de la proposition].*

Remarque 2.— I) En choisissant M et N de façon particulière, la proposition 1, nous donne d'une manière très simple beaucoup de résultats sur le problème d'isomorphisme [en particulier, quand G est fini].

Exemples.— 1) $N/N' \simeq N^*/N^{*\prime}$ et si N est abélien alors $N \simeq N^*$ (par a) et d)).

2) Si G est métabélien, en prenant $M = G$ et $N = G'$ on trouve immédiatement que $G \simeq H$.

3) Si G est un groupe fini ayant un sous-groupe abélien normal N tel que G/N soit 2-groupe hamiltonien alors $G \simeq H$ car dans ce cas-là, on a $\varphi_1(G/N) \subseteq N/H^*$.

4) Si G est nilpotent fini et si M est un p-sous-groupe normal de G d'ordre p, p^2, p^3, ou p^4 alors $M \simeq M^*$.

5) Si $\{1\} = z_o \subset z_1 \subset z_2 \subset ...$ [resp. $\{1\} = z_o^* \subset z_1^* \subset z_2^* \subset ...$] est la suite centrale ascendante de G [resp. de H] alors pour tout $i \geq 1$ on a $z_i/z_{i-1} \simeq z_i^*/z_{i-1}^{*\prime}$, en particulier $z_2 \simeq z_2^*$.

II) On définit le i^{eme} sous-groupe de dimension de G par

$$D_i = G \cap [1 + \omega(G)^i] = \{g \in G; g - 1 \in \omega(G)^i\}$$

pour $i = 1, 2, 3, ...$, on a alors une suite descendante : $G = D_1 \supset D_2 \supset ... \supset D_i \supset ...$ cette suite est appelée la suite de dimension de G, et il est bien connu que : D_i est un sous-groupe complètement caractéristique, et que $[D_i, D_j] \subseteq D_{i+h}$ pour tout i et j la suite de dimension est donc une suite centrale [i.e. $D_i/D_{i+1} \subseteq$ centre G/D_{i+1}].

PROPOSITION 2.— *Soit $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ un isomorphisme normalisé, soit N un sous-groupe normal de G, soit N^* son associé de H et soit*

$$N = D_1(N) \supset D_2(N) \supset ... \supset D_i(N) \supset ... \; (resp.\; N^* = D_1(N^*) \supset$$

$$D_2(N^*) ... \; D_i(N^*) \supset ...)$$

la suite de dimension de N (resp. de N^*). On a alors les propriétés suivantes :

1) $D_i(N^*)$ est associé à $D_i(N)$ pour $i = 1, 2, ...$, en particulier si $D_k(N) = 1$ alors $D_k(N^*) = 1$.

2) $D_i(N)/D_{i+1}(N) \simeq D_i(N^*)/D_{i+1}(N^*)$ pour $i = 1, 2, ...$ en particulier si $D_k = 1$ alors $D_k(N^*) = 1$.

Démonstration.— 1) D'après la remarque 2.II $D_i(N)$ est un sous-groupe normal de G, donc il existe un sous-groupe normal M_i^* de H tel que $\varphi(\omega_G(D_i(N)) = \omega_H(M_i^*)$. On a $M_i^* \subseteq D_i(N^*)$ car : $h \in M_i^* \Rightarrow$

$h - 1 \in \omega_H(M_i^*) \Rightarrow \varphi^{-1}(h-1) \in \omega_G(D_i(M)) \subseteq \omega_G(N)^i[g \in D_i(N) \Rightarrow g - 1 \in \omega(N)^i \subseteq \omega_G(N)^i$, donc les générateurs de $\omega_G(D_i(N))$ sont dans $\omega_G(N)^i] \Rightarrow h - 1 \in \omega_H(N^*)^i$ et comme $h - 1 \in \mathbf{Z}[N^*]$ il résulte du lemme 1 que $h - 1 \in \omega(N^*)^i$ d'où $h \in D_i(N^*)$, donc $M_i^* \subseteq D_i(N^*)$ et par suite $\varphi(\omega_G(D_i(N)) = \omega_H(M_i^*) \subseteq \omega_H(D_i(N^*))$ et de même on a $f^{-1}(\omega_H(D_i(N^*)) \subseteq \omega_G(D_i(N))$ d'où $\varphi(\omega_G(D_i(N)) = \omega_H(D_i(N^*))$ pour $i = 1, 2, ...$

2) D'après la remarque 1, III, b) on a $D_i(N)/D_{i+1}(N)$ est associé à $D_i(N^*)/D_{i+1}(N^*)$ et puisque $D_i(N)/D_{i+1}(N)$ est abélien [contenu dans le centre de $N/D_{i+1}(N)$] on a $D_i(N)/D_{i+1}(N) \simeq D_i(N^*)/D_{i+1}(N^*)$ pour $i = 1, 2, ...$

COROLLAIRE 2.— *Soit N un sous-groupe normal de G et soit N^* son associé de H, si N est nilpotent de classe deux, N^* l'est aussi.*

Démonstration.— Soit $N = N_1 \supset N_2 \supset N_3 = 1$ resp.$N^* = N_1^* \supset N_2^* \supset N_3^* \supset ...]$ la suite centrale descendante de N (resp. de N^*), d'après [(3) Propo. 1.14 p.75) on a N_i (resp. $N_i^*) = D_i(N)$ (resp. $D_i(N^*))$ pour $i = 1, 2, 3$ d'après la proposition 2, N_i^* est associé à N_i pour $i = 1, 2, 3$, d'où $N_3^* = 1$.

PROPOSITION 3.— *Soit $\varphi : \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}[H]$ un isomorphisme normalisé, et soit :*

$$G = D_1 \supset D_2 \supset ... \supset D_i \supset ...$$

(resp. $H = D_1^* \supset D_2^* \supset ... \supset D_i^* \supset ...$) la suite de dimension de G (resp. de H). On a alors les propriétés suivantes :

1) D_i^* est associé à D_i pour $i = 1, 2, 3, ...$

2) $D_i/D_{i+1} \simeq D_i^*/D_{i+1}^*$ pour $i = 1, 2, 3, ...$

$$D_j/D'_{j+1} \simeq D_j^*/D_{j+1}^{*\prime} \text{ pour } i \leq j \leq 2(i+1)$$

$D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$ pour $i \leq j \leq 2(i+1)$

3) Si D_{i_o} est abélien pour un $i_o \geq 2$ alors $D_{i-1} \simeq D_{i-1}^*$ pour tout $i \leq i_o$

4) Si G est un groupe tel que $D_k = 1$ alors $D_{i-1} \simeq D_{i-1}^*$ pour tout $i \geq \frac{k}{2}$

Démonstration.— 1) D'après la propriété de la proposition 2.

2) D'après le corollaire de la proposition 1 on a : $D_i/D_{i+1} \simeq D_i^*/D_{i+1}^*$ et $D_i/D'_{i+1} \simeq D_i^*/D_{i+1}^{*\prime}$ pour $i = 1, 2, ...$ puisque $D_i/D_{i+1} \subseteq$ centre G/D_{i+1}.

D'autre part, D_{i+1}^* est associé à D_{i+1}' et pour $i \leq j \leq 2(i+1)$ on a : $D_{i+1}', D_{i+1}] \subseteq D_{2(i+1)} \subseteq D_j$ et d'après la remarque 1,III,b), $D_j^*/D_{i+1}^{*\prime}$ est associé à D_j/D_{i+1}.

. Si $i+1 \leq j \leq 2(i+1)$ on a $D_j \subseteq D_{i+1}$, d'où $D_j' \subseteq D_{i+1}'$, D_j/D_{i+1}' est donc abélien et par suite D_j/D_{i+1}', $D_j^*/D_{i+1}^{*\prime}$ et on a vu que $D_i/D_{i+1}' \simeq D_i^*/D_{i+1}^{*\prime}$.

Donc $d_j/D_{i+1}' \simeq D_j^*/D_{i+1}^{*\prime}$ pour $i \leq j \leq 2(i+1)$. Maintenant, si $i \leq j \leq 2i$ alors D_i/D_j est abélien car $D_i' = [D_i, D_i] \subseteq D_{2i} \subseteq D_i$, d'où $D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$.

. Si $j = 2i+1$ on pose $\overline{G} = G/D_{2i+1}$ et $\overline{H} = H/D_{2i+1}^*$ alors d'après [[4] th. 3.2] on a $D_i(\overline{G}) = D_i/D_{2i+1}$ et $D_{i+1}(\overline{G}) = D_{i+1}/D_{2i+1}$ et de même pour $\overline{H}$, d'après ce qui précède : $D_i(\overline{G})/D_{i+1}'(\overline{G})$ et $D_i^*(\overline{H})/D_{i+1}^{*\prime}(\overline{H})$, sont isomorphes. Mais $D_{i+1}(\overline{G})$ est abélien car $D_{i+1}' \subseteq D_{2(i+1)} \subseteq D_{2i+1}$ donc $D_{i+1}' = \{1\}$ et de même $D_{i+1}^{*\prime}(\overline{H}) = \{1\}$ d'où $D_i(\overline{G}) \simeq D_i^*(\overline{H})$ c'est-à-dire que $D_i/D_{2i+1} \simeq D_i^*/D_{2i+1}^*$.

. Si $j = 2(i+1)$ on considère $\overline{G} = G/D_{2(i+1)}$ et $\overline{H} = H/D_{2(i+1)}^*$, on trouve de la même manière que pour $j = 2i+1$: $D_i/D_{2(i+1)} \simeq D_i^*/D_{2(i+1)}^*$. Donc $D_i/D_j \simeq D_i^*/D_j^*$ pour $i \leq j \leq 2(i+1)$.

3) Cela découle immédiatement du corollaire de la proposition 1.

4) Soit $D_k = \{1\}$ et soit $i \geq \frac{k}{2}$ alors $2i \geq k$ d'où $D_i' = [D_i, D_i] \subseteq D_{2i} \subseteq D_k = \{1\}$ donc D_i est abélien et d'après la propriété 3) précédente on a $D_{i-1} \simeq D_{i-1}^*$

Remarque 3.— I) D'après la propriété 4) de la proposition 3) si $D_6 = 1$, alors D_2 et D_2^* sont isomorphes et comme $G' = D_2$, $H' = D_2^*$ (voir [3] Prop. I.1.4 p.75) on a $G' \simeq H'$.

II) D'après la propriété 2) de la proposition 3, D_i/D_j et D_i^*/D_j^* sont isomorphes pour $i \leq j \leq 2(i+1)$ et si l'on prend $i = 1$; $j = 2(i+1) = 4$ on trouve isomorphisme entre G/D_4 et H/D_4^*.

Références

[1] RITTER (J.) and SEGHAL (S.).— Isomorphism of group rings, *Arch., Math.*, t. **40**, 1983, p. 32-39.

[2] FURUKAWA (T.).— On isomorphism invariants of integral group rings, *Math. J. Okayama Univ.*, t. **23**, 1981, p. 125-130.

[3] SEGHAL (S.K.).— *Topics in group rings.*— Marcel Dekker, New York, 1978.

[4] LOSEY (G.).— On dimension subgroups, *Trans.Amer.Math.Soc.*, t. **97**, 1960, p. 474-486.