ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GUY BOUCHITTE

Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. Application à l'homogénéisation en plasticité

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 1 (1986-1987), p. 7-36

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_1_7_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°1, 1986-1987

Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire.
Application à l'homogénéisation en plasticité.

GUY BOUCHITTE [(1)]

RÉSUMÉ. — L'épi-convergence dans $BV(\Omega)$ de la suite de fonctionnelles $F^\epsilon(u) = \int_\Omega j(x/\epsilon, Du(x))dx$, où $j(y,z)$ est périodique en y et de croissance linéaire en z, est obtenue en utilisant une notion de fonctionnelle convexe de mesure liée à la dualité (M^1, C_o). L'homogénéisation du problème de minimisation de F^ϵ sous une contrainte de Dirichlet fait apparaître un phénomène de relaxation. En application à la théorie de la plasticité, nous démontrons une conjecture de P.SUQUET [10].

ABSTRACT. — Homogenization on $BV(\Omega)$ of integral functionals with linear growth. Application to a limit analysis problem in Plasticity Theory. We consider sequences of functionals $F^\epsilon(u) = \int_\Omega j(x/\epsilon, Du(x))dx$, where $j(y,z)$ is Y-periodic with linear growth in Z. Determination on $BV(\Omega)$ of the limit homogenized functional as $\epsilon \to 0$ is obtained by using integral functionals of measures and their formulation by duality (M^1, C_o). The case of a boundary constraint is then examined and leads to a relaxation phenomenum. When appplied to plasticity theory, we prove a conjecture from P.SUQUET [10].

§ I. Introduction

Nous allons nous intéresser à des questions de convergence pour des suites de fonctionnelles du type $\int_\Omega j^\epsilon(x, Du(x))dx + I_{K^\epsilon}(u)$ où $j^\epsilon(y,z)$ est convexe, de croissance *asymptotiquement linéaire en z* et où I_{K^ϵ} est la fonction indicatrice d'une contrainte convexe. Notre motivation principale est l'homogénéisation de problèmes intervenant en plasticité où $j^\epsilon(x,z) = j(\frac{x}{\epsilon}, z)$ avec j périodique en la première variable, ϵ tendant vers 0 (Du

(1) Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme, Mathématiques, rue Henri Poincaré, 13397 Marseille Cedex 04.

est alors le tenseur symétrique des déformations). On étudiera ensuite la relaxation correspondante d'une contrainte fixe ($K^\epsilon = K$) de type Dirichlet.

La croissance linéaire imposée en z fait apparaître deux difficultés essentielles :

– Considérons, pour ϵ fixé, une fonctionnelle du type précédent soit $F(u) = \int_\Omega j(x, Du(x))dx$ que l'on veut minimiser sous une contrainte K de type Dirichlet (Ω étant supposé borné). La seule information que l'on ait a priori sur les suites minimisantes est qu'elles sont séquentiellement relativement compactes dans *un espace de fonctions à dérivées mesures :* il s'agit dans le cas vectoriel de l'espace $BD(\Omega)$ introduit par R.Temam G.Strang [1] et P.Suquet [2] et plus classiquement de l'espace $BV(\Omega)$ dans le cas scalaire (cf. E.Giusti [13]). La limite d'une suite extraite pourra donc présenter des discontinuités (zones de cassure) et, en particulier, ne pas satisfaire à la condition au bord comme cela est observé dans le problème classique des hypersurfaces-minima. Suivant de Giorgi, on est alors amené à relaxer le problème en considérant la régularisée s.c.i. correspondante de $F + I_K$ (il s'agit en fait de la régularisée s.c.i. forte dans $L^1(\Omega)$). On sait désormais que la régularisée de F admet dans les cas usuels une représentation intégrale : elle a été donnée par D.Maso [3] et M.Giaquinta-G.Modica [4] dans le cas où $j(y, z)$ *dépend continuement du paramètre* x, quoique l'approche plus directe par dualité de R.Temam [5] conduise aux mêmes conclusions lorsque j ne dépend pas de x. D'autre part, lorsque $F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx$, la forme de la fonctionnelle relaxée associée à $F + I_K$ a été clairement précisée (voir G.Anzelloti [6] pour une étude détaillée) et aussi récemment lorsque l'on remplace K par suite "convergente" K^ϵ d'obstacles unilatéraux (C.Picard [7]). En ce qui concerne la relaxation de problèmes dans $BD(\Omega)$, nous nous référons à [5]. Toutefois, les résultats mentionnés ci-dessus ne s'appliquent pas à *des milieux hétérogènes où $j(x, z)$ par nature est discontinue en x.*

– Une deuxième difficulté, liée à la non réflexivité des espaces "d'existence" $BV(\Omega)$ et $BD(\Omega)$, apparaît lorsque l'on veut adapter les techniques classiques de l'homogénéisation. Contrairement au cas où la croissance de j était supposée quadratique et résolu par P.Marcellini [24] et H.Attouch [8], [9], le problème variationnel "local" :

$$\inf \int_\Omega j(y, Dw(y) + z)dy \qquad \text{(z fixé)}$$

$$wY\text{-périodique}$$

utilisé systématiquement pour obtenir des fonctions test adéquates et des correcteurs n'a plus de solution faible au sens de l'équation d'Euler associée :

$$\operatorname{div} \partial j(y, Dw(y) + z) = 0.$$

Une façon de contourner cette difficulté est de se ramener au cas quadratique en ajoutant à $F^\epsilon(u) = \int_\Omega j(x/\epsilon, Du))dx$ un terme régularisant du type $\lambda \int_\Omega |Du|^2 dx$ avec $\lambda > 0$. Remarquons que cette démarche, adoptée par P.Suquet [10], permet seulement d'obtenir l'inégalité :

$$\limsup_{\epsilon \to o} (\inf_K F^\epsilon) \leq \inf_K F^{hom}$$

où F^{hom} est la fonctionnelle homogénéisée associée à la suite F^ϵ.

La méthode que nous exposons ici est une méthode d'épi-convergence et repose essentiellement sur des arguments de dualité (dualité entre M^1 et C_o) ainsi que sur de nouvelles propriétés d'approximation des fonctionnelles convexes de mesure. Ceci est précisé au §2 (Théorème 2.2) où nous faisons également des rappels sur des espaces $BV(\Omega)$ et $BD(\Omega)$ ainsi que sur le concept d'épi-convergence. Au §3, nous démontrons l'épi-convergence dans $L^1(\Omega)$ de la suite F^ϵ vers F^{hom} (Théorèmes 3.1 et 3.2) et donnons au §4 une description complète de l'épi-limite de $F^\epsilon + I_K$ lorsque K est une contrainte au bord de type Dirichlet (Théorème 4.1), mettant ainsi en évidence le phénomène habituel de relaxation de la contrainte via la fonctionnelle "énergie" F^{hom}. Le §5 est consacré à l'homogénéisation de problèmes intervenant en théorie de l'élasto-plasticité avec seuil. Nous confirmons (Théorème 5.1) certains résultats conjecturés par P.Suquet [10] et nous obtenons du même coup (théorème 5.2) que l'hypothèse de charge sûre pour le problème homogénéisé suffit à assurer l'équi-coercivité des fonctionnelles $F^\epsilon(u) - L(u) + I_K(u)$ associées au problème "en déplacement". Quelques perspectives complétant ce travail sont données en conclusion (§6).

§ II. Quelques propriétés des fonctions convexes de mesure et des espaces $BV(\Omega)$ et $BD(\Omega)$. Notion d'épi-convergence

Les définitions et propriétés énoncées dans ce paragraphe seront constamment utilisées dans la suite.

2.1.— Fonctionnelle convexes de mesure

Soit f une fonction convexe de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$ de croissance asymptotiquement linéaire i.e. :

$$\exists \Lambda_o \geq \lambda_o > 0 \quad \exists k_o \geq 0, \quad \lambda_o|z| - k_o \leq f(z) \leq \Lambda_o(1+|z|) \quad \forall z \in \mathbf{R}^N \quad (1)$$

Sous la condition (1), f est continue (même lipschitzienne) et dom $f^* = \{z, f^*(z) < +\infty\}$ est un convexe borné de $\mathbf{R}^N$. Suivant TEMAM [5], nous considérons la fonction d'appui de $K = \mathrm{dom}\, f^*$ définie par :

$$f_\infty(z) = \sup_{z^* \in K} z.z^* = \lim_{\epsilon \to 0_+} \epsilon f\left(\frac{z}{\epsilon}\right).$$

Il est facile de vérifier que f_∞ est convexe, positivement homogène de degré 1 et satisfait encore (1) (avec $k_o = 0$). Soit Ω un ouvert *borné* $\mathbf{R}^N$ et $M^1(\Omega, \mathbf{R}^N)$ l'espace des mesures de Radon bornées sur Ω (à valeurs dans $\mathbf{R}^N$) muni de la norme variation totale (notée $\int_\Omega |\mu|$). Cet espace est en dualité naturelle avec l'espace $C_o(\Omega, \mathbf{R}^N)$ des fonctions continues sur Ω de trace nulle sur $\partial\Omega$.

DÉFINITION 2.1.— *A toute fonction convexe f vérifiant (1), on associe la fonction F notée $\int_\Omega f(\mu)$ définie sur $M^1(\Omega, R^N)$ par :*

$$F(\mu) = \sup_{v \in C_o(\Omega, \mathbf{R}^N)} \left\{ \int_\Omega v\mu - \int_\Omega f^*(v(x))dx \right\}.$$

L'écriture $\int_\Omega f(\mu)$ est justifiée par la représentation intégrale obtenue dans le théorème 2.2. ci-après (ii).

THÉORÈME 2.2.— *(i) $F(\mu) = \int_\Omega f(\mu)$ est la régularisée s.c.i. faible dans M^1 (au sens de la dualité (M^1, C_o)) de la fonctionnelle $\widetilde{F}$ définie par :*

$$\widetilde{F}(\mu) = \begin{cases} \int_\Omega f(h(x))dx & si\ \ \Omega \ll dx\ \ avec\ \ \mu = h(x)dx \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

Elle est convexe et fortement continue dans M^1.

(ii) Si $\mu = hdx + \mu_s$ est la décomposition de Lebesgue de μ, on a :

$$\int_\Omega f(\mu) = \int_\Omega f(h(x))dx + \int_\Omega f_\infty\left(\frac{d\mu_s}{d|\mu_s|}\right)|\mu_s|$$

(iii) Soit $\mu \in M^1(\Omega, \mathbf{R}^N)$ et A_μ l'espace des fonctions de Ω dans $\mathbf{R}^N$ de la forme

$$v(x) = \sum_{i \in I} 1_{\Omega_i}(x) z_i^*$$

où $z_i^* \in \mathbf{R}^N$ et où $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'ouverts disjoints (de fonction caractéristique 1_{Ω_i}) tels que $\Omega_i \subset\subset \Omega$ et mes $(\partial\Omega_i) = \int_{\partial\Omega_i} |\mu| = 0$.†

Alors on a :

$$\int_\Omega f(\mu) = \sup_{v \in A_\mu} \int_\Omega v\mu - \int_\Omega f^*(v(x))dx.$$

Remarque 2.3.— a) Les fonctions de A_μ étant boréliennes, les intégrales

$$\int_\Omega v\mu \text{ et } \int_\Omega f^*(v(x))dx$$

ont un sens (la dernière est en fait une intégrale supérieure). Il sera en pratique beaucoup plus facile d'approcher le "Sup" de la définition 2.1 par des fonctions de A_μ que par des fonctions de C_o (voir section 3).

b) $d\mu_s / d|\mu_s|$ est la dérivée de RADON-NIKODYM de μ_s par rapport à sa variation totale $|\mu_s|$. L'expression

$$\int_\Omega f_\infty\left(\frac{d\mu_s}{|\mu_s|}\right)|\mu_s|$$

peut encore s'écrire sous la forme $\int_\Omega f_\infty(\mu_s)$ où $f_\infty(\mu_s)$ est la mesure construite, suivant la méthode de GOFFMAN-SERRIN [11], à partir de μ_s et de la fonction sous linéaire f_∞.

c) Si l'on remplace la condition (1) par une hypothèse de forte coercivité i.e.

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z)}{|z|} = +\infty$$

on peut encore définir $\int_\Omega f(\mu)$ qui se décompose suivant la règle (ii), mais dans ce cas on a dom $f^* = \mathbf{R}^N$ et f_∞ étant la fonction indicatrice de 0, on a l'égalité $F = \widetilde{F}$. Cette limitation du domaine de F aux mesures $\mu \ll dx$ tient au fait que les sections de la fonctionnelle intégrale $h \in L^1 \to \int_\Omega f(h(x))dx$

† $\Omega_i \subset\subset \Omega$ équivaut à $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$; mes $(\partial\Omega_i)$ désigne la mesure de Lebesgue de $\partial\Omega_i$.

sont équi-intégrables d'après le critère de L.V.POUSSIN et donc faiblement relativement compactes dans L^1.

Démonstration du théorème 2.2. — (i) est immédiat et pour (ii), on pourra se reporter à [3] ou à [5]. La démonstration de (iii) est délicate. On considère l'espace $L^\infty_m(\Omega)$ des fonctions de Ω dans $\mathbf{R}^N$ essentiellement bornées pour la mesure de "base" $m = |\mu_s| + dx$ ($\mu \ll m$ et $dx \ll m$). $L^\infty_m(\Omega)$ contient A_μ et $C_o(\Omega)$ et il s'injecte continuement dans l'espace L^∞ usuel (associé à la mesure de Lebesgue). Soit G la fonctionnelle sur L^∞_m définie par :

$$G(v) = \int_\Omega f^*(v(x))dx - \int_\Omega v\mu.$$

Il s'agit de démontrer l'égalité $\inf_{C_o} G = \inf_{A_\mu}$.

a) Pour établir $\inf_{C_o} G \geq \inf_{A_\mu} G$, il suffit de savoir approcher au sens de la norme de L^∞_m toute fonction de C_o par des fonctions de A_μ. En effet, la condition de croissance (1) entraîne que G est s.c.i. et continue en 0 pour la *topologie forte* de L^∞_m et on a classiquement l'égalité $\inf_{\overline{A_\mu}} G = \inf_{\overline{A_\mu}} G$ † avec A_μ qui contient C_o.

Soit donc $\varphi \in C_o$ et $\epsilon > 0$. Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\sup_{\Omega \setminus K} |\varphi| < \epsilon$. A tout $x \in K$, on peut associer une boule $B(x; r_x) \subset\subset \Omega$ de frontière m-négligeable telle que :

$$\forall y \in B(x, r_x),\ |\varphi(y) - \varphi(x)| < \epsilon.$$

---

† D'après [12], les sommes $G + I_{A_\mu}$ et $G + I_{\overline{A_\mu}}$ ont pour polaire commune dans la dualité $[L^\infty_m, (L^\infty_m)']$ l'inf-convolution des polaires $G^* \nabla\ I_{A_\mu^\perp}$ (noter que $A_\mu^\perp = \overline{A_\mu}^\perp$). On a donc :

$$\inf(G + I_{A_\mu}) = -(G + I_{A_\mu})^*_{(0)} = -(G + I_{\overline{A_\mu}})^*_{(0)} = \inf(G + I_{\overline{A_\mu}})$$

Plus directement, on peut également raisonner ainsi : soit $v \in \overline{A_\mu} \cap \operatorname{dom} G$ et v_n une suite de A_μ fortement convergente vers v; le segment $[0, v[$ étant contenu dans l'intérieur du convexe dom G (car $0 \in \overset{\circ}{\widehat{\operatorname{dom}}}\, G$ d'après (1)), on a par continuité :

$$\forall t \in [0,1[, \lim G(tv_n) = G(tv)$$

d'où, comme $tv_n \in A_\mu$:

$$\inf_{A_\mu} G \leq \inf_{t \in [0,1[} G(tv) \leq G(v) \quad \forall v \in \overline{A_\mu} \cap \operatorname{dom} G.$$

En effet, la mesure m étant bornée, l'ensemble $\{r > 0 \ : \ m(\partial B(x,r)) > 0\}$ est ***au plus dénombrable***. On recouvre alors K par une famille finie de boules $B(x_i, r_{x_i})$ et la fonction v définie par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \Omega \backslash (\cup_i \ B(x_i, r_{x_i})) \\ \min\{\varphi(x_i) \ : i \text{ tel que } x \in B(x_i, r_{x_i})\} \end{cases}$$

vérifie $\| \ v - \varphi \ \|_{L^\infty_m} < \epsilon$. D'autre part les ouverts disjoints Ω_i associés à v ont leur frontière contenue dans $\cup_i \partial B(x_i, r_{x_i})$ qui est m-négligeable, d'où $v \in A_\mu$.

b) $\inf_{C_o} \ G \leq \inf_A \ G$.

Soit $v = \sum_{i \in I} z_i^* 1_{\Omega_i}$ une fonction de A_μ.

Pour tout $\delta > 0$, on considère

$$\varphi^\delta = \sum_{i \in I} z_i^* \varphi_i^\delta$$

où φ_i^δ est choisi dans $\mathcal{D}(\Omega_i)$ tel que $0 \leq \varphi_i^\delta \leq 1$ et $\varphi_i^\delta|_{\Omega_i^\delta} = 1$ où $\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega_i, d(x, \Omega_i^c) > \delta\}$.

La convexité de F^* entraîne :

$$\begin{aligned} \int_{\cup_i \Omega_i} f^*(\varphi^\delta) dx &\leq \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} [\varphi_i^\delta(x) f^*(z_i^*) + (1 - \varphi_i^\delta) f^*(0)] dx. \\ &\leq \sum_{i \in I} \int_{\Omega_i} f^*(z_i^*) dx + (f(0) + f^*(0)) \int_{\Omega_i} (1 - \varphi_i^\delta) dx. \end{aligned}$$

(on multiplie l'inégalité $\varphi_i^\delta \leq 1$ par $f^*(z_i^*) + f(0) \geq 0$). D'où l'on déduit

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \int_\Omega f^*(\varphi^\delta) \leq \int_\Omega f^*(v) dx.$$

Par convergence dominée dans $L^1_{|\mu|}$ (ou L^1_m), on obtient

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\Omega \varphi^\delta \mu = \int_\Omega v \mu$$

(rappelons que μ *ne charge pas* $\partial \Omega_i$) ce qui entraîne

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \, G(\varphi^\delta) \leq G(v)$$

et donc

$$\inf_{C_o} G \le G(v), \quad \forall v \in A_\mu.$$

Remarque. — Il est possible en fait de démontrer l'égalité suivante :

$$\inf_{C_o} G = \inf_{A_\mu} G = \inf_{L^\infty_m} G$$

Enfin nous aurons besoin (voir section 4) du lemme de majoration suivant :

LEMME 2.3.— *Si $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ est convexe et vérifie (1), on a l'inégalité :*

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in M^1(\Omega) \int_\Omega f(\mu_1 + \mu_2) \le \int_\Omega f(\mu_1) + \int_\Omega f_\infty(\mu_2).$$

On part de la majoration :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{z.z^* - f^*(z^*)\} \\ &\le \sup_{z^* \in \, dom\, f^*} \{z.z^* - \inf f^*\} \\ &\le f_\infty(z) + f(0). \end{aligned}$$

La convexité de f entraîne alors que pour tout $t, 0 < t < 1$:

$$\begin{aligned} \int f[t(\mu_1 + \mu_2)] &\le t\int f(\mu_1) + (1-t)\int f\left(\frac{t\mu_2}{1-t}\right) \\ &\le t\int f(\mu_1) + (1-t)\int f^\infty\left(\frac{t\mu_2}{1-t}\right) \\ &\qquad + (1-t)\int f(0)dx \\ &\le t\left[\int f(\mu_1) + \int f_\infty(\mu_2)\right] + (1-t)f(0) \text{ mes } \Omega \end{aligned}$$

On conclut en passant à la limite quand $t \to 1^-$.

2.2.— Espaces $BV(\Omega)$ et $BD(\Omega)$. Un résultat d'approximation

Dans la suite, Ω désigne un ouvert *borné* de $\mathbf{R}^N$ dont la *frontière γ est de classe C^1*.

a) *Espace $BV(\Omega)$* : C'est l'espace des fonctions de $L^1(\Omega)$ dont le gradient au sens des distributions est une mesure bornée i.e. :

$$\int_\Omega |Du| = \sup_{\varphi \in C_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi, \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \leq 1 \right\} < +\infty$$

Muni de la norme $\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |u|dx + \int_\Omega |Du|, BV(\Omega)$ est un Banach séparable *non réflexif* dont $W^{1,1}(\Omega)$ est un sous-espace fermé strict. En particulier, si E est un borélien de Ω dont la frontière est assez régulière, sa fonction caractéristique 1_E est dans $BV(\Omega)\backslash W^{1,1}(\Omega)$ et l'on a : $\int_\Omega |D1_E| = H^{N-1}(\partial E \cap \Omega)$ où H^{N-1} est la mesure de Hausdorff de dimension $N-1$.

Enonçons les principales propriétés de $BV(\Omega)$ [13], [14], [25].

THÉORÈME 2.3.— *Théorème d'immersion. On a l'injection continue $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq N/(N-1)$. Cette injection est compacte si de plus $1 \leq p < N/(N-1)$.*

COROLLAIRE 2.5.— *De toute suite bornée dans $BV(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite u_{n_p} faiblement convergente vers u au sens suivant :*

$$\begin{cases} u_{n_p} \to u \quad dans L^1(\Omega)\ fort \\ Du_{n_p} \to Du \ vaguement\ dans\ M^1(\Omega)\big(i.e.\ \sigma(M^1, C^o)\big) \end{cases}$$

THÉORÈME 2.6.— *Théorème de trace. Il existe un opérateur linéaire continu surjectif γ_o de $BV(\Omega)$ dans $L^1(\gamma)$ tel que : $\gamma_o u = u|_\gamma$ pour tout $u \in BV(\Omega) \cap C(\Omega)$.*

On a de plus la formule de Green :

$$\forall \varphi \in [C^1(\overline{\Omega})]^N, \forall u \in BV(\Omega) \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi dx + \int_\Omega \varphi.Du = \int_\Gamma \gamma_o u.\varphi\nu dH^{N-1}$$

où ν est la normale extérieure à Γ.

Remarque 2.7.— Si $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ est un ouvert de classe C^1, on note u_- (resp. u_+) la trace de $u|_{\Omega_1}$ (resp. $u|_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_1}$) sur $\partial\Omega_1$. La formule de Green ci-dessus entraîne que la trace sur $\partial\Omega_1$ de la mesure Du est absolument continue par rapport à la mesure "superficielle" $H^{N-1}(\partial\Omega_1 \cap .)$ avec une densité égale à $(u_+ - u_-)\nu_1$ (ν_1 normale extérieure à $\partial\Omega_1$). En particulier, on aura :

$$\int_{\partial\Omega_1} |Du| = \int_{\partial\Omega_1} |u_+ - u_-| dH^{N-1}.$$

Remarque 2.8.— Si u_n converge faiblement dans $BV(\Omega)$, on a bien sûr l'inégalité $\underline{\lim}_n \int_\Omega |Du_n| \geq \int_\Omega |Du|$ qui traduit la semi-continuité de la norme dans $BV(\Omega)$. Si de plus $\overline{\lim}_n \int_\Omega |Du_n| \leq \int_\Omega |Du|$, on obtient les convergences suivantes :

$$\begin{cases} \int_\Omega \varphi Du_n \to \int_\Omega \varphi Du & \forall \varphi \in C(\overline{\Omega}) \\ \int_A Du_n \to \int_A Du & \forall A \text{ borélien avec } \int_{\partial A} |Du| = 0 \\ \gamma_o u_n \to \gamma_o u & \text{dans } L_1(\Gamma) \text{ fort.} \end{cases}$$

b) *Espaces $LD(\Omega)$ et $BD(\Omega)$*. Nous renvoyons à [1] [2] pour plus de détails sur ce sujet. $BD(\Omega)$ (resp. $LD(\Omega)$) est l'espace des fonctions $u \in [L_1(\Omega)]_N$ telles que pour tout $i,j = 1,2,...,N$ $\quad e_{ij}(u) = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ est une mesure bornée (resp. une fonction sommable). Le tenseur de "déformations" de composantes $e_{ij}(u)$ sera noté $e(u)$ et $\sum_{i,j} \int_\Omega |e_{i,j}(u)|$ sera noté $\int_\Omega |e(u)|$.

Muni de la norme $\|u\|_{BD(\Omega)} = \int_\Omega |u|dx + \int_\Omega |e(u)|$, $BD(\Omega)$ est un Banach séparable dont $LD(\Omega)$ est un sous-espace fermé *strict*. Il est important de signaler que *l'inégalité de Korn est fausse dans* L^1 et donc $LD(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$) contient *strictement* $[W^{1,1}(\Omega)]^N$) (resp. $[BV(\Omega)]^N$).

Comme pour $BV(\Omega)$, on a l'injection continue de $BD(\Omega)$ dans L^p pour $1 \leq p \leq N/N-1$ et compacte si de plus $p < N/N-1$ (Théorème 2.4). On en déduit la séquentielle compacité des parties bornées de $BD(\Omega)$ pour la topologie associée à la convergence faible :

$$u_n \xrightarrow{[L^1(\Omega)]^N} u \quad et\ \forall i,j \quad e_{i,j}(u_n) \xrightarrow{M^1\, faible} e_{i,j}(u)$$

Avant d'énoncer le théorème de trace dans $BD(\Omega)$, définissons, en tout point $x \in \Gamma$ où la normale extérieure ν existe, l'application linéaire notée $\mathcal{F}^\nu$ de $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans $\mathbf{R}_S^{N^2}$ (tenseurs symétriques d'ordre 2) donnée par :

$$[\mathcal{F}^\nu(p)]_{i,j} = \frac{1}{2}(p_i.\nu_j + p_j.\nu_i).$$

Alors [2] :

THÉORÈME 2.9.— *Il existe un opérateur linéaire continu surjectif γ_o de $BD(\Omega)$ dans $[L^1(\Gamma)]^N$ tel que $\gamma_o u = u|_\Gamma$ pour $u \in BD(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. De plus, on a la formule de Green généralisée :* $\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}), \forall i,j$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_\Omega \varphi e_{ij} = \int_\Gamma \mathcal{F}_{ij}^\nu(\gamma_o u)\varphi \; dH^{N-1}$$

d'où en particulier, si $\sigma \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}_S^{N^2})$, *la formule :*

$$\int_\Omega \sigma.e(u) + \int_\Omega u.\mathrm{div}\ \sigma dx = \int_\Gamma \gamma_o u.\sigma\nu dH^{N-1}$$

Remarque 2.10.— (i) On peut définir les traces u_+ et u_- sur la frontière d'un ouvert $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ de la même manière que dans $BD(\Omega)$ (Remarque 2.7). La trace de $e(u)$ sur $\partial\Omega_1$ est alors égale à $\mathcal{F}^{\nu_1}(u_+ - u_-)H^{N-1}(\partial\Omega_1 \cap .)$ où ν_1 est la normale extérieure à Ω_1.

(ii) Si u_n converge faiblement vers u dans $BD(\Omega)$ et si de plus on a :

$$\overline{\lim_n} \int_\Omega |e(u_n)| \leq \int_\Omega |e(u)|$$

alors $\gamma_o u_n$ converge fortement vers $\gamma_o u$ dans $[L^1(\Gamma)]^N$.

(iii) Dans l'espace de Dirichlet $BD_o(\Omega) = \{u \in BD(\Omega),\ \gamma_o u = 0\}$. (resp. dans l'espace quotient $BD(\Omega)\backslash\mathbf{R}^N$) l'expression $\int_\Omega |e(u)|$ induit une norme équivalente à celle induite par $BD(\Omega)$.

c) *Approximation de fonctionnelles convexes sur* $BV(\Omega)$ *et* $BD(\Omega)$.

THÉORÈME 2.11. [5].— *Soit f une fonction convexe de $\mathbf{R}^N$ (resp. $\mathbf{R}^{N^2}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant (1) et F la fonctionnelle sur $L^1(\Omega)$ définie par :*

$$F(u) = \begin{cases} \int_\Omega f(Du) & si\ u \in BV(\Omega)\ \big(resp. \int_\Omega f(e(u))\ si\ u \in BD(\Omega)\big) \\ +\infty & si\ u \in L^1\backslash BV\ \ (resp.\ u \in L^1\backslash BD) \end{cases}$$

Alors :

(i) F est la régularisée s.c.i. dans $L^1(\Omega)$ fort de :

$$\widetilde{F}(u) = \begin{cases} F(u) & \text{si } u \in C^\infty(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est convexe continue dans $BV(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$) et la fonctionnelle associée sur $BV/_{\mathbf{R}}$ (resp. $BD(\Omega)/_{\mathbf{R}^N}$) est faiblement inf-compacte.

(ii) Pour tout $u \in BV(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$), on peut trouver une suite $u_n \in C^\infty$ telle que $\gamma_o u_n = \gamma_o u\ \forall n$ et :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u, \int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du| \big(\text{resp. } \int_\Omega |e(u_n)| \to \int_\Omega |e(u)|\big) \\ F(u_n) \to F(u). \end{cases}$$

2.3.— Concept d'épi-convergence

Nous renvoyons à H. Attouch [8] pour plus de détails.

DÉFINITION 2.12.— *Soit (X,τ) un espace topologique que nous supposons métrisable et F^ϵ une suite de fonctionnelle de X dans $\overline{\mathbf{R}}$. L'épi-limite inférieure F^i (resp. supérieure F^s) de F^ϵ pour la topologie τ, notée encore $\tau - \lim_e F^\epsilon$ (resp. $\tau - \underline{\lim}_e F^\epsilon$), est la fonctionnelle sur X définie par :*

$$F^i(u) = \tau - \underline{\lim}_{e} F^\epsilon(u) = \min\left\{ \underline{\lim}_{\epsilon} F^\epsilon(u_\epsilon) : u_\epsilon \xrightarrow{\tau} u \right\}.$$

$$F^s(u) = \tau - \overline{\lim}_{e} F^\epsilon(u) = \min\left\{ \overline{\lim}_{\epsilon} F^\epsilon(u_\epsilon) : u_\epsilon \xrightarrow{\tau} u \right\}.$$

On vérifie facilement que F^i et F^s sont nécessairement *τ-semi-continues inférieurement* et que si F^ϵ est convexe, il en sera de même de F^s.

Lorsque $\tau - \underline{\lim}_e F^\epsilon = \tau - \overline{\lim}_e F^\epsilon = F$, on dit que F^ϵ*τ-épi-convergence vers F* ce que l'on notera $F = \tau - \lim_e F^\epsilon$. Le résultat important qui justifie l'intérêt pratique de cette notion est le suivant :

THÉORÈME 2.13.— *On suppose que $F = \tau - \lim_e F^\epsilon$ et qu'il existe une partie K_o de X relativement compacte pour τ telle que, pour tout $\epsilon > 0$, $\inf_{K_o} F^\epsilon = \inf_X F^\epsilon$. Alors : $\inf_X F^\epsilon \to \inf_X F$ et si u_ϵ est telle que : $F^\epsilon(u_\epsilon) - \inf_X F^\epsilon \to 0$, toute τ-valeur d'adhérence de u_ϵ minimise F.*

Remarque 2.14.— (a) Dans les conditions du théorème, on a également $\tau - \lim_e(F^\epsilon + G) = F + G$ pour toute "perturbation" τ-continue G.

(b) Lorsque F^ϵ est constante et égale à F_o, la τ-épi-limite de F^ϵ existe et n'est autre que la τ-régularisée s.c.i. de F_o.

(c) Lorque X est un Banach dont les boules sont τ-relativement compactes, une condition suffisante d'existence du compact K_o est que la suite F^ϵ vérifie la condition *d'équi-coercivité* suivante :

$$\overline{\lim_{\epsilon}} F^\epsilon(u_\epsilon) < +\infty \Rightarrow \overline{\lim_{\epsilon}} \|u_\epsilon\| < +\infty. \tag{2}$$

§ III. Epi-convergence dans L^1 de fonctionnelles à croissance linéaire

Les théorèmes 3.1 et 3.2 ci-après étendent au cas des croissances linéaires les résultats déjà connus dans le cas quadratique [8] [9].

3.1.— Enoncé des résultats

THÉORÈME 3.1.— *Soit $j : (y,z) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{N^2} \to j(y,z) \in \mathbf{R}$ avec j mesurable et Y-périodique en y ($Y =]0,1[^N$) convexe en z et telle que*

$$\exists k_o,\ \lambda_o, \Lambda_o \in \mathbf{R}_+^* : \lambda_o|z| - k_o \leq j(y,z) \leq \Lambda_o(1+|z|) \quad \forall (y,z) \qquad (1)$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ de classe C^1 et pour tout $\epsilon > 0$ la fonctionnelle sur $L^1(\Omega)$ définie par :

$$F^\epsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(\frac{x}{\epsilon},\ Du(x)) & si\ u \in C^\infty(\Omega)\ \big(resp. W^{1,1}(\Omega)\big) \\ +\infty & si\ u \in L^1 \backslash C^\infty\ \big(resp. L^1 \backslash W^{1,1}\big)\big). \end{cases}$$

Alors $L^1(\Omega) - \lim_\epsilon F^\epsilon = F^{hom}$ avec

$$F^{hom}(u) = \begin{cases} \int_\Omega j^{hom}(Du) & si\ u \in BV(\Omega) \\ +\infty & si\ u \in L^1(\Omega)/BV(\Omega) \end{cases} \dagger$$

où

$$j^{hom}(z) = \inf_{w \in W^{1,1}_{per}(Y)} \int_Y j(y, Dw(y) + z)dy$$

$W^{1,1}_{per}(Y)$ étant l'ensemble des fonctions de $W^{1,1}(Y)$ qui ont même trace sur les faces opposées de $\partial\Omega$ (donc prolongeables dans $W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ par Y-périodicité).

La version vectorielle de ce théorème s'énonce comme suit :

THÉORÈME 3.2.— *Soit $j : (y,z) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^{N^2} \to j(y,z) \in \mathbf{R}$ mesurable et Y-périodique en y, convexe en z et vérifiant (1). Soit pour tout $\epsilon > 0$, la fonctionnelle sur $[L^1(\Omega)]^N$ définie par :*

$$F^\epsilon(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(\frac{x}{\epsilon}, e(u))dx & si\ u \in [C^\infty(\Omega)]^N\ \big(resp. LD(\Omega)\big) \\ +\infty & si\ u \in L^1 \backslash C^\infty\ \big(resp. L^1 \backslash LD\big). \end{cases}$$

Alors $L^1(\Omega)^N - \lim_\epsilon F^\epsilon = F^{hom}$ avec :

$$F^{hom}(u) = \begin{cases} \int_\Omega j^{hom}(e(u)) & si\ u \in BD(\Omega) \\ +\infty & si\ u \in [L^1(\Omega)]^N \backslash BD(\Omega). \end{cases}$$

† $\int_\Omega j^{hom}(Du)$, lorsque Du est une mesure bornée, a été défini dans la section 2.

où

$$j^{hom}(z) = \inf_{w \in LD_{per}(Y)} \int_Y j(y, e(w) + z) dy \ \forall z \in \mathbf{R}_S^{N^2}$$

(S pour symétrique)

et où $LD^{per}(Y)$ est l'ensemble des fonctions de $LD(Y)$ qui ont même trace (au sens du théorème 2.9) sur les faces opposées de ∂Y (et donc prolongeables dans $LD_{loc}(\mathbf{R}^N)$ par Y-périodicité).

Remarque 3.3.— a) Compte tenu de la condition de croissance (1) et de l'injection compacte $BV(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ (resp. $BD \hookrightarrow L^1$), il est facile de montrer que F^{hom} est aussi l'épi- limite séquentielle faible de F^ϵ dans $BV(\Omega)$ (resp. $BD(\Omega)$).

b) On peut restreindre l'"inf" de définition de j^{hom} aux fonctions Y-périodiques de $C^\infty(Y)$ qui sont denses dans l'espace $W^{1,1}_{per}(Y)$ (resp. $LD_{per}(Y)$). En effet la fonctionnelle dont on considère l'infimum est d'après (1) continue pour la norme de cet espace. Une difficulté essentielle pour la résolution du problème variationnel "local" est que l'"inf" ne sera atteint a priori que sur $BV(Y)$ (resp. $BD(Y)$) et seulement pour la fonctionnelle "relaxée" dont on ne connaît pas la forme explicite générale lorsque $j(y,z)$ n'est pas continue en y.

c) $j^{hom}(z)$ est indépendant de y, convexe en z et vérifie encore (1). Ceci permet de définir $\int_\Omega j^{hom}(Du)$ (resp. $\int_\Omega j^{hom}(e(u))$) au sens de 2.1.

Remarque 3.4.— On pourra toujours se ramener au cas où $j(y,z) \geq 0$ en considérant $j_1(y,z) = j(y,z) + j^*(y,0)$. Un calcul élémentaire montre en effet que j_1 vérifie (1) également et que si $\int_\Omega j_1(\frac{x}{\epsilon}, Du)dx$ épi-convergence vers $\int_\Omega j_1^{hom}(Du)$ on aura de façon équivalente :

$$\begin{aligned}\lim_e F^\epsilon(u) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega j_1\left(\frac{x}{\epsilon}, Du\right)dx - \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega j^*\left(\frac{x}{\epsilon}, 0\right)dx \\ &= \int_\Omega [j_1^{hom}(Du) - \int_Y j^*(y,0)dy]dx\end{aligned}$$

qui n'est autre que $F^{hom}(u)$.

3.2.— Démonstration

Nous ne la ferons que dans le cas scalaire (théorème 3.1), le cas vectoriel s'en déduisant aisément. D'autre part, la remarque 3.4 nous *permet de faire l'hypothèse simplificatrice* : $j(y,z) \geq 0$.

a) *Démontrons d'abord l'inégalité :* $F^i = L^1(\Omega) - \underline{\lim}_\epsilon F^\epsilon \geq F^{hom}$. Nous procédons par dualité et en utilisant les deux lemmes suivants :

LEMME 3.5.— *La conjuguée de Fenchel de $j^{hom}(z)$ est la fonction sur $\mathbf{R}^N$ définie par :*

$$(j^{hom})^*(z^*) = \inf_{q \in E_{per}(Y)} \int_\Omega j^*(y, q(y) + z^*)dy$$

avec

$$E_{per}(Y) = \{q \in L^\infty(Y, \mathbf{R}^N), div\ q = 0 \int_Y q(y)dy = 0$$

$$et\ q.n. \quad Y\text{-}anti\text{-}périodique\} \dagger$$

où n est la normale extérieure à ∂Y.

La démonstration est rigoureusement identique à celle du cas quadratique [9] [15]. *Le domaine de $(j^{hom})^*$ est d'après* (1) *un convexe borné de $\mathbf{R}^N$ que nous noterons P^{hom}.*

LEMME 3.6.— *Soit $q \in E_{per}(Y)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u_\epsilon \in W^{1,1}(\Omega)$ une suite fortement convergente dans $L^1(\Omega)$. Alors :*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega Du_\epsilon(x) q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\varphi(x)dx = 0.$$

La formule de Green généralisée dans $W^{1,1}(\Omega)$ [16,17] donne :

$$R_\epsilon = \int_\Omega Du_\epsilon(x) q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\varphi(x)dx = -\int_\Omega u_\epsilon(x) div[\varphi(x) q\left(\frac{x}{\epsilon}\right)]dx$$

Comme div $q(\frac{\cdot}{\epsilon}) = 0$ ($q \in E_{per}(Y)$), on obtient :

$$R_\epsilon = -\int_\Omega u_\epsilon(x) q\left(\frac{x}{\epsilon}\right).D\varphi(x)dx.$$

Mais la suite $q(\frac{\cdot}{\epsilon})$ bornée dans L^∞ converge $\sigma(L^\infty, L^1)$ vers sa valeur moyenne $\int_Y q(y)dy = 0$ tandis que $u_\epsilon D\varphi$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$. Il en résulte que R_ϵ tend vers 0.

---

† La trace de q.n sur ∂Y (clairement définie quand $q \in L^\infty$ et div $q \in L^\infty$ [16,17]) prend des valeurs opposées sur les faces opposées de ∂Y. Ainsi q est prolongeable à $\mathbf{R}^N$ par Y-périodicité en une fonction à divergence nulle.

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration proprement dite de a). Soit u_ϵ une suite dans $W^{1,1}(\Omega)$ telle que :

$$u_\epsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \quad et \quad \varliminf_{\epsilon\to 0} F^\epsilon(u_\epsilon) \geq \int_\Omega v.Du - \int_\Omega (j^{hom})^*(v(x)\, dx$$

Soit donc $v \in A_\mu$ qui, par définition, s'écrit sous la forme $v(x) = \sum z_i^* 1_{\Omega_i}(x)$ où $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ouverts disjoints tels que : $\Omega_i \subset\subset \Omega$ et $\mathrm{mes}(\partial\Omega_i) = |\mu|(\partial\Omega_i) = 0$.

Pour tout $\delta > 0$, on pose $\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega_i, d(x, \Omega_i^c) > \delta\}$ et on appelle φ_i^δ une fonction de $\mathrm{D}(\Omega_i)$ égale à 1 sur Ω_i^δ avec $0 \leq \varphi_i^\delta \leq 1$. Il résulte du lemme 3.6 que pour *toute famille* $(q_i)_{i\in I}$ de fonctions dans $E_{per}(Y)$, on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega Du_\epsilon(x). \left[\sum_{i\in I} \varphi_i^\delta(x) q_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right] dx = 0.$$

On peut donc écrire (noter que $j \geq 0$) :

$$\begin{aligned}
\varliminf_\epsilon F^\epsilon(u_\epsilon) &\geq \varliminf_\epsilon \int_\Omega j\left(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon\right) dx - \int_\Omega \left(\sum_{i\in I} \varphi_i^\delta(x) q_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) .Du_\epsilon(x) dx \\
&\geq \sum_{i\in I} \varliminf_\epsilon \int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta(x) \left[j\left(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon\right) - q_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right).Du_\epsilon(x)\right] dx \\
&\geq \sum_{i\in I} \varliminf_\epsilon \int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta(x) j_{q_i}\left(\frac{x}{\epsilon}, Du_\epsilon(x)\right) dx
\end{aligned}$$

où l'on a posé : $j_{q_i}(y,z) = j(y,z) - q_i(y).z$.

Appliquons à $j_{q_i}(\frac{x}{\epsilon}, .)$ l'inégalité de Fenchel avec le couple $(Du_\epsilon(x), z_i^*)$. On obtient :

$$\varliminf_\epsilon F^\epsilon(u_\epsilon) \geq \sum_{i\in I} \varliminf_\epsilon \int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta(x) \left[z_i^*.Du_\epsilon(x) - j_{q_i}^*\left(\frac{x}{\epsilon}, z_i^*\right)\right] dx.$$

Mais la convergence faible de Du_ϵ vers Du dans $M^1(\Omega)$ entraîne :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \varphi_i^\delta(x) z_i^*.Du_\epsilon(x) dx = \int_\Omega \varphi_i^\delta z_i^*.Du.$$

D'autre part, lorsque $\int_Y j_{q_i}^*(y, z_i^*) dy < +\infty$ (noter qu'alors $j_{q_i}^*(., z_i^*)$ est dans $L^1(Y)$ car minorée, d'après (1), par $-\Lambda_o$), la suite de fonctions périodiques

$j^*_{q_i}(\frac{\cdot}{\epsilon}, z_i^*)$ est *bornée dans* $L^1(\Omega)$ et donc converge vaguement en mesure vers sa valeur moyenne $\int_Y j^*_{q_i}(y, z_i^*)dy = \int_Y j^*(y, z_i^* + q_i(y))dy$.

On en déduit l'inégalité :

$$\underline{\lim}_{\epsilon} F^\epsilon(u_\epsilon) \geq \sum_{i\in I} \left[\int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta(x) z_i^*.Du - \int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta dx \int_Y j^*(y, q_i(y) + z_i^*)dy \right]$$

(lorsque $\int_Y j^*_{q_i}(y, z_i^*)dy = +\infty$, le second membre de l'inégalité ci-dessus vaut $-\infty$ car $\int_\Omega \varphi_i^\delta dx > 0$).

Passant à la borne supérieure dans le second membre de cette inégalité lorsque q_i parcourt $E_{per}(Y)$ et compte tenu du lemme 3.5, on obtient alors (rappelant que $\varphi_i^\delta \geq 0$ et que $v = \sum z_i^* 1_{\Omega_i}$) :

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{\epsilon\to 0} F^\epsilon(u_\epsilon) &\geq \sum_{i\in I} \int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta(x) z_i^* Du - \int_{\Omega_i} \varphi_i^\delta(x) dx (j^{hom})^*(z_i^*) \\
&\geq \int_\Omega v(x)(\Sigma\varphi_i^\delta(x))Du - \int_\Omega (j^{hom})^*(v(x))[\Sigma\varphi_i^\delta(x)]dx \\
&\geq \int_\Omega v(x)(\Sigma\varphi_i^\delta(x))Du - \int_\Omega (j^{hom})^*(v(x))dx + j^{hom}(0) \\
&\qquad \int_\Omega (1 - \Sigma\varphi_i^\delta)dx
\end{aligned}$$

(Compte tenu de l'inégalité $0 \leq \Sigma\varphi_i^\delta \leq 1$ que l'on peut multiplier par la quantité positive : $(j^{hom})^*(v(x)) + j^{hom}(0)$).

On conclut ensuite en passant à la limite quand $\delta \to 0$: la suite $\Sigma\varphi_i^\delta$ converge vers 1 presque partout et aussi $|Du|$ presque partout (puisque $\mathrm{mes}(\partial\Omega_i) = |Du|(\partial\Omega_i) = 0$). Il suffit alors d'appliquer à l'intégrale

$$\int_\Omega v(x)(\Sigma_i\varphi_i^\delta(x))Du$$

le théorème de convergence dominée dans $L^1_{|Du|}(\Omega)$.

Remarque. — Ce type de démonstration adaptable au cas d'autres croissances se différentie de la démarche suivie dans le cas quadratique par le fait que l'on n'a jamais recours à une solution du problème variationnel définissant j^{hom}.

b) *Démontrons maintenant l'inégalité* $F^s = L^1(\Omega) - \overline{\lim}_\epsilon F^\epsilon \leq F^{hom}$

On procède ici de manière classique en deux étapes :

1ère étape : On suppose u affine par morceaux, c'est-à-dire de la forme :

$$u(x) = < z_i, x > + \alpha_i \quad \forall x \in \Omega_i$$

où $\Omega_i)_{i\in I}$ est une partition finie de Ω formée de polyhèdres.

Soit pour $i \in I$, $\varphi_i^\delta \in \mathcal{D}(\varphi_i)$ $0 \leq \varphi_i \leq 1$ et $\varphi_{i}|_{\Omega_i^\delta} = 1$ avec $\Omega_i^\delta = \{x \in \Omega_i,\ d(x, \Omega_i^c) > \delta\}$, $\delta > 0$. A toute famille $(w_i)_{i\in I}$ de fonctions de $W^{1,1}_{per}(Y)$, on associe :

$$u_\epsilon^\delta(x) = u(x) + \epsilon \sum_{i\in I} \varphi_i^\delta(x)\ w_i(\frac{x}{\epsilon})$$

Il est clair que :

$$u_\epsilon^\delta \xrightarrow{L^1(\Omega)} u$$

(car $\int_{\Omega_i} \left|w_i(\frac{x}{\epsilon})\right| dx \leq n_o \int_Y |w_i(y)|dy$ pour n_o assez grand).

Soit $t < 1$. D'après la convexité de $j(y,.)$, notant que : $t\varphi_i^\delta + t(1-\varphi_i^\delta) + (1-t) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
F^\epsilon(tu_\epsilon^\delta) &= \sum_i \int_{\Omega_i} j\Big[\frac{x}{\epsilon}, t\varphi_i^\delta\Big(z_i + Dw_i\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big)\Big) + t(1-\varphi_i^\delta)z_i \\
&\qquad + (1-t)\frac{\epsilon t}{1-t} D\varphi_i^\delta w_i\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big)\Big] dx \\
&\leq \sum_i \int_{\Omega_i} j\Big(\frac{x}{\epsilon}, z_i + Dw_i\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big)\Big) dx + \Lambda_o(1+|z_i|) \int_{\Omega_i} (1-\varphi_i^\delta) dx \\
&\qquad + \Lambda_o(1-t) \int_{\Omega_i} \Big[1 + \frac{\epsilon t}{1-t} |D\varphi_i^\delta| \Big|w_i\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big)\Big|\Big] dx.
\end{aligned}$$

d'après (1) et puisque $j \geq 0$).

On en déduit, puisque $j(\frac{\cdot}{\epsilon}, z_i + Dw_i(\frac{\cdot}{\epsilon}))$ est ϵY-périodique :

$$\overline{\lim_{\substack{\delta\to 0\\ t\to 1^-}}}\ \overline{\lim_{\epsilon\to 0}} F^\epsilon(tu_\epsilon^\delta) \leq \sum_{i\in I} \text{mes}\ \Omega_i \left[\int_Y j(y, z_i + Dw_i(y)) dy\right]$$

Par un procédé de diagonalisation [8], on peut ensuite construire une suite $v_\epsilon = t(\epsilon) u_\epsilon^{\delta(\epsilon)}$ avec $t(\epsilon) \to 1^-$, $\delta(\epsilon) \to 0$ (donc $v_\epsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} u$) telle que

$$\overline{\lim_{\epsilon}} F^\epsilon(v_\epsilon) \leq \sum_{i\in I} \text{mes}\ \Omega_i \left[\int_Y j(y, z_i + Dw_i(y)) dy\right]$$

Passant à la borne inférieure dans le second membre de l'inégalité lorsque w_i décrit l'ensemble $W^{1,1}_{per}(Y)$, on obtient :

$$\begin{aligned} F^s(u) &\leq \overline{\lim_{\epsilon}} F^\epsilon(v_\epsilon) \\ &\leq \sum_{i\in I} \text{ mes } \Omega_i j^{hom}(z_i) = \int_\Omega j^{hom}(Du)dx. \end{aligned}$$

2ème étape : La convexité de F^ϵ est préservée par passage à l'épi-limite supérieure [8] et puisque d'après (1) on a :

$$F^s(u) \leq \Lambda_o \int_\Omega (1 + |Du|(x))dx \quad \text{pour tout } u \in W^{1,1}(\Omega)$$

F^s est convexe, continue sur $W^{1,1}(\Omega)$ comme l'est F^{hom}. On peut donc étendre l'inégalité $F^s(u) \leq F^{hom}(u)$ à tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$ par densité des fonctions affines par morceaux. Posons alors :

$$\widetilde{F}(u) = \begin{cases} F^{hom}(u) & \text{si } u \in W^{1,1}(\Omega) \\ +\infty & \text{si } u \in L^1(\Omega)\backslash W^{1,1}(\Omega) \end{cases}$$

On a donc $F^s(u) \leq \widetilde{F}(u)$ $\forall u \in L^1(\Omega)$. Il suffit ensuite de passer aux régularisées s.c.i. dans $L^1(\Omega)$ compte tenu du théorème 2.11 (i) et du fait que F^s est s.c.i. (voir section 2.3).

Remarque 3.7.— Une démonstration du théorème 3.1 peut être également obtenue par une méthode de régularisation [20] (passage de $BV(\Omega)$ à $W^{1,1}(\Omega)$ par convolution) utilisant une inégalité de Jensen abstraite pour des fonctionnelles-mesure [21].

§ IV. Relaxation d'une condition limite de type Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1, ν la normale extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$ et θ une fonction de $L^1(\Gamma)$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^N$). La surjectivité de l'application trace, considérée successivement dans $BV(\Omega)$ et dans $BV(\omega_o\backslash\overline{\Omega})$ (resp. dans $BD(\Omega)$ et $BD(\omega_o\backslash\overline{\Omega})$) où ω_o est un ouvert borné tel que $\omega_o \supset\supset \Omega$, permet de considérer θ comme la trace sur Γ d'une même fonction, à support contenue dans ω_o, *que l'on notera encore* θ. D'après le Théorème 2.9, on peut choisir ce prolongement θ très régulier de façon que sa restriction à Ω soit dans $W^{1,1}(\Omega)$ (resp. $LD(\Omega)$).

Soit K le convexe de fonction indicatrice I_K défini par :

$$K = \{u \in BV(\Omega) \quad (\text{resp. } BD(\Omega)); \gamma_o u = \gamma_o \theta\}$$

On considère la suite F^ϵ définie dans la section 3 *avec les mêmes hypothèses sur* $j(y,z)$. Alors :

THÉORÈME 4.1.— *La suite* $F^\epsilon + I_K$ *épi-converge dans* $L^1(\Omega)$ *muni de la topologie forte vers la régularisée s.c.i.* Φ_θ *est la fonctionnelle de domaine* $BV(\Omega)$ *définie par :*

$$\Phi_\theta(u) = F^{hom}(u) + \int_\Gamma j_\infty^{hom}[\gamma_o(\theta - u).\nu]\ dH^{N-1}\dagger$$

Dans le cas vectoriel, Φ_θ *a pour domaine* $BD(\Omega)$ *et a pour expression :*

$$\Phi_\theta(u) = F^{hom}(u) + \int_\Gamma j_\infty^{hom}[\mathcal{J}^\nu\ \gamma_o(\theta - u)]\ dH^{N-1}.$$

Remarque 4.2.— a) Dans le cas où la condition limite porte seulement sur une partie borélienne Γ_1 de Γ (i.e. $K = \{\gamma_o u_{|\Gamma_1} = \gamma_o \theta_{|\Gamma_1}\}$), il suffit de remplacer dans l'expression de Φ_θ l'intégrale sur Γ par la même intégrale sur Γ_1.

b) Calculant la polaire de $(j_\infty)^{hom}$ à l'aide du lemme 3.5 (avec j_∞ au lieu de j) on établit que les ensembles $\mathrm{dom}[(j_\infty)^{hom}]^*$ et $\mathrm{dom}(j^{hom})^*$ coïncident. Passant aux fonctions d'appui, on en déduit l'égalité : $(j_\infty)^{hom} = (j^{hom})_\infty$. Ainsi, on peut omettre les deux dernières parenthèses.

Démonstration.— Nous traitons ici le cas vectoriel et procédons en deux étapes :

a) Commençons par l'inégalité : $\underline{\lim}_\epsilon(F^\epsilon + I_K) \geq \Phi_\theta$. A toute fonction $u \in BD(\Omega)$, on associe la fonction u^θ de $BD(\mathbf{R}^N)$ définie par : $u^\theta = u1_\Omega + \theta 1_{\Omega^c}$. Rappelons que la trace sur Γ de la mesure $e(u^\theta)$ est la mesure singulière de densité $\mathcal{J}[\gamma_o(\theta - u)]$ par rapport à $H^{N-1}(\Gamma\ \cap\ .)$ (section 2.2).

Soit $u_\epsilon \in LD(\Omega) \cap K$ telle que :

$$u_\epsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \text{ et } \underline{\lim}_\epsilon\ [F^\epsilon + I_K]\ (u_\epsilon) < +\infty$$

Alors on a aussi pour tout ouvert borné $\omega \supset\supset \Omega$: $u_\epsilon^\theta \xrightarrow{L^1(\omega)} u^\theta$ et on peut appliquer le résultat d'épi-convergence du théorème 3.2 en remplaçant Ω par ω :

$$\underline{\lim}_\epsilon \int_\omega j\left(\frac{x}{\epsilon}, e(u_\epsilon^\theta)\right)dx \geq \int_\Omega j^{hom}[e(u^\theta)]$$

† F^{hom} et j^{hom} ont été définis dans le théorème 3.1 (resp.3.2)

Or d'après (1), on a (noter que θ et u_ϵ^θ sont dans $LD(\Omega)$) :

$$F^\epsilon(u_\epsilon) = \int_\omega j\Big(\frac{x}{\epsilon},\ e(u_\epsilon^\theta)\Big)dx - \int_{\omega\setminus\Omega} j\Big(\frac{x}{\epsilon},\ e(\theta)\Big)dx$$
$$\geq \int_\omega j\Big(\frac{x}{\epsilon},\ e(u_\epsilon^\theta)\Big)dx - \Lambda_o \int_{\omega\setminus\Omega} (1+|e(\theta)|)dx$$

Comme $\int_\omega j^{hom}(e(u^\theta))$ se décompose suivant :

$$\int_{\omega\setminus\overline{\Omega}} j^{hom}(e(\theta))dx + \int_\Gamma j_\infty^{hom}(\mathcal{F}^\nu\gamma_o(\theta-u))dH^{N-1} + \int_\Omega j^{hom}(e(u))$$
$$= \int_{\omega\setminus\overline{\Omega}} j^{hom}(e(\theta))dx + \Phi_\theta(u).$$

on obtient l'inégalité :

$$\underline{\lim}_{\epsilon\to o}\ (F^\epsilon + I_K(u_\epsilon)) \geq \Phi_\theta(u) + \int_{\omega\setminus\overline{\Omega}} [j^{hom}(e(\theta)) - \Lambda_o(1+|e(\theta)|)]dx.$$

On termine en faisant tendre mes$(\omega\setminus\Omega)$ vers 0.

b) Pour l'inégalité $\overline{\lim}_\epsilon(F^\epsilon + I_K) \leq \Phi^\theta$, il suffit de montrer que l'on a pour tout $u \in K\cap C^\infty(\Omega)$: $\overline{\lim}_\epsilon\ [F^\epsilon + I_K](u) \leq F^{hom}(u)$, puis de vérifier (lemme 4.2 ci-dessous) que Φ_θ est la régularisée s.c.i. dans $L^1(\Omega)$ de $F^{hom} + I_{K\cap C^\infty(\Omega)}$. En effet l'épi-limite supérieure est toujours s.c.i. (sec. 2.3). ∎

Soit donc $u \in K\cap C^\infty(\Omega)$ et $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ telle que : $u_\epsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} u$ et $\overline{\lim}\ F^\epsilon(u_\epsilon) \leq F^{hom}(u)$ (une telle suite existe d'après le théorème 3.2). L'idée bien sûr est de modifier u_ϵ au voisinage de Γ pour satisfaire à la condition de bord. Pour cela, on associe à tout $\delta > 0$ la fonction sur Ω définie par $u_\epsilon^\delta = u_\epsilon\varphi^\delta + \theta(1-\varphi^\delta)$ où $\varphi^\delta \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0\leq\varphi^\delta\leq 1$ et $\varphi^\delta \mid_{\Omega^\delta} = 1$ avec $\Omega^\delta = \{x\in\Omega, d(x,\Omega^c) > \delta\}$ et, par un calcul analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 3.1, on construit deux suites $t_\epsilon \to 1^-$ et $\delta(\epsilon)\to 0$ telles que :

$$v_\epsilon = u_\epsilon^{\delta(\epsilon)} \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \text{ et } \overline{\lim}_{\epsilon\to 0}\ F^\epsilon(t^\epsilon v^\epsilon) \leq F^{hom}(u).$$

Mais, si v_ϵ satisfait la condition de trace, il n'en est plus de même de $t_\epsilon v_\epsilon$. On s'appuie alors sur l'inégalité de convexité :

$$F^\epsilon(v_\epsilon) \leq \frac{1}{2-t_\epsilon}\ F^\epsilon(t_\epsilon v_\epsilon) + \frac{1-t_\epsilon}{2-t_\epsilon}\ F^\epsilon(2v_\epsilon)$$

Compte tenu de (1) et de $\overline{\lim}_\epsilon F^\epsilon(t_\epsilon v_\epsilon) \leq +\infty$, la suite $e(v_\epsilon)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$ et donc $\overline{\lim}_\epsilon F^\epsilon(2v_\epsilon) < +\infty$. On en conclut :

$$\overline{\lim_{\epsilon}}(F^\epsilon + I_K)(u) \leq \overline{\lim_{\epsilon}} F^\epsilon(v_\epsilon) \leq F^{hom}(u).$$

LEMME 4.2.— *Φ_θ est la régularisée s.c.i. dans $L^1(\Omega)$ fort de*

$$F^{hom} + I_{K\cap C^\infty(\Omega)}.$$

La fonctionnelle Φ_θ, que l'on peut écrire sous la forme $\Phi_\theta(u) = \int_\omega j^{hom}(e(u^\theta)) - \int_{\omega\setminus\Omega} j^{hom}(e(\theta))dx$ avec $\omega \supset\supset \Omega$, est s.c.i. dans $L^1(\Omega)$ et coïncide avec F^{hom} lorsque $u \in K \cap C^\infty(\Omega)$. On a donc : $\Phi_\theta \leq L^1(\Omega) - sc.\ [F^{hom} + I_{K\cap C^\infty}]$. La démonstration de l'inégalité inverse est délicate et s'inspire de la démarche suivie dans [6] (où la fonctionnelle envisagée est celle des hypersurfaces-minima).

Soit $u \in BD(\Omega)$ (si $u \in L^1\setminus BD$ l'inégalité est évidente). Il s'agit de montrer l'existence d'une suite $w_n \in K \cap C^\infty(\Omega)$ telle que :

$$w_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{n}} F^{hom}(w_n) \leq F^{hom}(u) + \int_\Gamma j_\infty^{hom}[\mathcal{F}^\nu \gamma_o(\theta - u)]dH^{N-1}$$

D'après le théorème 2.11 appliqué à F^{hom}, on peut trouver une suite $u_n \in C^\infty(\Omega)$ telle que : $\gamma_o u_n = \gamma_o u$, $u_n \xrightarrow{L^1} u$ et $\overline{\lim} F^{hom}(u_n) \leq F^{hom}(u)$. D'autre part, on considère, pour tout n, une solution v_n à $\frac{1}{n}$ près du problème de minimisation :

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \inf_{\begin{cases} v\in C^\infty(\Omega) \\ \gamma_o(v)=\gamma_o(\theta-u) \\ v_{|\Omega_n}=0 \end{cases}} \int_\Omega j_\infty^{hom}(e(v))dx.\dagger$$

Il est clair que $w_n = u_n + v_n$ vérifie la condition de trace $w_n \in K$ et, d'après le lemme de majoration 2.3, on a également :

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n}} F^{hom}(w_n) &\leq \overline{\lim_{n}} F^{hom}(u_n) + \overline{\lim_{n}} \int_\Omega j_\infty^{hom}(e(v_n))dx \\ &\leq F^{hom}(u) + \overline{\lim_{n}} \inf \mathcal{P}_n \end{aligned}$$

† $\Omega_n = x \in \Omega, d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n}$

Par des calculs classiques de conjuguées de Fenchel relatives à dualité L^1, L^∞) (voir [5] ou [17] par exemple), on montre que le problème $(\mathcal{P}_n)$ a même dual que le problème $(\mathcal{R}_n)$ définie par :

$$(\mathcal{R}_n) \quad \inf_{v \in LD(\Sigma_n)} \int_{\Sigma_n} j_\infty^{hom}(e(v)dx + \int_\Gamma J_\infty^{hom}[\mathcal{F}^\nu \gamma_o(\theta - u - v)]dH^{N-1} + \int_{\Gamma_n} j_\infty^{hom}[\mathcal{F}^{n^\nu} \gamma_o v]dH^{N-1} \qquad \ddagger$$

avec $\Sigma_n = \Omega \backslash \overline{\Omega}_n$, $\Gamma_n = \partial\Omega_n$ et ν^n normale extérieure à Γ_n.

De plus, d'après (1), l'hypothèse de qualification assurant la stabilité des problèmes $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{R}_n$ est satisfaite ([26], th. 4.1). On a donc :

$$\inf \mathcal{P}_n = \max \mathcal{P}_n^1 = \inf \mathcal{R}_n \leq \int_\Gamma j_\infty^{hom}[\mathcal{F}^\nu \gamma_o(\theta - u)]dH^{N-1}$$

(pour la dernière inégalité, faire $v = 0$ dans $(\mathcal{R}_n)$).

Il reste encore à vérifier la convergence de w_n vers u dans $L^1(\Omega)$. Ceci résulte de $\overline{\lim} F^{hom}(w_n) \leq \Phi_\theta(u) < +\infty$ qui entraîne, par (1), que la suite w_n bornée dans $BD(\Omega)$ converge vers sa limite en mesure égale à u (puisque $\mathcal{V}_n$ est nulle sur Ω_n).

§ V. Application à l'homogénéisation de problèmes en plasticité

5.1.— Présentation du problème en "déplacement" et du problème de charge limite associé

En théorie de l'élasticité avec seuil (modèle élasto-plastique), l'équilibre d'un corps occupant un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$, à structure ϵY-périodique, soumis à un chargement volumique de densité f (et éventuellement à certaines forces surfaciques g réparties sur une partie Γ_1 de $\Gamma = \partial\Omega$) conduit au problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_\lambda^\epsilon) \quad \inf_{u \in K} \{F^\epsilon(u) - \lambda L(u)\}$$

‡ Le problème dual $\mathcal{P}_n^*$ s'écrit :

$$\sup_{\begin{cases} \sigma \in L^\infty(\Sigma_n, \mathbf{R}_S^{N^2}) \\ \operatorname{div}\sigma = 0 \end{cases}} -\int_{\Sigma_n} (j_\infty^{hom})^*(\sigma)dx + \int_\Gamma \gamma_o\theta.\sigma\nu dH^{N-1}$$

$$\text{avec}\begin{cases} K=\{u\in LD(\Omega):\gamma_o u_{|\Gamma_2}=\gamma_o\theta_{|\Gamma_2}\} \text{ avec } \Gamma_2=\Gamma\backslash\Gamma_1 \\ \lambda = \text{coefficient de charge (réel} \geq 0) \\ L(u)=\int_\Omega f(x)u(x)dx+\int_{\Gamma_1} g(x)\gamma_o u(x)dH^{N-1}(x)\end{cases} \dagger$$

L'inconnue u est le champ des déformations (à partir de l'équilibre non contraint) et, pour simplifier ‡, l'énergie plastique de déformations sera représentée par la fonctionnelle F^ϵ définie précédemment i.e. :

$$F^\epsilon(u)=\int_\Omega j\Big(\frac{x}{\epsilon},e(u)\Big)dx \quad (u\in LD(\Omega))$$

avec $j(y,z)$ Y-périodique en y, convexe en z et vérifiant (1)

Notant $P(y)$ le domaine de $j^*(y,.)$, on supposera de plus :

$$\exists k_1>0/ppy\in Y\ j^*(y,z)\leq k_1 \quad \forall z\in P(y). \tag{1'}$$

Cette hypothèse (1') entraîne avec (1) que $P(y)$ est un *convexe compact* [5].

Pour alléger l'exposé, on supposera également que $\Gamma_1=\phi$ (et $\Gamma_2=\Gamma$).

Comme, d'après le théorème 2.4, l'injection de $BD(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est continue pour $p\leq\frac{N}{N-1}$, on impose seulement la condition $f\in[L^N(\Omega)]^N$ qui assure la continuité faible de la forme linéaire $L(.)$ dans $BD(\Omega)$. Compte tenu de la remarque 2.14 (sur les perturbations continues) et du théorème 4.1, la suite $F^\epsilon-\lambda L(.)+I_K$ épiconvergera dans $BD(\Omega)$ faible et dans $L^1(\Omega)$ fort vers $\Phi_\theta-\lambda L(.)$ sous l'hypothèse d'équicoercivité suivante :

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}(F^\epsilon-\lambda L(.)+I_K)(u_\epsilon)<+\infty \Longrightarrow \overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\|u_\epsilon\|_{BD(\Omega)}<+\infty. \tag{2}$$

De fait la coercivité, à ϵ et f fixés, de $F^\epsilon-\lambda L(.)+I_K$ n'est pas vérifiée pour tout λ, ni même la condition inf $\mathcal{P}^\epsilon_\lambda>-\infty$. L'analyse limite se préoccupe

---

† $\theta=0$ dans le cas d'un encastrement

‡ Dans les modèles de plasticité usuels [17] [18] [19], on fait jouer un rôle différent à la partie sphérique du tenseur des déformations et au déviateur $E^D_{i,j}(u)=e_{i,j}(u)-1/3u_{i,i}\delta_{i,i}$. Un modèle plus réaliste serait de choisir :

$$F^\epsilon(u)=\int_\Omega j^D\left(\frac{x}{\epsilon},e^D(u)\right)dx+\int_\Omega k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)|\text{div } u|^2dx$$

Le terme quadratique correspond à une rigidité à la compression (de type élastique) alors que $j^D(y,z)$ fonction d'appui d'un convexe borné $P(y)$ (seuil pour le déviateur des contraintes) vérifie (1). L'adaptation de notre méthode à ce modèle où la croissance de j est anisotrope fera l'objet d'un travail ultérieur.

de déterminer, pour une charge f donnée, l'ensemble des réesl $\lambda \geq 0$, pour lesquels l'infimum du problème :

$$(\mathcal{P}_\lambda^\epsilon) \quad \inf_{u\in K} F^\epsilon(u) - \lambda L(u) \quad \text{est fini}$$

Il est bien connu [5] que cet ensemble est un intervalle $[0, \lambda^\epsilon\}$ et qu'une condition suffisante de coercivité pour $F^\epsilon - \lambda L(.) + I_K$ est d'avoir $\lambda < \lambda^\epsilon$. De plus λ^ϵ (coefficient cinématique de charge limite) apparaît comme l'infimum du problème variationnel auxiliaire suivant :

$$(\mathcal{P}_{AL}^\epsilon) \quad \inf_{\begin{cases}\gamma_o u=0\\ L(u)=1\end{cases}} \int_\Omega j_\infty\Big(\frac{x}{\epsilon}, e(u)\Big) dx\dagger$$

Précisons ce point et donnons une condition suffisante d'équi-coercivité au sens de (2).

PROPOSITION 5.1.— *Soit* $\lambda^\epsilon = \inf \mathcal{P}_{AL}^\epsilon$ *et pour tout* $\lambda \geq 0$, *soit* C_λ^ρ *l'ensemble :* $C_\lambda^\epsilon = \{\sigma \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}_S^{N^2}),\ div\ \sigma + \lambda f = 0$ *et* $\sigma(x) \in P(\frac{x}{\epsilon})$ *p.p.*$\}$. *Alors*

(i) On a les équivalences suivantes :

$$\inf \mathcal{P}_\lambda^\epsilon > -\infty \Longleftrightarrow 0 \leq \lambda \leq \lambda^\epsilon$$

(ii) Sous la condition : $\underline{\lim}_{\epsilon\to 0} \lambda^\epsilon > \lambda$, *la suite* $F^\epsilon - \lambda L(.) + I_K$ *est équi-coercive au sens de (2).*

Remarque. — a) C_λ^ϵ représente l'ensemble des contraintes statiquement admissibles associées à la charge λf. Ces contraintes sont astreintes à demeurer en chaque point $x \in \Omega$ dans le convexe borné $P(\frac{x}{\epsilon}) = \mathrm{dom}\big(j^*\ (\frac{x}{\epsilon}, .)\big)$.

b) La condition $\lambda < \lambda_\epsilon$ assure la coercivité de $F^\epsilon - \lambda^\epsilon L(.) + I_K$ et l'existence de contraintes admissibles associées à la charge $\lambda_\epsilon f$ pour lesquelles le seuil de plasticité n'est atteint en presqu'aucun point i.e. : $\sigma(x) \in$ int $P(\frac{x}{\epsilon})$ *pp.* $x \in \Omega$. Cette condition est appelée *condition de charge sûre pour* $\mathcal{P}^\epsilon$. Nous démontrerons dans les sections 5.2 et 5.3 que la condition $\underline{\lim}_\epsilon \lambda_\epsilon > \lambda$ assurant l'équi-coercivité (ii) n'est autre que la condition de charge sûre pour le problème homogénéisé $\mathcal{P}^{hom}$ associé à $(\mathcal{P}^\epsilon)$ quand $\epsilon \to 0$.

† En fait dans le modèle classique $j(y, z) = j^D(y, z^D) + k(y)\ |tr(z)|^2$, il apparaît en plus la condition div $u = 0$ due au terme à croissance quadratique.

c) Remarquant que, si $u \in K$, $u - \theta$ est dans $BD_0(\Omega)$ avec une norme équivalente à $\int_\Omega e(u-\theta)$ (cf. remarque 2.10 (iii)), on déduit immédiatement de la condition (1) que la suite $F^\epsilon + I_K$ est équi-coercive (c'est-à-dire (2) lorsque $\lambda = 0$).

Démonstration de la proposition 5.1. — Pour (i) on se reportera à [5] ou à [18]. Mentionnons brièvement que la démonstration repose sur le fait que si C^ϵ_λ est non vide, on a l'égalité :

$$\inf \mathcal{P}^\epsilon_\lambda = \max(\mathcal{P}^\epsilon_\lambda)^* = \inf_{\gamma_o u=0}\left[\int_\Omega j_\infty(\frac{x}{\epsilon}, e(u))dx - \lambda L(u)\right]$$

avec

$$(\mathcal{P}^\epsilon_\lambda)^* \ \sup_{\sigma\in C^\epsilon_\lambda} \int_\Omega -j^*\Big(\frac{x}{\epsilon}, \sigma(x)\Big)dx + \int_\Gamma \nu_o\theta.\sigma\nu \ dH^{N-1}.\dagger$$

On utilise alors l'homogénéité de la fonctionnelle :

$$u \mapsto \int_\Omega j_\infty\Big(\frac{x}{\epsilon}, e(u)\Big)dx - L(u).$$

(iii) Supposons vérifiée la condition et soit μ tel que : $\lambda < \mu < \underline{\lim}_\epsilon \lambda^\epsilon$.

D'après (i), C^ϵ_μ est non vide (pour ϵ assez petit) et on aura pour tout $\sigma \in C^\epsilon_\mu$:

$$\inf \mathcal{P}^\epsilon_\mu = \sup(\mathcal{P}^\epsilon_\mu)^* \geq -\int_\Omega j^*\Big(\frac{x}{\epsilon}, \sigma(x)\Big)dx + \int_\Gamma \gamma_o\theta.\sigma\nu \ dH^{N-1}$$

Pour un tel σ, on aura donc : $\sigma(x) \in P(\frac{x}{\epsilon})$ d'où : $|\sigma(x)| \leq \Lambda_o$ (d'après (1)) et : $j^*(\frac{x}{\epsilon}, \sigma(x)) \leq k_1$ d'après (1')).

On en déduit *la minoration indépendante de* ϵ (ϵ petit) :

$$\inf \mathcal{P}^\epsilon_\mu \geq -k_1 \text{ mes } \Omega - \Lambda_o \int_\Gamma |\gamma_o\theta| \ dH^{N-1}.$$

La relation :

$$\begin{aligned} F^\epsilon(u) - \lambda L(u) &= \frac{\lambda}{\mu}[F^\epsilon(u) - \mu L(u)] + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)F^\epsilon(u) \\ &\geq \frac{\lambda}{\mu} \inf \mathcal{P}^\epsilon_\mu + \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu}\Big)F^\epsilon(u) \end{aligned}$$

† Lorsque $\sigma \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^{N^2}_S)$ avec div $\sigma \in L^{N+\alpha}$, on peut définir pour tout $g \in L^1(\Gamma)$ une mesure sur Γ notée $g.\sigma\nu$ dont la variation totale est majorée par $||\sigma||_{L^\infty(\Omega)} \ ||g||_{L^1(\Gamma)}$ (cf.[16], [17]).

permet alors de conclure puisque F^ϵ est elle même équi-coercive (remarque (c) ci-dessus).

5.2.— Homogénéisation du problème de charge limite $\mathcal{P}^\epsilon_{AL}$

Puisque j^∞ satisfait à la condition de croissance (1), la suite de fonctionnelles Φ^ϵ_{AL} définie par

$$\Phi^\epsilon_{AL}(u) = \int_\Omega j_\infty\Big(\frac{x}{\epsilon}, e(u)\Big)dx + I_{\{u\in C^\epsilon_o(\Omega), \int_\Omega fudx=1\}}$$

est équi-coercive dans $BD(\Omega)$ (5.1, remarque c). Il en résulte immédiatement :

THÉORÈME 5.2.— *Pour tout $f \in [L^N(\Omega)]^N$, la suite Φ^ϵ_{AL} épi-converge dans $BD(\Omega)$ faible et dans $L^1(\Omega)$ fort vers :*

$$\Phi^{hom}_{AL}(u) = \int_\Omega j^{hom}_\infty(e(u))dx + \int_\Gamma j^{hom}_\infty[\mathcal{F}^\nu(-\gamma_o u)]dH_{N-1} + I_{\{\int_\Omega fu=1\}}$$

On a de plus la convergence des infimum :

$$\lambda^\epsilon = \inf \mathcal{P}^\epsilon_{AL} \xrightarrow[(\epsilon\to 0)]{} \lambda^{hom} = \min \mathcal{P}^{hom}_{AL} = \inf_{\begin{cases} u\in C^\infty_o \\ \int_\Omega fu=1\end{cases}} \int_\Omega j^{hom}_\infty[e(u)]dx$$

où :

$$(\mathcal{P}^{hom}_{AL}) \quad \inf_{u\in BD(\Omega)} \Phi^{hom}_{AL}(u)$$

Démonstration.— Il suffit d'utiliser les résultats des sections 3 et 4 en remplaçant j par j_∞. L'inégalité $\underline{\lim}_\epsilon \Phi^\epsilon_{AL}$ est obtenue en appliquant le théorème 4.1 avec $\theta = 0$ et $j = j_\infty$ et en tenant compte du fait que l'ensemble $\{u \in BD(\Omega); \int_\Omega fu = 1\}$ est faiblement fermé dans $BD(\Omega)$.

Pour établir l'inégalité $\overline{\lim}_\epsilon \Phi^\epsilon_{AL}(u) \le \Phi^{hom}_{AL}(u)$, on suppose que $L(u) = \int_\Omega fu = 1$ (sinon $\Phi^{hom}_{AL}(u) = +\infty$) et on considère une suite $u_\epsilon \in C^\infty_o$ telle que : $u_\epsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} u$ et $\overline{\lim}_\epsilon \int_\Omega j_\infty(\frac{x}{\epsilon}, e(u_\epsilon)dx \le \Phi^{hom}_{AL}(u)$ (elle existe d'après le théorème 4.1).

On se ramène alors à une suite v_ϵ vérifiant $L(v_\epsilon) = 1$ en posant : $v_\epsilon = \frac{1}{m_\epsilon} u_\epsilon$ avec $m_\epsilon = L(u_\epsilon)$. La continuité de $L(.)$ et la convergence de u_ϵ vers u dans $BD(\Omega)$ faible entraînent : $m_\epsilon = L(u_\epsilon) \to L(u) = 1$. L'homogénéité de j_∞ permet de conclure par :

$$\overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\, \Phi^\epsilon_{AL}(v_\epsilon) = \overline{\lim_{\epsilon\to 0}}\, \frac{1}{m_\epsilon} \int_\Omega j_\infty\Big(\frac{x}{\epsilon}, e(u_\epsilon)\Big) \le \Phi^{hom}_{AL}(u).$$

On déduit ensuite la convergence des infimum : $\lambda^\epsilon \to \lambda^{hom}$ en appliquant le théorème 2.13. L'égalité

$$\lambda^{hom} = \inf \left[\int_\Omega j^{hom}_\infty(e(u)) + I_{\{u\in C^\infty_o(\Omega), L(u)=1\}}\right]$$

provient du fait que la régularisée s.c.i. dans $L^1(\Omega)$ du terme entre crochets n'est autre que Φ^{hom}_{AL} (ceci s'obtient grâce au lemme 4.2 avec j^{hom}_∞ au lieu de j^{hom}).

5.3.— Homogénéisation du problème en déplacement $\mathcal{P}^\epsilon_\lambda$

Compte tenu des théorèmes 4.1 et 5.2, on peut maintenant conclure par le résultat pratique suivant :

THÉORÈME 5.3.— *Soit $f \in [L^N(\Omega)]^N$ et λ^{hom} l'infimum du problème $\mathcal{P}^{hom}_{AL}$ associé (défini en 5.2). Alors pour tout coefficient de charge λ tel que $0 \le \lambda < \lambda^{hom}$, la suite $F^\epsilon - \lambda L(.) + I_K$ est équi-coercive dans $BD(\Omega)$ et épi-converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $\Phi_\theta - \lambda L(.)$ † Notant alors $\mathcal{P}^{hom}_\lambda$ le problème homogénéisé associé à $\mathcal{P}^\epsilon_\lambda$ quand $\epsilon \to 0$, i.e. :*

$$\mathcal{P}^{hom}_\lambda : \inf_{u\in BD(\Omega)} \Phi_\theta(u) - \lambda L(u)$$

on en déduit la convergence des infima :

$$\inf\, \mathcal{P}^\epsilon \to \min \mathcal{P}^{hom} = \inf_{\begin{cases} uC^\infty(\Omega) \\ \gamma_o u = \gamma_o \theta \end{cases}} \int_\Omega j^{hom}(e(u))dx - \lambda \int_\Omega f.u\, dx$$

De plus, toute suite minimisante $u_\epsilon \in LD(\Omega) \cap K$ (i.e. telle que $F^\epsilon(u_\epsilon) - \lambda L(u_\epsilon) - \inf \mathcal{P}^\epsilon_\lambda \to 0$) admet une sous suite faiblement convergente dans $BD(\Omega)$ vers une solution de $\mathcal{P}^{hom}_\lambda$.

---

† Φ_θ a été définie en 4.1 (elle est la régularisée sc.i. de $F^{hom} + I_{K\cap C^\infty}$)

Remarque.— Puisque $(j^{hom})_\infty = (j_\infty)^{hom}$, $\mathcal{P}_{AL}^{hom}$ n'est autre que le problème d'analyse limite associé à $\mathcal{P}_\lambda^{hom}$. Par conséquent, $\lambda^{hom} > \lambda$ *est la condition de charge sûre pour* $\mathcal{P}_\lambda^{hom}$ *au sens de 5.1(b).*

§ VI. Conclusion

Nous n'avons pas développé ici l'aspect dual des résultats obtenus dans $BV(\Omega)$ et $BD(\Omega)$. Il sera abordé dans un travail ultérieur comportant notamment :

1) L'adaptation de l'homogénéisation primale (problème en déplacement) au cas d'une croissance anisotrope pour $j(y,z)$ (conformément au modèle classique de l'élasto- plasticité avec seuil).

2) L'épi-convergence séquentielle faible dans $L^\infty(\Omega, \mathbf{R}_S^{N^2})$ des convexes de contraintes admissibles C_λ^ϵ quand $\lambda < \lambda^{hom}$ et l'homogénéisation du problème en "contrainte".

3) La recherche de correcteurs pour les problèmes primaux et duaux.

Références

[1] TEMAM (R.) et STRANG (G.).— Existence de solutions relaxées pour les équations de la plasticité : étude d'un espace fonctionnel, *C.R.A.S.*, t. **287**, **série A**, 1978, p. 515-518.

[2] SUQUET (P.).— Sur un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de la plasticité, *C.R.A.S.*, t. **286**, **Série A**, 1978, p. 1129-1132.

[3] MASO (D.).— Integral representation on $BV(\Omega)$ of Γ-limit of variational integrals, *Manuscripta Math.*, t. **30**, 1980, p. 387-416.

[4] GIAQUINTA (M.) - MODICA (G.) - SOUCEK (J.).— Functionals with linear groth in the calculus of variations, *Comm. Math. Univ. Carolina*, t. **20**, 1979, p. 141-171.

[5] TEMAM (R.).— *Problèmes mathématiques en plasticité.*— Collection MMI - Gauthiers Villars. 1983.

[6] ANZELLOTTI (G.).— *The Euler equation for functionals with linear growth.*— Preprint University of Trento. 1983.

[7] PICARD (C.).— *Comportement limite de suites d'inéquations variationnelles avec obstacles.*— Thèse Orsay, Université de Paris Sud 1984.

[8] ATTOUCH (H.).— *Variational convergence for functions and operators.*— Applicable Mathematics Series, Pitman. 1984.

[9] ATTOUCH (H.).— *Variational properties of epi-convergence. Application to limit analysis problems in mechanics and duality theory.*— Proceeding Catania. Multifunctions and integrands. Springer Verlag, 1091, Lectures Notes in Maths.

[10] SUQUET (P.).— Analyse limite et homogénéisation, *C.R.A.S.*, t. **296**, **Série A**, 1983, p. 1355-1358.

[11] GOFFMAN (G.) et SERRIN (J.).— Sublinear functions of measures and variational integrals, *Duke Math. J.*, t. **31**, 1964, p. 159-178.

[12] ROCKAFELLAR (R.T.).— Extension of Fenchel's duality theorem for convex functionx, *Duke Math. J.*, t. **33**, 1966, p. 81-90.

[13] GIUSTI (E.).— *Minimal surfaces and functions of bounded variation.*— Notes on Pure Math. 10, A.C.T. Canberra. 1977.

[14] SUQUET (P.).— *Fonctions à variations bornées sur un ouvert de R^N.*— Séminaire d'Analyse Convexe - Montpellier - Exposé $n^o 4$. 1978.

[15] AZE (D.).— *Homogénéisation primale et duale par épi-convergence. Applications à l'élasticité.*— Publications AVAMAC (Perpignan). 1984.

[16] ANZELOTTI (G.).— *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness.*— Preprint University of Trento. 1983.

[17] KOHN (R.) et TEMAM (R.).— Dual spaces of stresses and strains, with applications to Hencky plasticity, *Appl. Math. Optim.*, t. **10**, 1983, p. 1-35.

[18] TEMAM (R.) et STRANG (G.).— Duality and relaxation in the variational problems of plasticity, *J. Mécanique*, t. **19**, 1980, p. 493-527.

[19] SUQUET (P.).— *Plasticité et Homogénéisation.*— Thèse, Université de Paris XI. 1982.

[20] CARBONE (L.) et SBORDONE (C.).— Some properties of Γ-limits of integral functionals, *Ann. Mat. Pura Appl.*, *(4)*, t. **122**, 1979, p. 1-60.

[21] MASO (D.).— *Cours du SISSA.*— Trieste. 1985.

[22] LIONS (J.L.).— *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control.*— Sciences Press, Pekin, China - Gordon and Breach, Inc New-York. 1981.

[23] ANZELLOTTI (G.) - BUTTAZZO (G.) - MASO (D.).— *Dirichlet problems for demi-coercive functionals.*— ISAS, Trieste. 1985.

[24] MARCELLINI (P.).— Periodic solutions and homogenization of non linear variational problems, *Ann. Math. Pura Appl. (4)*, t. **117**, 1978, p. 139-152.

[25] ANZELLOTTI (G.) - GIAQUINTA (M.).— Funzioni *BV e* tracce, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, t. **60**, 1978, p. 1-22.

[26] EKELAND (I.) - TEMAM (R.).— *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod. 1974.