ALAIN BACHELOT

Convergence dans $L^p(R^{n+1})$ de la solution de l'équation de Klein-Gordon vers celle de l'équation des ondes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 8, nº 1 (1986-1987), p. 37-60

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1986-1987_5_8_1_37_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse Vol.VIII, n°1, 1986-1987

Convergence dans $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$ de la solution de l'équation de Klein-Gordon vers celle de l'équation des ondes

ALAIN BACHELOT [1]

RÉSUMÉ. — On étudie la continuité de la solution de l'équation de Klein-Gordon par rapport au paramètre de masse. En particulier on établit la convergence dans $L^q(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ de la solution de l'équation inhomogène de Klein-Gordon vers la solution de l'équation des ondes de mêmes données initiales, quand la masse tend vers 0; ce résultat permet de résoudre le problème inverse de diffusion pour l'équation

$$\Box u + m^2 u = \sum_{k \geq 1} q_k(x)|u|^{2k}u.$$

ABSTRACT. — We study the continuity of the solution of the Klein-Gordon equation with respect to the mass. We prove the convergence in $L^q(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$ of the solution of the inhomogeneous Klein-Gordon equation to the solution of the wave equation, with same initial data, when the masse tends to 0; we use this result to solve the inverse scattering problem for the equation

$$\Box u + m^2 u = \sum_{k \geq 1} q_k(x)|u|^{2k}u.$$

Introduction

Considérons une solution u^m de l'équation de Klein-Gordon $(K.G.)_m$ de masse $m \geq 0$:

$$(K.G.)_m \qquad u_{tt}^m - \Delta_x u^m + m^2 u^m = f(t,x); \; x \in \mathbf{R}^n.$$

[1] Université de Bordeaux I, U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Laboratoire associé au C.N.R.S. 226, 351,cours de la Libération, 33405 Talence Cédex

On montre facilement que si les données sont des distributions tempérées, u^m converge faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+1})$ vers la solution u^o de l'équation :

$$u^o_{tt} - \Delta_x u^o = f(t,x), \tag{1}$$

avec les mêmes données initiales quand $m \to 0$. Peut-on espérer une convergence plus forte? On sait que STRICHARTZ [13] a établi que pour des données convenables u^m appartient à $L^{p'}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)$. On montre ici que l'application $m \to u^m$ est continue à valeur $L^{p'}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x)$. Ce résultat a été établi dans un cas particulier dans [1]. La convergence de la solution u^m de l'équation homogène de Klein-Gordon est obtenue comme corollaire d'un résultat plus général; dans le cas où $f = 0$, u^m s'écrit :

$$u^m(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\tau,\xi}(F_m(\tau,\xi)d\mu_{m^2}),\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ \tau \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

où $\mathcal{F}^{-1}_{\tau,\xi}$ désigne la transformée de Fourier réciproque, F_m dépend des données initiales, et où $d\mu_{m^2}$ est la distribution tempérée sur $\mathbf{R}^{n+1}$ portée par la nappe $\{-\tau^2 + |\xi|^2 + m^2 = 0\}$ et définie par :

$$d\mu_{m^2} = \frac{d\xi}{\sqrt{m^2+|\xi|^2}}. \tag{3}$$

Considérons à présent une forme quadratique Q non dégénérée sur $\mathbf{R}^n$, et pour $r \in \mathbf{R}$ notons $d\mu_r$ la distribution tempérée sur $\mathbf{R}^n$, portée par la surface $\{Q = r\}$ et définie par :

$$d\mu_r = \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\left|\frac{\partial Q}{\partial x_n}\right|_{Q=r}}.$$

Pour r_o et r_1 dans $\mathbf{R}$ on note $F(r_o, r_1)$ l'adhérence vague de l'espace vectoriel engendré par la famille $(d\mu_r)_{r_o \leq r \leq r_1}$. Dans la première partie on montre que si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ pour p convenable, et si T_ν est une suite vaguement convergente dans $F(r_o,r_1)$, alors $\widehat{T_\nu} * f$ converge dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, p' conjugué de p, où $\widehat{u}$ désigne la transformée de Fourier d'une distribution tempérée u. On obtient un résultat analogue pour $T_\nu * f$. On en déduit un résultat de continuité sur les traces de $\widehat{f}$: plus précisément si f_ν est une suite convergente dans $L^p(\mathbf{R}^n)$ alors la suite des $T_\nu.\widehat{f_\nu}$, considérés comme mesures sur $\mathbf{R}^n$, converge vaguement. Dans la deuxième partie on étudie la continuité par rapport à m des solutions élémentaires de $(K.G.)_m$ considérés comme opérateurs de convolution dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}^{n+1}), L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1}))$. On en déduit avec les résultats de la première partie la convergence des solutions u^m

de l'équation inhomogène de Klein-Gordon quand $m \to m_o$. Un résultat analogue est obtenu pour les solutions à petites données de l'équation :

$$(5) \qquad u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = q(t,x)\ |u|^2 u;\ x \in \mathbf{R}^3.$$

Dans la troisième partie on applique la convergence des solutions de $(K.G.)_m$ dans $L^4(\mathbf{R}^4)$ quand $m \to 0$ pour résoudre le problème inverse de diffusion, associé à l'équation :

$$(6) \qquad u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = \sum_{k \geq 1} q_k(x)\ |u|^{2k} u;\ x \in \mathbf{R}^3.$$

Ceci généralise les résultats de [1] et [5] (voir aussi [4] [10] [11]). En appendice, on étend les résultats de la première partie au cas où $r_o = -\infty$, si Q est la forme de Lorents $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2; F(-\infty, r_1)$ est alors remplacé par l'ensemble des mesures Lorentz-invariantes de support dans $\{-\infty < Q \leq r_1\}$ vérifiant une condition de décroissance dans la direction d'hyperbolicité.

§ I. Convergence de $\widehat{T_\nu} * f,\ T_\nu * f,\ T_\nu . \widehat{f_\nu}$

Nous énonçons les principaux résultats; on note $(s, n-s)$ la signature de Q qui se ramène à la forme :

$$(7) \qquad Q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - s_{s+1}^2 - \ldots - x_n^2.$$

THÉORÈME 1.a.— *Soit $(T_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ une suite vaguement convergente dans $F(r_o, r_1)$ vers une mesure T quand $\nu \to +\infty$. Soit f dans $L^p(\mathbf{R}^n)$. Alors la suite $\widehat{T_\nu} * f$ converge vers $\widehat{T} * f$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ quand $\nu \to \infty$, où p et p' vérifient : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et les conditions suivantes :*

$$(8) \qquad \begin{cases} 1)\ si \quad 0 \in [r_o, r_1] & et\ \ 3 \leq n\ \ alors\ \ p = \frac{2n}{n+2} \\ 2)\ si \quad 0 \notin [r_o, r_1] & et\ \ s = n\ \ ou\ \ 0\ \ alors\ \ p \in \left[1, \frac{2(n+1)}{n+3}\right] \\ 3)\ si \quad 0 \notin [r_o, r_1] & et\ \ s \neq n\ et\ 0,\ alors\ pour\ \ n \geq 3 \\ \quad p \in \left[\frac{2n}{n+2}, \frac{2(n+1)}{n+3}\right] & et\ pour\ \ n = 2\ p \in]1, 6/5]. \end{cases}$$

THÉORÈME 1.b.— *Avec les notations du théorème précédent, la suite $T_\nu * f$ converge quand $\nu \to \infty$ vers $T * f$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ sous les conditions suivantes :*

$$(9)\qquad \begin{cases} 1)\ si\quad 0\in[r_o,r_1] & et\ \ 3\leq n\ \ alors\ \ p=\frac{n}{n-1}\\ 2)\ si\quad 0\notin[r_o,r_1] & et\ \ s=n\ \ ou\ \ 0,\ \ alors\ \ p\in\left[\frac{n+1}{n},2\right]\\ 3)\ si\ 0\notin[r_o,r_1] & et\ \ s\neq n\ \ et\ \ 0,\ \ alors\ \ pour\ \ n\geq 3\\ \quad p\in\left[\frac{n+1}{n},\frac{n}{n-1}\right] & et\ pour\ \ n=2\ p\in\left[\frac{3}{2},2\right[. \end{cases}$$

STRICHARTZ [13] a montré que la convolution par $\widehat{d\mu_r}$ opère de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si la transformée de Fourier des éléments de $L^p(\mathbf{R}^n)$ admet une trace bien définie sur la nappe $\{Q = r\}$ dans $L^2(\{Q = r\},\ d\mu_r)$. On montre ici que si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $\widehat{f}d\mu_r$ considérée comme mesure sur $\mathbf{R}^n$, tend vaguement vers $\widehat{f}d\mu_{r_o}$ quand $r \to r_o$; plus généralement le théorème 1.a permet d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 2.— *Soient $(T_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ une suite vaguement convergente vers f dans $F(r_o,r_1)$ quand $\nu \to \infty$ et $(f_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ une suite convergente vers f quand $\nu \to \infty$ dans $L^p(\mathbf{R}^n)$. Alors sous la condition (8) la suite $\widehat{f_\nu}\ .\ T_\nu$ est bien définie et converge vaguement vers $\widehat{f}\ .\ T$ si $\nu \to \infty$.*

Preuve des théorèmes 1.a et 1.b. — Tout d'abord nous précisons quelques notations; $E(r_o,r_1)$ désigne l'espace vectoriel engendré par les mesures $(d\mu_r)_{r_o\leq r\leq r_1}$ dont $F(r_o,r_1)$ est l'adhérence vague. On note $\|.\|_p$ la norme des espaces de Lebesgue L^p, J_z, K_z désignent respectivement la fonction gamma et les fonctions de Bessel classiques. Si X est un espace topologique localement compact, on note $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbf{C}$ continues à support compact et $\mathcal{K}'(X)$ l'espace des mesures de Radon sur X. Enfin, on note respectivement α et β les applications définies sur $F(r_o,r_1)$ et qui, à une mesure T de $F(r_o,r_1)$, associent respectivement les opérateurs de convolution définis par :

$$(10)\qquad \forall f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\qquad \alpha(T)(f)=\widehat{T}*f,$$

$$(11)\qquad \beta(T)(f)=T*f.$$

Il s'agit donc d'établir la continuité séquentielle de α et β de $F(r_o,r_1)$ dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}^n), L^{p'}(\mathbf{R}^n))$ muni de la topologie de la convergence simple. Nous commençons par caractériser les éléments de $F(r_o,r_1)$.

LEMME 1.— *Toute mesure T de $F(r_o,r_1)$ s'écrit de manière unique sous forme d'une intégrale vaguement convergente*

$$(12)\qquad T=\int_{r_o}^{r_1} d\mu_r\ d\rho(r)$$

où $d\rho$ est une mesure sur $[r_o, r_1]$. L'application $t \to d\rho$ est un isomorphisme topologique de $f(r_o, r_1)$ sur l'espace $\mathcal{K}'([r_o, r_1])$ des mesures de Radon sur $[r_o, r_1]$ munis de leurs topologies vagues respectives.

Preuve du lemme 1. — Notons $E_1 = \{T = \int_{r_o}^{r_1} d\mu_r \; d\rho(r); d\rho \in \mathcal{K}'([r_o, r_1])\}$. Sachant que toute mesure de Radon sur $[r_o, r_1]$ est vaguement adhérente à l'espace engendré par les mesures de Dirac, et que l'application $r \to d\mu_r$ est vaguement continue, on voit que :

$$E(r_o, r_1) \subset E_1 \subset F(r_o, r_1).$$

A présent supposons que $\int_{r_o}^{r_1} d\mu_r \; d\rho(r) = 0$; on choisit φ un élément non nul, positif, de $\mathcal{K}(\mathbf{R}^{n-1})$ et on pose :

$$\chi(x) = \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) \left| \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right|.$$

Pour tout f dans $\mathcal{K}([r_o, r_1])$ et tout prolongement $\tilde{f}$ de f dans $\mathcal{K}(\mathbf{R})$, l'application $\tilde{f}(Q(x)) \; \chi(x)$ appartient à $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$. En notant $<\,,\,>$, le crochet de dualité $\mathcal{K}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$, on a donc :

$$< \int_{r_o}^{r_1} d\mu_r \; d\rho(r), \; \tilde{f}(Q(x)) \; \chi(x) >= 0.$$

En développant, il vient :

$$\int_{r_o}^{r_1} < d\mu_r, \; \chi > f(r) \; d\rho(r) = 0.$$

En remarquant que $< d\mu_r, \chi >$ est une constante non nulle on en déduit que $d\rho = 0$; si bien que l'application $T \to d\rho$ existe et est une bijection de E_1 sur $\mathcal{K}'([r_o, r_1])$. A présent, si $T_\nu = \int_{r_o}^{r_1} d\mu_r \; d\rho^\nu(r)$ est une suite généralisée dans E_1 vaguement convergente vers T dans $F(r_o, r_1)$, la suite $< T_\nu, \tilde{f}(Q(x))\chi(x) >$ est convergente pour tout f dans $\mathcal{K}([r_o, r_1])$. De l'égalité :

$$< T_\nu, \tilde{f}(Q(x))\chi(x) >=< d\mu_r, \chi > \int_{r_o}^{r_1} f(r) d\rho^\nu(r)$$

on déduit que la suite $d\rho^\nu$ est vaguement convergente vers un élément $d\rho$ dans $\mathcal{K}'([r_o, r_1])$. D'autre part, pour tout ψ dans $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ l'application : $r \to < d\mu_r, \psi >$ est continue, si bien que :

$$< T_\nu, \psi > \xrightarrow{\nu} \int_{r_o}^{r_1} < d\mu_r, \psi > d\rho(r).$$

Ceci montre d'une part que E_1 est vaguement fermé et coïncide donc avec $F(r_o, r_1)$, et d'autre part que l'application $T \to d\rho$ est bicontinue. Q.E.D.

A présent, si T appartient à $F(r_o, r_1)$ montrons que $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ opèrent de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$. Comme dans [13] on utilise l'interpolation complexe. Plus précisément, on construit deux familles analytiques d'opérateurs en posant :

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \alpha_z(T). & = \left(\int_{r_o}^{r_1} h(z)\mathcal{F}(Q-z)_+^z \, d\rho(r)\right) * . \\ \beta_z(T). & = \left(\int_{r_o}^{r_1} h(z)(Q-r)_+^z \, d\rho(r)\right) * . \end{cases}$$

où $d\rho$ est la mesure sur $[r_o, r_1]$ associée à T par (12) et $\mathcal{F}$ designe la transformée de Fourier; $h(z)$ est une fonction holomorphe s'annulant convenablement sur les entiers et demi-entiers négatifs pour que $h(z)(Q-r)_+^z$ soit holomorphe en z à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} h(z) & = [\Gamma(z+1)]^{-1}\left(z+\frac{n}{2}\right) \sin\left[\pi\left(z+\frac{n}{2}\right)\right] \text{ si } n \text{ impair } \geq 3 \\ h(z) & = [\Gamma(z+1)]^{-1}\left(z+\frac{n}{2}\right)(z+1)^{-1} \sin\left[\pi\left(z+\frac{n}{2}\right)\right] \\ & \qquad \text{si } n \text{ pair } \geq 4 \\ h(z) & = [\Gamma(z+1)]^{-1}(z+1)^{-1}\sin[\pi(z+1)] \text{ pour } n=2. \end{cases}$$

L'application $r \to h(z)(Q-r)_+^z$ est alors continue pour tout z, à valeur dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ si bien que les intégrales (13) convergent dans cet espace. Enfin on vérifie par le calcul que si h vérifie (14), $\alpha_z(T)$ et $\beta_z(T)$ sont des familles analytiques d'opérateurs sur $D = \left\{z \in \mathbf{C}, -\frac{n+1}{2} < z < 0\right\}$, continues sur $\overline{D}$ et satisfaisant la condition de croissance admissible de Stein [8]. En remarquant que le résidu en $z = -1$ de $(Q-r)_+^z$ est $d\mu_r$, et que -1 est zéro simple de h, on voit que $\alpha_{-1}(T)$ et $\beta_{-1}(T)$ coïncident avec $\alpha(T)$ et $\beta(T)$. Il suffit alors de montrer que, d'une part $\alpha_{iy}(T)$ et $\beta_{iy}(T)$ appartiennent respectivement à $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n))$ et à $\mathcal{L}(L^1(\mathbf{R}^n), L^\infty(\mathbf{R}^n))$, et que d'autre part, $\alpha_z(T)$ et $\beta_z(T)$ appartiennent respectivement à $\mathcal{L}(L^1(\mathbf{R}^n), L^\infty(\mathbf{R}^n))$, $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n))$ pour z vérifiant :

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} -\frac{n+1}{2} \leq Re\, z & \leq -\frac{n}{2} \text{ si } 0 \notin [r_o, r_1] \text{ et } n \geq 3 \\ \qquad\quad Re\, z & = -\frac{n}{2} \text{ si } 0 \in [r_o, r_1] \text{ et } n \geq 3 \\ -\frac{3}{2} \quad \leq Re\, z & < -1 \text{ si } 0 \notin [r_o, r_1] \text{ et } n = 2. \end{cases}$$

En appliquant le théorème d'interpolation de Stein à $z = -1$, on en déduit que $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ opèrent de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, pour p satisfaisant respectivement (8) et (9).

Tout d'abord, par l'égalité de Plancherel on a :

$$\|\alpha_{iy}(T)f\|_2 = \left\|\mathcal{F}\Big(\int_{r_o}^{r_1} h(iy)\mathcal{F}(Q-r)_+^{iy}\, d\rho(r)\Big).\widehat{f}\right\|_2$$

et

$$\|\alpha_{iy}(T)f\|_2 \leq |h(iy)| \left\|\int_{r_o}^{r_1} (Q-r)_+^{iy}\, d\rho(r)\right\|_\infty \|f\|_2.$$

Comme pour tout x fixé l'application $r \to (Q(x)-r)_+^z$ est universellement mesurable, on a :

$$\left\|\int_{r_o}^{r_1} (Q-r)_+^{iy}\, d\rho(r)\right\|_\infty \leq \|d\rho\|$$

où $\|d\rho\|$ désigne la masse totale de $d\rho$. On obtient donc :

(16) $$\|\alpha_{iy}(T)f\|_2 \leq |h(iy)|\ \|d\rho\|\ \|f\|_2.$$

$\alpha_{iy}(T)$ appartient ainsi à $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n))$ et sa norme est une fonction de y de croissance admissible.

D'autre part, le théorème de Young montre que :

$$\|\beta_{iy}(T)f\|_\infty \leq \left\|\int_{r_o}^{r_1} h(iy)(Q-r)_+^{iy}\, d\rho\right\|_\infty \|f\|_1$$

d'où

(17) $$\|\beta_{iy}(T)f\|_\infty \leq |h(iy)|\ \|d\rho\|\ \|f\|_1.$$

$\beta_{iy}(T)$ opère donc de $L^1(\mathbf{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et sa norme est une fonction de y de croissance admissible. On établit de même que :

$$\|\alpha_z(t)f\|_\infty \leq \left\|\int_{r_o}^{r_1} h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^{z}\, d\rho(r)\right\|_\infty \|f\|_1$$

d'où

$$\|\alpha_z(T)f\|_\infty \leq \|d\rho\| \sup_{r\in[r_o,r_1]} \|h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z\|_\infty\ \|f\|_1$$

et

$$\|\beta_z(T)f\|_2 \leq \left\|\mathcal{F}\Big(\int_{r_o}^{r_1} h(z)(q-r)_+^{r})_+^{z}\, d\rho(r)\Big).\widehat{f}\right\|_2$$

d'où

$$\|\beta_z(T)f\|_2 \leq \|d\rho\| \sup_{r\in[r_o,r_1]} \|h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z\|_\infty \, \|f\|_2.$$

Nous rappelons l'expression de $h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z$; tout d'abord pour $r=0$ on a :

$$(20) \qquad h(z)\mathcal{F}(Q_+^z) = h(z)2^{n+2z}\ \pi^{\frac{n}{2}-1}\ \Gamma(z+1)\Gamma\left(z+\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2i}.\{\ \}$$

où

$$(21) \qquad \{\ \} = e^{-i\left(\frac{n-s}{2}+z\right)\pi}\ (Q-io)^{-z-\frac{n}{2}} - e^{i\left(\frac{n-s}{2}+z\right)\pi}\ (Q+io)^{-zy\frac{n}{2}}.$$

Pour $Re\ z = -\frac{n}{2}$, $h(z)\mathcal{F}(Q_+^z)$ appartient donc à $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ et sa norme est une fonction de $Im\ z$ de croissance admissible. A présent pour $r>0$ on a :

$$(22) \qquad h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z = h(z)\Gamma(z+1)2^{z+\frac{n}{2}+1}\ \pi^{\frac{n-1}{2}}\ r^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+z)}\ .\{\ \}$$

où

$$(23) \qquad \{\ \} = \sin\ \left(\frac{s\pi}{2}\right)\ \frac{K_{z+\frac{n}{2}}(r^{\frac{1}{2}}Q_-^{\frac{1}{2}})}{(r^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}})^{z+\frac{n}{2}}}\ r^{\frac{1}{2}(z+\frac{n}{2})} - \frac{\pi\ r^{\frac{1}{2}(z+\frac{n}{2})}}{2\sin(z+\frac{n}{2})\pi}\ .[\ ]$$

où

$$(24) \quad [\ ] = \sin\ \left(\frac{s\pi}{2}\right)\ \frac{J_{z+\frac{n}{2}}(r^{\frac{1}{1}}Q_+^{\frac{1}{2}})}{(r^{\frac{1}{2}}Q_+^{\frac{1}{2}})^{z+\frac{n}{2}}} + \sin\ (z+\frac{n-s}{2})\ \pi\ \frac{J_{-z-\frac{n}{2}}(r^{\frac{1}{2}}Q_+^{\frac{1}{2}})}{(r^{\frac{1}{2}}Q_+^{\frac{1}{2}})^{z+\frac{n}{2}}}.$$

Dans le cas où r est négatif non nul on a :

$$(25) \qquad h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z = h(z)\Gamma(z+1)2^{z+\frac{n}{2}+1}\ \pi^{\frac{n}{2}-1}\ |r|^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+z)}\ .\{\ \}$$

où

(26)

$$\{\ \} = -\sin\left(z+\frac{n-s}{2}\right)\pi\frac{K_{z+\frac{n}{2}}(|r|^{\frac{1}{2}}Q_+^{\frac{1}{2}})}{(|r|^{\frac{1}{2}}Q_+^{\frac{1}{2}})^{z+\frac{n}{2}}}\ |r|^{\frac{1}{2}(z+\frac{n}{2})} + \frac{|r|^{\frac{1}{2}(z+\frac{n}{2}}\pi}{2\sin(z+\frac{n}{2})\pi}\ .[\ ]$$

où

$$(27) \ [\ ] = \sin\left(z+\frac{n-s}{2}\right)\pi\frac{J_{z+\frac{n}{2}}(|r|^{\frac{1}{2}}Q_-^{\frac{1}{2}})}{(|r|^{\frac{1}{2}}Q_-^{\frac{1}{2}})^{z+\frac{n}{2}}} + \sin\ \left(\frac{s\pi}{2}\right)\ \frac{J_{-z-\frac{n}{2}}(|r|^{\frac{1}{2}}Q_-^{\frac{1}{2}})}{(|r|^{\frac{1}{2}}Q_-^{\frac{1}{2}})^{z+\frac{n}{2}}}.$$

Des formules (22) et (27) on déduit que pour $r \neq 0$:

$$\begin{aligned} \|h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z\|_\infty \leq C(z)|\ |r|^{z+\frac{n}{2}}|\ \Big(&\|u^{-(z+\frac{n}{2})}\ J_{-(z+\frac{n}{2})}(u)\|_\infty \\ &+\|u^{-(z+\frac{n}{2})}J_{z+\frac{n}{2}}(u)\|_\infty \\ &+\|(z+\frac{n}{2})u^{-(z+\frac{n}{2})}K_{z+\frac{n}{2}}(u)\|_\infty\Big). \end{aligned} \tag{28}$$

où $C(z)$ est une fonction positive de z de croissance admissible avec Imz, et où u décrit $\mathbf{R}^+$. D'après [13] le membre de droite de (28) est fini pour $-\frac{n+1}{2} \leq Re\ z \leq -\frac{n}{2}$ pour $n \geq 3$ et pour $-\frac{3}{2} \leq Re\ z < -1$ pour $n = 2$. On en déduit que $\sup_{r\in[r_o,r_1]} \|h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z\|_\infty$ est fini pour z vérifiant (15). En interpolant (16) et (18) d'une part et (17) et (19) d'autre part, on voit que $\alpha_{-1}(T)$ et $\beta_{-1}(T)$ opèrent de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ pour p vérifiant (8) et (9).

Etudions à présent la continuité de α et β. Considérons une suite T_ν vaguement convergente vers 0 dans $F(r_o,r_1)$; la suite $d\rho^\nu$ associée à T_ν par (12) converge vaguement vers 0 dans $\mathcal{K}'([r_o,r_1])$. D'autre part pour $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ on a :

$$\alpha(T_\nu)f = \int_{r_o}^{r_1} (\widehat{d\mu_r}\ *\ f)\ d\rho^\nu(r),$$

$$\beta(T_\nu)f = \int_{r_o}^{r_1} (d\mu_r\ *\ f)\ d\rho^\nu(r).$$

Donc pour g dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ on a :

$$\int (\alpha(T_\nu)f)\ .\ g\ dx = \int_{r_o}^{r_1} \left[\int (\widehat{d\mu_r}\ *\ f)\ .\ g\ dx\right] d\rho^\nu(r) \tag{29}$$

$$\int\ (\beta(T_\nu)f)\ .\ g\ dx = \int_{r_o}^{r_1} \left[\int\ (d\mu_r\ *\ f)\ .\ g\ dx\right] d\rho^\nu(r). \tag{30}$$

Supposons à présent que les applications $r \to \widehat{d\mu_r}\ *\ f$ et $r \to d\mu\ *\ f$ soient continues de $[r_o,r_1]$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, pour p vérifiant respectivement (8) et (9). Considérons $A = \{r \to \int\ (\widehat{d\mu_r}\ *\ f)\ .\ g\ dx; \|g\|_p = 1; p \text{ vérifiant } (8)\}$ et $B = \{r \to \int\ (d\mu_r\ *\ f)\ .\ g\ dx; \|g\|_p = 1; p \text{ vérifiant } (9)\}$. D'après le théorème d'Ascoli, A et B sont alors relativement compacts dans $\mathcal{K}([r_o,r_1])$. Le théorème de Banach-Steinhaus montre alors que les intégrales (29) et (30) convergent vers 0 quand $\nu \to \infty$, uniformément par rapport à g dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

vérifiant $\|g\|_p = 1$. On en déduit que, pour f dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\|\alpha(T_\nu)f\|_{p'}$ et $\|\beta(T_\nu)f\|_{p'}$ tendent vers 0 quand $\nu \to +\infty$, pour p satisfaisant (8) et (9). D'autre part, d'après le théorème de Mackey, la suite $\|d\ \rho^\nu\|$ est bornée; si bien que, d'après (16) (17) (18) (19), les suites $\alpha_{iy}(T_\nu)$ et $\beta_{iy}(T_\nu)$ sont respectivement bornées dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n))$ et $\mathcal{L}(L^1(\mathbf{R}^n), L^\infty(\mathbf{R}^n))$, et les suites $\alpha_z(T_\nu)$ et $\beta_z(T_\nu)$ sont respectivement bornées pour z vérifiant (15) dans $\mathcal{L}(L^1(\mathbf{R}^n),\ L^\infty(\mathbf{R}^n))$ et $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n))$. Par interpolation on en déduit que les suites $\alpha(T_\nu)$ et $\beta(T_\nu)$ sont bornées dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}^n), L^{p'}(\mathbf{R}^n))$ pour p vérifiant respectivement (8) et (9), et donc que, pour tout f dans $L^p(\mathbf{R}^n)$, $\alpha(T_\nu)f$ et $\beta(T_\nu)f$ convergent vers 0 dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$. L'étude de la continuité de α et β est donc ramenée à l'étude de la continuité des applications $r \to \widehat{d\mu_r} * f$ et $r \to d\mu_r * f$ à valeur dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$, où f appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; de plus, les remarques précédentes montrent qu'il suffit d'établir que : $\|\alpha_{iy}(d\mu_r - d\mu_r)f\|_2 \to 0$ si $r' \to r$ et $\|\beta_z(d\mu_{r'} - d\mu_r)f\|_2 \to 0$ si $r' \to r$ pour z vérifiant (15).

Tout d'abord par l'égalité de Plancherel on a :

$$\|\alpha_{iy}(d\mu_{r'} - d\mu_r)f\|_2 = |h(iy)|\ \|[(Q-r')_+^{iy} - (Q-r)_+^{iy}]\ \widehat{f}\|_2.$$

Or, pour presque tout x dans $\mathbf{R}^n$ on a :

$$(Q(x)-r')_+^{iy} - (Q(x)-r)_+^{iy} \to 0 \qquad r' \to r.$$

On conclut par le théorème de convergence dominée, ce qui achève la preuve du théorème 1-a. De même pour f dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ on a :

$$\|\beta_z(d\mu_{r'} - d\mu_r)f\|_2 = \|h(z)\ [\mathcal{F}(Q-r')_+^z - \mathcal{F}(Q-r)_+^z]\widehat{f}\|_2. \tag{31}$$

Les formules (22) à (27) montrent que si $0 \notin [r_o, r_1]$, alors pour tout x dans $\mathbf{R}^n$ (et z vérifiant (15)) :

$$h(z)\ [\mathcal{F}(Q-r')_+^z - \mathcal{F}(Q-r)_+^z](x) \to 0,\ r' \to r, \text{ pour } r \text{ et } r' \in [r_o, r_1] \tag{32}$$

et

$$\sup_{r\in[r_o,r_1]} \|h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z\|_\infty < +\infty.$$

Le théorème de convergence dominée montre que (31) tend vers 0 quand $r \to r'$ et le théorème 1-b est établi dans le cas où $0 \notin [r_o, r_1]$. Dans le cas où $r = 0$ on n'a plus (32) pour $Re\ z = -\frac{n}{2}$, car il reste un terme oscillant; nous écrivons alors différemment $h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z$. Si $r \neq 0$ on a :

$$h(z)\mathcal{F}(Q-r)_+^z = h(z)2^{\frac{n}{2}+z}\ \pi^{\frac{n}{2}-1}\ \Gamma(z+1)\ \frac{1}{i}.\{\ \} \tag{33}$$

où

$$\{\ \} = e^{-i(\frac{n-s}{2}+z)\pi}(Q-i\,0)^{-z-\frac{n}{2}}\ (|r|^{\frac{1}{2}}(Q-i\,0)^{\frac{1}{2}})^{\frac{n}{2}+z}$$
$$K_{\frac{n}{2}+z}\ [|r|^{\frac{1}{2}}(Q-i\,0)^{\frac{1}{2}}] - e^{i(\frac{n-s}{2}+z)\pi}(Q+i\,0)^{-z-\frac{n}{2}}(|r|^{\frac{1}{2}}$$
$$(Q-i\,0)^{\frac{1}{2}})^{\frac{n}{2}+z}\ K_{\frac{n}{2}+z}[|r|^{\frac{1}{2}}(Q+i\,0)^{\frac{1}{2}}].$$

Pour comparer (33) à (20) quand $r \to 0$ il faut étudier $u^\lambda K_\lambda(u)$ quand $u \to 0$. On rappelle le développement en série de $j_\lambda(z)$ et l'expression de $k_\lambda(z)$:

$$J_\lambda(z) = (\frac{z}{2})^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\frac{z}{2})^{2m}}{m!\,\Gamma(\lambda+m+1)},$$
$$K_\lambda(z) = \frac{\pi}{2\sin\pi\lambda}\ [e^{\frac{1}{2}\pi\lambda i}\ J_{-\lambda}(iz) - e^{-\frac{1}{2}\pi\lambda i}\ J_\lambda(iz)];$$

on obtient le développement de $z^\lambda\ K_\lambda(z)$:

$$z^\lambda K_\lambda(z) = \frac{\pi}{2\sin\pi\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} (\frac{iz}{2})^{2m}\Big(\frac{2^\lambda}{\Gamma(-\lambda+m+1)} - \frac{2^{-\lambda}z^{2\lambda}}{\Gamma(\lambda+m+1)}\Big).$$

On en déduit que pour $Re\ \lambda > -1$

$$u^\lambda\ K_\lambda(u) - \frac{1}{2}\ 2^\lambda\ \Gamma(\lambda) + \frac{\pi}{2\sin\pi\lambda}\ 2^{-\lambda}\ \frac{u^{2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} \to 0 \text{ si } u \to 0^+.$$

On applique ce résultat aux formules (33) et (20) et il vient que pour $Re\ z > -\frac{n}{2} - 1$ la quantité

$$h(z)\ [\mathcal{F}(Q-r)_+^z - \mathcal{F}(Q_+^z)] + \widetilde{h}(z)\ |r|^{z+\frac{n}{2}}$$

tend vers 0 pour tout x dans $\mathbf{R}^n$ quand $r \to 0$, $\widetilde{h}$ désignant la fonction

$$\widetilde{h}(z) = -h(z)\pi^{\frac{n}{2}}\ \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1+\frac{n}{2})}\ \frac{\sin\pi(\frac{n-s}{2}+z)}{\sin\pi(z+\frac{n}{2})}.$$

De plus, (20) et (33) montrent que la famille indexée par r des fonctions (34) est bornée dans $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ quand $r \to 0$ pour $Re\ z = -\frac{n}{2}$. Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\text{(35)} \qquad \Big\|\beta_{-\frac{n}{2}+iy}\ (d\mu_r - d\mu_o)f + \widetilde{h}(-\frac{n}{2}+iy)\ |r|^{iy}\ f\Big\|_2 \to 0 \text{ si } r \to 0.$$

De plus, comme $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ on a l'estimation suivante pour $Re\ z = 0$:

$$\sup_{r \to 0} \|\beta_{iy}(d\mu_r - d\mu_o)f + \widetilde{h}(iy)\ |r|^{\frac{n}{2}+iy}\ f\|_\infty < +\infty. \tag{36}$$

Par interpolation on en déduit que pour $z = -1$, $p = \frac{n}{n-1}$ et $n \geq 3$

$$\left\| \beta_{-1}(d\mu_r - d\mu_o)f + \widetilde{h}(-1)\ |r|^{\frac{n}{2}-1}\ f \right\|_{p'} \to 0,\ r \to 0;$$

donc

$$\|\beta_{-1}(d\mu_r - d\mu_o)f\|_{p'} \to 0,\ r \to 0; p = \frac{n}{n-1}\ ;\ n \geq 3.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1-b. Q.E.D.

Preuve du théorème 2. — Pour φ dans $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ et f dans $L^p(\mathbf{R}^n)$, p vérifiant (8), on a

$$\int \varphi\ .\ \widehat{f}\ d\mu_r = \int \widehat{\varphi}\ .\ (\check{f}\ *\ \widehat{d\mu_r})dx \tag{37}$$

où $\check{f}(x) = f(-x)$. D'après le théorème 1-a, l'application $r \to \check{f}\ *\ \widehat{d\mu_r}$ est continue de $[r_o, r_1]$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^n)$ si bien que les expressions (37) sont des fonctions continues de r. Si T est un élément de $F(r_o, r_1)$ s'écrivant selon (12) on peut ainsi définir la mesure $\widehat{f}\ .\ T$ en posant

$$< \widehat{f}\ .\ T,\ \varphi >= \int_{r_o}^{r_1} \left(\int \varphi\ .\ \widehat{f}\ d\mu_r \right) d\rho(r)$$

c'est-à-dire

$$\widehat{f}\ .\ T = \int_{r_o}^{r_1} (\widehat{f}\ .\ d\mu_r) d\rho(r) \tag{38}$$

cette intégrale convergeant vaguement. Montrons à présent que si T_ν converge vaguement vers T dans $F(r_o, r_1)$ et f_ν converge vers f dans $L^p(\mathbf{R}^n)$ quand $\nu \to \infty$, $\widehat{f_\nu}\ .\ T_\nu$ converge vaguement vers $\widehat{f}\ .\ T$. Pour φ dans $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ on pose

$$\theta_\nu(r) = \int \varphi\ .\ \widehat{f_\nu}\ d\mu_r.$$

On vient de voir que θ_ν appartient à $\mathcal{K}([r_o, r_1])$ et on a les estimations :

$$|\theta_\nu(\Omega)| \leq \|\varphi\|_\infty .\ \left\| 1_{supp\varphi} \right\|_{L^2(\{Q=r\}, d\mu_r)}\ .\ \left\| \widehat{f_\nu} \right\|_{L^2(\{Q=r\}, d\mu_r)},$$

$$\left\|\widehat{f_\nu}\right\|_{L^2(\{Q=r\},d\mu_r)} \leq \left\|f_\nu\right\|_p^{\frac{1}{2}} . \left\|f_\nu * \widehat{d\mu_r}\right\|_{p'}^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la preuve du théorème 1-a on a montré que la famille d'opérateurs $\widehat{d\mu_r}$ $*$, $r_o \leq r \leq r_1$ est bornée dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}^n),\ L^{p'}(\mathbf{R}^n))$. On a donc

(39) $$\sup_{\nu\in\mathbf{N}} \sup_{r\in[r_o,r_1]} \|\theta_\nu(r)\| \leq C \sup_{\nu\in\mathbf{N}} \|\varphi\|_\infty \|f_\nu\|_p < +\infty.$$

D'autre part, le théorème 1-a assure que l'application $r \to \widehat{d\mu_r} *$ est continue de $[r_o, r_1]$ dans $\mathcal{L}(L^p(\mathbf{R}^n),\ L^{p'}(\mathbf{R}^n))$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les précompacts de $L^p(\mathbf{R}^n)$; on en déduit que la suite θ_ν est équicontinue dans $\mathcal{K}([r_o,r_1[)$ et donc par le théorème d'Ascoli qu'elle forme un précompact de $\mathcal{K}([r_o,r_1])$. La suite θ_ν converge donc uniformément dans $\mathcal{K}([r_o,r_1])$ vers l'application θ définie par

(40) $$\theta(r) = \int \varphi\ .\ \widehat{f}\ d\mu_r.$$

Sachant que

$$< \widehat{f_\nu}\ .\ T_\nu,\ \varphi >= \int_{r_o}^{r_1} \theta_\nu(r)\ d\rho^\nu(r)$$

où $d\rho^\nu$ est la suite vaguement convergente dans $\mathcal{K}'([r_o,r_1])$ associée à T_ν par (12) on en déduit que

$$< \widehat{f_\nu}\ .\ T_\nu,\ \varphi > \to < \widehat{f}\ .\ T,\ \varphi >,\ \nu \to +\infty.$$

Ceci achève la preuve du théorème 2. Q.E.D.

§ II. Convergence de la solution de l'équation de Klein-Gordon quand $m \to m_o$

On désigne respectivement par $E_m^+ *$ et $E_m^- *$ les opérateurs de convolution dont le noyau est la solution élémentaire dans le cône avenir, respectivement passé, de l'équation de Klein-Gordon de masse $m > 0$, ou, pour $m = 0$, de l'équation des ondes. Le noyau $E_m^\pm$ de ces opérateurs s'exprime en fonction de la forme quadratique de Lorentz :

(41) $$Q(t,x) = t^2 - |x|^2, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

(42)
$$E_m^\pm = 2^{-\frac{n+1}{2}}\ \pi^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}\ m^{n-1}(1 \pm sgnt)\ P.f.\left[(mQ_+^{\frac{1}{2}})^{1-\frac{n+1}{2}}\ J_{1-\frac{n+1}{2}}(mQ_+^{\frac{1}{2}})\right]$$

où $P.f.$ désigne la partie finie de Hadamard et $sgnt$ le signe de t. STRICHARTZ [12] a établi que $E_m^{\pm} *$ opère de $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ pour p convenable, p' conjugué de p. Nous énonçons tout d'abord le résultat de continuité par rapport à m de ces opérateurs.

PROPOSITION 1.— *Soit f dans $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$.*

1) Si m_o est un réel strictement positif et si m tend ves m_o en restant distinct de 0, $E_m^{\pm} * f$ tend vers $E_{m_o}^{\pm} * f$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et p vérifiant

$$\begin{cases} 2\ \frac{n+1}{n+3} \leq p \leq 2\ \frac{n+2}{n+4} & \textit{et } n \geq 2 \\ 1 < p \leq 6/5 & \textit{et } n = 1 \end{cases} \tag{43}$$

2) Si m tend vers 0, $E_m^{\pm} * f$ tend vers $E_o^{\pm} * f$ dans $L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et p vérifiant

$$p = 2\ \frac{n+1}{n+3} \quad \textit{et } n \geq 2. \tag{44}$$

On en déduit la continuité par rapport à m de la solution u^m du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{gathered} u_{tt}^m - \Delta_x\, u^m + m^2 u^m = f(t,x),\ 0 \leq m,\ x \in \mathbf{R}^n \\ u^m(0,x) = u_o(x),\ u_t^m(0,x) = u_1(x). \end{gathered} \tag{45}$$

THÉORÈME 3.— *Soit u^m la solution de (45). Alors u^m converge vers u^{m_o} quand m tend vers m_o, dans $L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$, p' conjugué de p sous les conditions suivantes :*

1) Si m_o est non nul et si m reste non nul alors p et n vérifient (43) et les données de Cauchy satisfont

$$u_o \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n),\ u_1 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n),\ f \in L^p(\mathbf{R}^{n+1}); \tag{46}$$

2) Si m_o est nul alors p et n vérifient (44) et les données de Cauchy satisfont

$$u_o \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^n),\ |\xi|^{-\frac{1}{2}}\ \widehat{u}_1(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^n),\ f \in L^p(\mathbf{R}^{n+1}). \tag{47}$$

On établit un résultat analogue pour la solution de l'équation non linéaire de Klein-Gordon à petites données

$$(48) \qquad \begin{cases} u_{tt}^m - \Delta_x u^m + m^2 u^m = q(t,x)\,|u^m|^2\, u^m, \ 0 \le m, \ x \in \mathbf{R}^3; \\ u^m(0,x) = u_o(x), \ u_t^m(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

THÉORÈME 4.— *Soit q dans $L^\infty(\mathbf{R}^4)$. Il existe $\rho > 0$ tel que la solution u^m de (48) tend vers u^{m_o} si $m \to m_o$, dans $L^4(\mathbf{R}^4)$ sous les conditions suivantes :*

1) m_o est non nul et m reste non nul et les données de Cauchy vérifient :

$$(49) \qquad \|u_o\|_{H^{\frac12}(\mathbf{R}^3)} + \|u_1\|_{H^{-\frac12}(\mathbf{R}^3)} \le \rho;$$

2) $m_o = 0$ et les données de Cauchy vérifient :

$$(50) \qquad \|u_o\|_{H^{\frac12}(\mathbf{R}^3)} + \left\||\xi|^{-\frac12}\, \hat{u}_1(\xi)\right\|_2 \le \rho.$$

Preuve de la proposition 1. — Considérons comme dans [12] la famille analytique d'opérateurs définie par :

$$T_{m^\pm}^z f = h(z) \lim_{\sigma \to 0^\pm} \mathcal{F}^{-1}[(Q + \sigma^2 + m^2 - 2i\sigma\tau)^z\ \hat{f}(\tau,\xi)]$$

où $Q(\tau,\xi)$ est la forme quadratique de Lorentz

$$(51) \qquad Q(\tau,\xi) = -\tau^2 + |\xi|^2, \ \xi \in \mathbf{R}^n, \ \tau \in \mathbf{R},$$

et $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée de Fourier réciproque; $h(z)$ est une fonction holomorphe telle que $T_{m^\pm}^z$ soit une famille analytique de croissance admissible et pour $z = -1$:

$$T_{m^\pm}^{-1} = E_m^\pm\ * .$$

Pour $Re\ z = 0$ le théorème de convergence dominée montre que $T_{m^\pm}^{iy}$ tend simplement vers $T_{m_o^\pm}^{iy}$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^{n+1}))$ quand $m \to m_o$. D'autre part, $T_{m^\pm}^z$ est un opérateur de convolution donné par :

$$T_{m^\pm}^z = (1 \pm sgnt) 2^{\frac{n+1}{2} - z}\, \pi^{1-\frac{n}{2}} h(z) m^{2z+n+1}\ \frac{J_{-\frac{n+1}{2}-z}(mQ_-^{\frac12})}{(mQ_-^{\frac12})^{z+\frac{n+1}{2}}}\ * .$$

On en déduit que la famille $T^z_{m\pm}$ reste bornée dans $\mathcal{L}(L^1(\mathbf{R}^{n+1}), L^\infty(\mathbf{R}^{n+1}))$ quand $m \to m_o$ pour $-\frac{n}{2} - 1 \leq Re\ z \leq -\frac{n+1}{2}$ et $n \geq 2$ ou $-\frac{3}{2} \leq Re\ z < -1$ et $n = 1$ dans le cas où m et m_o sont non nuls, et pour $Re\ z = -\frac{n+1}{2}$ et $n \geq 2$ si m_o est nul. Le résultat suit par interpolation. Q.E.D.

Preuve du théorème 3. — Soit $[\mu, M]$ l'intervalle réel que décrit la masse m. D'après [12] la famille, indexée par $m \in [\mu, M]$, d'applications linéaires à valeurs dans $L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$, qui, à (u_o, u_1, f) associent u^m, est bornée. Il suffit donc de considérer le cas où $\widehat{u}_o$ et $\widehat{u}_1$ sont C^∞ à support inclus dans un compact K de $\mathbf{R}^n$ disjoint de l'origine. Il existe alors une fonction $\chi(\tau, \xi)$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{n+1})$ égale à 1 sur l'ensemble $\{(\tau, \xi)/\xi \in K$ et $\mu^2 \leq \tau^2 - |\xi|^2 \leq M^2\}$ et de support disjoint de l'origine; pour $\mu \leq m \leq M$, u^m s'écrit :

$$u^m = \mathcal{F}^-\left(\frac{1}{2}(\sqrt{m^2 + |\xi|^2}\ \widehat{u}_o(\xi) + i\ sgn(\tau)\widehat{u}_1(\xi))\chi(\tau, \xi)\right) * \mathcal{F}^{-1}(d\mu_{m^2}) +$$

(52)
$$+ E^+_m * \left(\frac{1 - sgn(t)}{2}\right) f + E^-_m * \left(\frac{1 - sgn(t)}{2}\right) f$$

où $d\mu_{m^2}$ est la mesure (3) associée à la forme de Lorentz (51) et portée par la nappe $-\tau^2 + |\xi|^2 + m^2 = 0$. On remarque que grâce aux hypothèses sur u_o et u_1, $\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{2}\ (\sqrt{m^2 + |\xi|^2}\widehat{u}_o(\xi) + i\ sgn(\tau)\widehat{u}_1(\xi))\chi(\tau, \xi))$ converge dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$ donc dans $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$ quand $m \to m_o$. En appliquant le théorème 1-a et la proposition 1 on en déduit que u^m converge dans $L^{p'}(\mathbf{R}^{n+1})$ vers u^{m_o} si $m \to m_o$. Q.E.D.

Preuve du théorème 4. — On note T_m l'opérateur défini par :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)\ T_m f = E^+_m * \left(\frac{1 + sgn(t)}{2}\right) f + E^-_m * \left(\frac{1 - sgn(t)}{2}\right) f.$$

D'après la proposition 1, T_m est bornée dans $\mathcal{L}(L^{4/3}(\mathbf{R}^4), L^4(\mathbf{R}^4))$ quand m tend vers m_o et tend simplement dans cet espace vers T_{m_o}. A présent remarquons que pour résoudre (48) il suffit de résoudre l'équation

(53)
$$u^m = u^m_o + T_m(q|u^m|^2\ u^m),$$

où u^m_o désigne la solution de l'équation linéaire de Klein-Gordon, de masse m, de données initiales u_o, u_1. Or, l'application $u \to u^m_o + T_m(q|u|^2 u)$ est clairement contractante sur un voisinage de l'origine de $L^4(\mathbf{R}^4)$, indépendant de m au voisinage de m_o; on en déduit que si $\|u^m_o\|_4$ est assez petit, (53) admet une solution unique dans $L^4(\mathbf{R}^4)$; pour cela, il suffit que les conditions du théorème 4 soient vérifiées.

A présent, évaluons $\|u^m - u^{m_o}\|_4$:

$$\|u^m - u^{m_o}\|_4 \leq \|u_o^m - u_o^{m_o}\|_4 + \|T_m(q(|u^m|^2\ u^m - |u^{m_o}|^2\ u^{m_o})\|_4 + \\ + \|(T_m - T_{m_o})(q|u^{m_o}|^2\ u^{m_o})\|_4;$$

d'où

$$\|u^m - u^{m_o}\|_4 \leq \|u_o^m - u_o^{m_o}\|_4 + C\|u^m - u^{m_o}\|_4\ (\|u^m\|_4^2 + \|u^{m_o}\|_4^2) + \\ + \|(T_m - T_{m_o})(q|u^{m_o}|^2\ u^{m_o})\|_4.$$

Or l'équation (53) est résolue dans la boule $\{u \in L^4(\mathbf{R}^4) |\ \|u\|_4 \leq 2\|u_o^m\|_4\}$ si bien que

$$C(\|u^m\|_4^2 + \|u^{m_o}\|_4^2) \leq C\ 4(\|u_o^m\|_4^2 + \|u_o^{m_o}\|_4^2).$$

Il suffit alors de choisir $\rho > 0$ assez petit pour que cette quantité reste inférieure à un nombre strictement inférieur à 1 quand m tend vers m_o ; on obtient alors

$$\|u^m - u^{m_o}\|_4 \leq C'(|u_o^m - u_o^{m_o}\|_4 + \|(T_m - T_{m_o})(q|u^{m_o}|^2\ u^{m_o})\|_4$$

on conclut en appliquant le théorème 3 et la proposition 1. Q.E.D.

§ III. Problème inverse de diffusion non linéaire

Soit l'équation non linéaire de Klein-Gordon

$$u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = q(x)\ |u|^2 u; \quad x \in \mathbf{R}^3. \tag{54}$$

Dans le cas où q appartient à $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ l'existence de l'opérateur de diffusion S est établie dans [9] pour des solutions u_- de l'équation libre de Klein-Gordon de petite énergie; plus précisément il existe $\rho > 0$ tel que pour toute solution u_- de l'équation

$$u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = 0; \quad x \in \mathbf{R}^3 \tag{55}$$

vérifiant

$$\|u_-\|_e \leq \rho$$

où

$$\|u_-\|_e^2 = \frac{1}{2}\int (|\nabla u_-|^2 + m^2|u_-|^2 + |u_{-t}|^2)dx$$

il existe une solution u de (54) et une solution u_+ de (55) vérifiant

$$\|u(t) - u_\pm(t)\|_e \to 0,\ t \to \pm\infty. \tag{56}$$

L'opérateur de diffusion S est alors défini par $Su_- = u_+$. Dans le cas où q est une constante négative, S est défini pour toute solution libre d'énergie finie [2]. Le problème inverse de diffusion consiste à déterminer q à partir de S. Le cas où q est une constante est traité par MORAWETZ et STRAUSS [5] (voir aussi [4][11][12]). Dans le cas analogue de l'équation de Schroedinger $u_t + i\Delta u = iq(x)|u|^2u$, ces auteurs montrent en utilisant l'invariance par changement d'échelle de l'équation linéaire que, pour toute solution libre φ, S détermine

$$\iint q(x_o + \frac{x}{\lambda})\ |\varphi(t,x)|^4 dt.dx.$$

On en déduit la valeur de $q(x_o)$ en faisant tendre λ vers l'infini. Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, la difficulté vient du fait que l'équation (55) n'est pas invariante par dilatation. Néanmoins reprenant la technique de Morawetz et Strauss, nous montrons que S détermine

$$\iint q(x_o + \frac{x}{\lambda})\ |\varphi_\lambda(t,x)|^4 dt.dx$$

où φ_λ est solution de l'équation :

$$\partial_t^2\varphi_\lambda - \Delta_x\varphi_\lambda + \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\varphi_\lambda = 0.$$

Le point crucial est alors la convergence de φ_λ dans $L^4(R^4)$ quand λ tend vers l'infini qui est assurée par le théorème 3.

THÉORÈME 5.— *Soit q un élément de $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$. Alors l'opérateur S associé à l'équation (54) détermine le potentiel d'interaction q.*

En fait, la connaissance de S pour des solution u_- de (55) à données initiales très régulières et petites, suffit pour calculer explicitement q. On obtient un résultat analogue dans le cas d'une perturbation analytique impaire. Considérons donc une suite q_{2k+1} d'éléments de $W^{2,\infty}(\mathbf{R}^3)$; on lui associe une équation non linéaire de Klein-Gordon :

$$u_{tt} - \Delta_x u + m^2 u = \sum_{k\geq 1} q_{2k+1}\ |u|^{2k}u, \quad x \in \mathbf{R}^3. \tag{57}$$

On définit un espace fonctionnel $\Sigma = \{u \in S'(\mathbf{R}^4);\ \|u\|_\Sigma < +\infty\}$ où $\|\ \|_\Sigma$ est donnée par :

$$\forall u \in S(\mathbf{R}^4)\ \|u\|_\Sigma^2 = \sup_{t\in\mathbf{R}} (1+|t|)^3 \|u(t)\|_\infty^2 + \sup_{t\in\mathbf{R}} (\|(m^2+|\xi|^2)\widehat{u}(t)\|_2^2 + \\ + \|(m^2+|\xi|^2)^{1/2}\ \widehat{u}_t(t)\|_2^2).$$

On montre alors (voir [7] et aussi [6]) que si la suite q_{2k+1} est bornée dans $W^{2,\infty}(\mathbf{R}^3)$, il existe $\rho > 0$ tel que si u_- est une solution de (55) vérifiant $\|u_-\|_\Sigma \le \rho$, il existe une solution u de (57) et une solution u_+ de (55) telles que (56) soit satisfait.

THÉORÈME 6.— *Soit q_{2k+1} une suite bornée dans $W^{2,\infty}(\mathbf{R})$. Alors l'opérateur de diffusion S associé à l'équation non linéaire de Klein-Gordon (57) détermine la suite q_{2k+1}.*

Preuve du théorème 6. — Si u_- et v_- sont deux solutions de (55) de norme $\|\ \|_\Sigma$ assez petite et si u et v sont les solutions de (57) dans Σ associées à u_- et v_- et vérifiant (56), on démontre comme dans [4] que :

(58)
$$W(Su_-, Sv_-) - W(u_-, v_-) = \iint \sum_{k\ge 1} q_{2k+1}(x)\ u.\overline{v}(|u|^{2k} - |v|^{2k})dx\ dt,$$

où W est le wronskien donné par :

$$W(u,v) = \int (u\ \overline{v}_t - u_t\ \overline{v})dx.$$

Soit φ une solution de (55) dans Σ et posons pour $\epsilon > 0$ assez petit, $u_- = 2\epsilon\varphi$, $v_- = \epsilon\varphi$.

LEMME 2.— *Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a*

$$W(S(2\epsilon\varphi),\ S(\epsilon\varphi)) - 2\epsilon^2 W(\varphi,\varphi) = \sum_{n\ge 4} \epsilon^n Q_n$$

où

$$Q_n = (2^{n-1} - 2) \iint q_{n-1}(x)\ |\varphi(t,x)|^n\ dx\ dt + Q'_n$$

où Q'_n ne dépend que de φ, $q_{n-2}, q_{n-3}, \dots, q_1, q_o$; on a posé : $q_1 = 0$, $q_{2k} = 0$, $k \ge 0$.

Preuve du lemme 2. — Les solutions u et v de (57) associées à $2\epsilon\varphi$ et $\epsilon\varphi$ vérifient :

$$(59)\quad \begin{cases} u(t) = 2\epsilon\varphi(t) & + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) \ * \ \sum_{k\geq 1} q_{2k+1} \ |u(s)|^{2k} \ u(s) \ ds \\ v(t) = \epsilon\varphi(t) & + \int_{-\infty}^{t} R(t-s) \ * \ \sum_{k\geq 1} q_{2k+1} \ |v(s)|^{2k} \ v(s) \ ds \end{cases}$$

où $R(.)$ est la fonction de Riemann de (55). On résoud (59) par la méthode de Picard dans Σ pour ϵ assez petit. En remarquant que Σ est une algèbre, on voit que si f_ϵ est une fonction analytique de ϵ pour $|\epsilon| < \rho$, à valeur dans Σ, nulle pour $\epsilon = 0$, alors la fonction

$$(60)\qquad \mathcal{R} f_\epsilon = \int_{-\infty}^{t} R(t-s) \ * \ \sum_{k\geq 1} q_{2k+1} \ |f_\epsilon(s)|^{2k} \ f_\epsilon(s) \ ds$$

est analytique en ϵ, à valeur dans Σ, pourvu que $\rho = 0$ soit assez petit ; les itérés de Picard, résolvant (59), sont donc analytiques en ϵ et convergent uniformément par rapport à ϵ assez petit, si bien que u et v sont analytiques en ϵ à valeur dans Σ. En remplaçant u et v dans (58) par leurs développements en série autour de $\epsilon = 0$, on en déduit que $W(S(2\epsilon\varphi), S(\epsilon\varphi)) - 2\epsilon^2 W(\varphi, \varphi)$ admet un développement en série de la forme $\sum_n \ \epsilon^n \ Q_n$. A présent, on remarque que le terme en ϵ^n dans (58) provient des termes :

$$\iint q_{2k+1} \ u \ \overline{v}(|u|^{2k} - |v|^{2k}) dx \ dt, \ 2k+2 \leq n.$$

Sachant que u et v s'écrivent :

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \ \mathcal{R}^m(2\epsilon\varphi)$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \ \mathcal{R}^m(\epsilon\varphi)$$

où $\mathcal{R}$ est défini par (60), on voit que le terme en ϵ^n s'écrit :

$$\epsilon^n Q^n = \iint q_{n-1}(2\epsilon\varphi)(\epsilon\varphi)(|2\epsilon\varphi|)^{n-2} - |\epsilon\varphi|^{n-2}) dx \ dt \ +$$

$$+ \ \epsilon^n \ Q'_n(\varphi, \ q_o, \ q_1, \ldots, \ q_{n-2})$$

avec la convention $q_1 = 0$, $q_{2k} = 0$, $k \geq 0$. Q.E.D.

Connaissant S et sachant que $Q_o = Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$, les Q_n sont déterminés de proche en proche, par la formule :

$$Q_n = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-n} \left[W(S(2\epsilon), S(\epsilon\varphi)) - 2\epsilon^2 W(\varphi, \varphi) - \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k Q_k \right].$$

Soient à présent x_o dans $\mathbf{R}^3$, $\lambda > 0$ et g dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ tel que $\widehat{g}$ appartienne à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^3 - \{0\})$. On note φ_λ la solution de (55) de données initiales $\varphi_\lambda(0,x) = 0$, $\varphi_{\lambda_t}(0,x) = \lambda g(\lambda(x - x_o))$. S détermine $Q_n(\lambda)$ donné par :

$$Q_n(\lambda) = (2^{n-1} - 2) \iint q_{n-1}(x)\ |\varphi_\lambda(t,x)|^n\ dx\ dt + Q_n'(\varphi_\lambda,\ q_o, \ldots,\ q_{n-2}).$$

Par le changement de variable $x' = \lambda(x - x_o)$, $t' = \lambda t$ et $u_\lambda(t', x') = \varphi_\lambda(t, x)$; on voit que S détermine

$$(2^{n-1} - 2)\lambda^{-4} \iint q_{n-1}\ \left(x_o + \frac{x'}{\lambda}\right)\ |u_\lambda(t', x')|^n\ dt'\ dx' + Q_n'(\varphi_\lambda, q_o, \ldots, q_{n-2}).$$

Supposant connus $q_o, \ldots, q_{n-2}$, on peut donc calculer, connaissant S, les quantités :

$$\text{(61)} \qquad \iint q_{n-1}\ \left(x_o + \frac{x'}{\lambda}\right)\ |u_\lambda(t', x')|^n\ dt'\ dx',\ q \geq 4.$$

On remarque que u_λ est solution de :

$$\begin{cases} u_{\lambda_{t't'}} - \Delta_{x'}\ u_\lambda + \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\ u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0, x') = 0,\ u_{\lambda_{t'}}(0, x') = g(x'). \end{cases}$$

D'après le théorème 3, u_λ converge quand $\lambda \to +\infty$, dans $L^4(\mathbf{R}^4)$ vers u^∞ solution de :

$$\begin{cases} u_{\infty_{t't'}} - \Delta_{x'} u_\infty = 0 \\ u_\infty(0, x') = 0,\ u_{\infty_{t'}}(0, x') = g(x'). \end{cases}$$

Pour passer à la limite dans (61) et obtenir ainsi $q_{n-1}(x_o)$ il suffit donc de montrer que :

$$\text{(62)} \qquad \sup_{\lambda \to +\infty}\ \|u_\lambda\|_\infty < +\infty.$$

Pour cela on utilise l'inégalité de Sobolev

$$\|u_\lambda(t)\|_\infty \leq C \|\nabla u_\lambda(t)\|_4^{3/4}\ \|u_\lambda(t)\|_4^{1/4}.$$

Par la conservation de l'énergie, on a

$$\|u_\lambda(t)\|_2 \leq \left\|\left(\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 + |\xi|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \widehat{g}\right\|_2 \leq \|\, |\xi|^{-1}\, \widehat{g}\|_2,$$

$$\|\nabla u_\lambda(t)\|_2 \leq \|g\|_2.$$

De plus, par l'inégalité de Hölder et une injection de Sobolev, on a :

$$\|u_\lambda(t)\|_4 \leq \|u_\lambda(t)\|_6^{\frac{1}{2}}\ \|u_\lambda(t)\|_2^{\frac{1}{2}} \leq C\|\nabla u_\lambda(t)\|_2^{\frac{1}{2}}\ \|u_\lambda(t)\|_2^{\frac{1}{2}}$$

on obtient alors :

$$\|u_\lambda(t)\|_4 \leq C\|g\|_2^{\frac{1}{2}}\ \|\, |\xi|^{-1}\, \widehat{g}\|_2^{\frac{1}{2}}$$

et de même

$$\|\nabla u_\lambda(t)\|_4 \leq C\|\, |\xi|\widehat{g}\|_2^{\frac{1}{2}}\ \|g\|_2^{\frac{1}{2}}$$

on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \forall \lambda > 0\ \|u_\lambda(t)\|_\infty \leq C\|g\|_2^{\frac{1}{2}}\ \|\, |\xi|\ \widehat{g}\|_2^{\frac{3}{8}}\|\, |\xi|^{-1}\ \widehat{g}\|_2^{\frac{1}{8}}$$

cela prouve (62) et achève la preuve du théorème 6.

Remarque. — Dans le procédé itératif qui permet la détermination de la suite q_{2k+1}, on a, en particulier, la formule suivante qui donne q_3 et qui est naturellement valable sous les hypothèses du théorème 5 :

(63)

$$q_3(x_o) = \left[\int |u_\infty|^4 dt\ dx\right]^{-1} \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^4\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{6}\ [W(S(2\epsilon\varphi_\lambda), S(\epsilon\varphi_\lambda)) - 2\epsilon^2 W(\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)].$$

Appendice

Il est possible d'étendre les résultats de la première partie au cas où $r_o = -\infty$, si Q est la forme de Lorentz

(64) $$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2.$$

Dans ce cas $F(r_o, r_1)$ coïncide avec l'ensemble des mesures Lorentz-invariantes dont le support est inclus dans $\{r_o \leq Q \leq r_1\}$, et ne chargeant par l'origine (voir METHEE [3] pour l'étude systématique des distributions Lorentz-invariantes et aussi [6] dans le cas des mesures). Il faut de plus se restreindre à un sous-espace de $F(-\infty, r_1)$ en ajoutant une condition de décroissance de la mesure dans la direction d'hyperbolicité, qui exprime que la mesure T s'écrit, de façon analogue à (12) sous la forme :

$$T = \int_{-\infty}^{r_1} d\mu_r \; d\rho(r) \tag{65}$$

où $d\rho$ est une mesure bornée sur $[-\infty, r_1]$. Cette condition sur $d\rho$ permet d'étendre aisément les preuves des théorèmes 1-a, 1-b et 2. Pour caractériser ces mesures, à tout ouvert relativement compact Ω de $\mathbf{R}^{n-1}$ on associe l'espace E_Ω défini par :

$$E_\Omega = \{f \in C^o(\mathbf{R}^n) | supp f \subset \Omega \times \mathbf{R}_{x_n}, (1 + |x_n|)^{-1} f \in C_o^o(\mathbf{R}^n)\}$$

où $C_o^o(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}^n$, nulles à l'infini. E_Ω est un espace de Banach, admettant $\mathcal{K}(\Omega \times \mathbf{R}_{x_n})$ comme sous-espace dense, pour la norme $\| \ \|_\Omega$

$$\|f\|_\Omega = \|(1 + |x_n|)^{-1} f\|_\infty.$$

On choisit une suite croissante Ω_k d'ouverts relativement compacts, recouvrant $\mathbf{R}^{n-1}$ et on pose

$$E = \bigcup_{k \geq 1} E_{\Omega_k}.$$

On voit facilement que $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans E muni de la topologie limite inductive stricte de E_{Ω_k}, si bien que le dual topologique E' de E est un espace de mesures. Pour $r_1 \leq 0$ on note $F(r_1)$ le sous-espace de E' des mesures Lorentz-invariantes, de support dans $\{x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2 \leq r\}$ et ne chargeant par l'origine. On montre que $F(r_1)$ coïncide avec l'espace des mesures vérifiant (65) (et $\|d\rho\| < \infty$) et que l'application $T \to d\rho$ est un isomorphisme topologique de $F(r_1)$ muni de la topologie faible de E' sur l'espace des mesures bornées sur $[-\infty, r_1]$ muni de la topologie duale faible. On obtient alors le résultat suivant :

THÉORÈME 7.— *Dans le cas où Q est la forme de Lorentz (61), les énoncés des théorèmes 1-a, 1-b et 2, demeurent valables, si on remplace $F(r_o, r_1)$ par $F(r_1)$, et r_o par $-\infty$.*

Références

[1] BACHELOT (A.).— Problème inverse de diffusion non linéaire, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **293**, série A, 1981, p. 121-124.

[2] GINIBRE (J.) et VELO (G.).— Time decay of finite energy solutions of the non-linear Klein-Gordon and Schrödinger equations, *Ann. IHP. (Physique Théorique)*, t. **43, n°4**, 1985, p. 399-442.

[3] METHEE (P.D.).— Sur les distributions invariantes dans le groupe de rotations de Lorentz, *Commentarii math. Helvetici*, t. **28**, 1954, p. 1-49.

[4] MORAWETZ (C.).— *Notes on time decay and scattering for some hyperbolic problems.* — Regional Conference Series in Applied Math. Philadelphia 1975.

[5] MORAWETZ (C.) et STRAUSS (W.A.).— On a nonlinear scattering operator, *Comm. Pure Appl.*, t. **XXVI**, 1973, p. 47-54.

[6] REED (M.) et SIMON (B.).— Method of modern mathematical physics, *Academic Press*, t. **II-III**, 1973, p. .

[7] SEGAL (I.).— Dispertion for nonlinear relativistic equations II, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.*, t. **4, I**, 1968, p. 459-497.

[8] STEIN (E.).— Interpolation of linear operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **83**, 1956, p. 482-492.

[9] STRAUSS (W.A.).— Nonlinear scattering at low energy, *J. Func. Anal.*, t. **41**, 1981, p. 110-133.

[10] STRAUSS (W.A.).— Nonlinear invariant wave equations in invariant wave equations, *Spriger Lectures Notes in Physics*, t. **73**, 1978, p. 197-249.

[11] STRAUSS (W.A.).— *Nonlinear scattering theory in Scattering theory in mathematical physics.* — (J. Lavita, J.P. Marchand, eds.), Reidel, Dordrecht, Holland. 1974.

[12] STRICHARTZ (R.S.).— Fourier transform and non compact rotation group, *Indiana Univ. Math. J.*, t. **24**, 1974, p. 499-527.

[13] STRICHARTZ (R.S.).— Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Math. J.*, t. **44**, 1977, p. 705-714.