ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PHILIPPE REVOY

Une classe d'équations cubiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 3-4 (1985), p. 179-184
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_3-4_179_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 179 à 184

UNE CLASSE D'EQUATIONS CUBIQUES

Philippe Revoy *(1)*

(1) Institut de Mathématiques, Université de Montpellier II - 34060 Montpellier Cédex.

Résumé : Dans cette note, je montre par descente que certaines courbes elliptiques d'équation $X^3 + Y^3 + cZ^3 = d\ XYZ$ n'ont pas de points rationnels non triviaux. Un certain nombre d'équations sont connues quand d n'est pas divisible par 3 ; ici la même technique est appliquée au cas où d est multiple de 3.

Summary : In this note, I show by a descent argument that some elliptic curves $X^3 + Y^3 + cZ^3 = d\ XYZ$ have no non trivial rational points. Some cases were known with d prime to 3 ; here, the same technique is applied when 3 divides d.

Le but de cette note est de montrer que certaines équations :
(1) $X^3 + Y^3 + cZ^3 - dXYZ = 0$, c, d, entiers, n'ont qu'un nombre fini de solutions - en général celles-ci vérifient $XYZ = 0$. Ces courbes furent d'abord étudiées par A. Hurwitz ([3]) qui montra que l'équation $aX^3 + bY^3 + cZ^3 - dXYZ = 0$ a en général une infinité de solutions si elle en possède une. Ces résultats furent complétés par L.J. Mordell ([5] , [6]).

Seuls des cas particuliers avec $a = b$ ont été complètement résolus, à savoir ceux où $a = b = 1$ et $(c,d) = (5,5)$, $(1,1)$, $(1,2)$ ([1] , [8] , [9] , [4]). L.J. Mordell indique ([6] p. 131) la méthode générale pour étudier (1), en particulier dans le cas $d \not\equiv 0\ (3)$, et cela donne les cas cités plus haut.

Dans la première partie, nous montrons comment cette méthode dans le cas $d \equiv 0(3)$ permet de résoudre complètement certaines de ces équations, les deux exemples les plus clairs étant (c ; d) = (2,9) et (4,6). Dans la seconde partie, on indique comment un problème diophantien se ramène à une équation de type (1). L'auteur remercie J.W.S. Cassels pour l'attention qu'il a bien voulu porter à un manuscrit antérieur de l'auteur sur ce sujet.

I. - Considérons l'équation :

$$x^3 + y^3 + cz^3 = 3d_1xyz \tag{2}$$

Elle représente une courbe elliptique (C) dont le point $\underline{0}$ (1, −1, 0) est un point d'inflexion. Dans les deux cas particuliers suivants $(c,d_1) = (2,3)$ et $(c,d_1) = (4,2)$, on peut montrer que (C) n'a que deux points rationnels ; ces résultats sont des cas particuliers du résultat plus général suivant :

THEOREME 1. *Soit* δ *un entier impair,* p *un nombre premier impair congru à* 2 *modulo* 3 *et* a *et* b *deux entiers positifs non divisables par* 3 *tels que :* $27\delta^3 = 2^a \pm p^b$. *Alors les équations* (2)

$$x^3 + y^3 + 2^a z^3 = 9\delta xyz$$

$$x^3 + y^3 + (27\delta^3 - 2^a)z^3 = 9\delta xyz$$

n'ont que des solutions triviales dans $A = Z[\rho]$.

On travaille dans $A = Z[\rho]$ où $\rho^2 + \rho + 1 = 0$: c'est un anneau principal - euclidien pour la norme - anneau des entiers de $Q((-3)^{1/2})$. Dans A, 3 est le seul nombre premier ramifié ; un nombre premier p congru à 1 modulo 3 se décompose dans A. Si $p \equiv 2(3)$, p reste premier dans A. On considère un point de (C) à coordonnées dans A^3 et on effectue la transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho^2 x + \rho y + d_1 z \\ y_1 &= \rho x + \rho^2 y + d_1 z \\ z_1 &= x + y + d_1 z \end{aligned} \qquad \text{d'inverse} \qquad \begin{aligned} 3x &= \rho x_1 + \rho^2 y_1 + z_1 \\ 3y &= \rho^2 x_1 + \rho y_1 + z_1 \\ 3d_1 z &= x_1 + y_1 + z_1 \end{aligned}$$

d'oỳ le système : $x_1y_1z_1 = (d_1^3 - c)z^3$, $x_1 + y_1 + z_1 = 3d_1z$.

Pour en tirer une équation (2), on doit supposer que $d_1^3 - c$ n'a qu'un seul facteur premier dans A. On suppose donc que $|d_1^3 - c| = \pi^a$ où $\pi \in$ IN est congru à 2 modulo 3. On suppose que $a \not\equiv 0(3)$ (c ne serait pas primaire) et on déduit de cela que $x_1 = \rho_1 x_2^3$, $y_1 = \rho_2 \pi^{u} y_2^{3}$, $z_1 = \rho_3 \pi^{u} z_2^{3}$ ou bien $x_1 = \rho_1 \pi^a x_2^3$, $y_1 = \rho_2 y_2^3$, $z_1 = \rho_3 z_2^3$ avec $\rho_1\rho_2\rho_3 = 1$, ρ_i racine cubique de l'unité. Une congruence modulo 2 ou modulo $(-3)^{3/2}$ suivant que $d_1^3 - c$ est pair ou non montre que les ρ_i sont égales. On est alors obligé de supposer que $d_1 \equiv 0(3)$, $d_1 = 3\delta$. Dans les deux cas on obtient une équation de type (2) :

$$x_2^3 + y_2^3 + (d_1^3 - c)z_2^3 = 3d_1x_2y_2z_2$$

Si $(c,d_1) = (4,2)$, la descente s'arrête car $2^3 - 4 = 4 = C$. Dans le cas général, on effectue à nouveau la transformation précédente ; on obtient alors

$$x_3y_3z_3 = cz_2^3$$

$$x_3 + y_3 + z_3 = 3d_1z_2$$

car $d_1^3 - (d_1^3 - c) = c$. Un raisonnement du même type redonne alors l'équation (2) :

$$x_4^3 + y_4^3 + cz_4^3 = 3d_1x_4y_4z_4$$

On doit avoir $c = \pi'^b$ et comme l'un des deux entiers $d_1^3 - c$ ou c est pair, on suppose que c'est c de sorte que $\pi' = 2$. Il est clair que le point (x_4,y_4,z_4) a une hauteur $|x_4y_4z_4|$ inférieure ou égale à $|xyz|$. La méthode de descente consiste à montrer tout d'abord que $|x_4y_4z_4| = |xyz|$ entraîne que (x,y,z) est un point connu de (C), soit un des point d'inflexion, soit l'un des points $(1,1,1)$ si $3d_1 = c + 2$ soit le point $(1,1,2)$ si $3d_1 = 4c + 1$ ([1] Ch. 10), puis que si $|x_4y_4z_4| \leqslant 2$, on a aussi $|xyz| \leqslant 2$, ce qui achève de montrer que (2) n'a alors que des solutions triviales.

Donnons un aperçu des valeurs possibles pour δ et a : si $\delta = 1$, $a = 1,2,4,5,7$ donnent des équations auxquelles ce résultat s'applique ; si $\delta = -1$, $a = 1,5,13$, si $\delta = 3$, $a = 8,11\ldots$ donnent encore de telles équations. Dans beaucoup de cas $b = 1$ et il y a probablement une infinité de possibilités pour δ et a.

II. - Nous considérons le problème diophantien suivant :

Soient 4 nombres rationnels r_1, r_2, r_3 et r_4 ; existe-t-il s_1, s_2, s_3 et s_4 dans $\mathbb{Q}$ tels que $\sum_i r_i^h = \sum s_i^h$, $h = 1,2,3$. Pars translation des r_i, on peut supposer que $\sum_i r_i = 0$ et on est ramené au système diophantien :

$$\Sigma X_i = 0$$
$$\Sigma X_i^2 = b$$
$$\Sigma X_i^3 = c$$

qui définit une sextique dont un point rationnel est donné par le 4-uple initial (r_1,r_2,r_3,r_4). On pose alors $X_1 + X_2 = u$, $X_3 + X_4 = v$, $X_1 - X_2 = X$, $X_3 - X_4 = Y$, $X_1X_2 = \alpha$, $X_3X_4 = \beta$ d'où le système

$$u + v = 0$$

$$u^2 + v^2 = b + 2(\alpha+\beta)$$

$$u^3 + v^3 = c + 3(u\alpha+v\beta).$$

Tenant compte de $u + v = 0$, on obtient

$$2(\alpha+\beta) = 2u^2 - b$$

$$3u(\alpha-\beta) = -c$$

On a donc

$$4\alpha = 2u^2 - b - \frac{2c}{3u}$$

$$4\beta = 2u^2 - b + \frac{2c}{3u}$$

$$X^2 + 4\alpha = u^2$$

$$Y^2 + 4\beta = u^2$$

On en déduit X^2 et Y^2 en fonction de u et on pose $2x = X + Y$ et $2y = X - Y$, ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + u^2 = b \\ xyu = \dfrac{c}{3} \end{cases}$$

On obtient l'équation diophantienne

$$c_1^2 = x^2y^2(b-x^2-y^2)$$

où $c = 3c_1$. Inversement si x et y vérifie cette équation, on en déduit u, X et Y puis les X_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

On pose maintenant $x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$, d'où l'équation homogène $c_1^2Z^6 = X^2Y^2(bZ^2-X^2-Y^2)$, revêtement à quatre feuillets de la courbe elliptique

$$c_1^2Z^3 = XY(bZ-X-Y).$$

Changeant les noms des variables, on a à résoudre le système

$$\begin{cases} XYZ = c_1^2 T^3 \\ X + Y + Z = bT \end{cases}$$

Si c_1 est sans facteurs carrés, on peut supposer X, Y, Z premiers dans leur ensemble ; le cas le plus simple étant celui où c_1 est premier. On a alors

$$X = u^3, \ Y = v^3, \ Z = c_1^2 w^3 \quad T = uvw$$

ou bien

$$X = c_1 u^3, \ Y = c_1 v^3, \ Z = w^3 \quad T = uvw$$

mais cela mène à la même équation :

$$u^3 + v^3 + c_1^2 w^3 - buvw = 0.$$

Dans le cas particulier $r_1 = 3$, $r_2 = 1$, $r_3 = r_4 = -2$, on obtient $b = 18$, $c_1 = 4$, soit l'équation

$$u^3 + v^3 + 16w^3 - 18uvw = 0$$

qui se ramène à (2) en remplaçant w par $\frac{w}{2}$.

Dans le cas particulier $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = r_4 = 1$, on obtient $b = 6$, $c_1 = 2$ d'où l'équation du théorème 3. Dans le cas général la sextique obtenue est de genre > 1 et la conjecture de Mordell, démontrée par Faltings, montre que le problème n'a qu'un nombre fini de solutions.

REFERENCES

[1] J.W.S. CASSELS. *«On a diophantine equation»*. Acta Arith. 6 (1960) p. 47-51.

[2] J.W.S. CASSELS. *«Diophantine equations with special reference to elliptic curves»*. Journal of London Math. Soc. 41 (1966) p. 193-291.

[3] A. HURWITZ. *«Ueber ternare diophantische Gleichungen dritten Grades»*. Viertel jahrschrift Naturf. Ges. Zurich 62 (1917) p. 207-229 Math. Werke (Birkhaüser Cie, Basel) 2 (1933) p. 446-468.

[4] G. LIGOZAT. *«Courbes modulaires de genre 1»*. Mémoire SMF 43 (1975) p. 55 et suiv.

[5] L.J. MORDELL. *«The diophantine equations $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$»*. «Colloque sur la théorie des Nombres» Bruxelles (1955) p. 67-76.

[6] L.J. MORDELL. *«Diophantine Equations»*. Academic Press. London and New York (1969).

[7] A. RUBEL. In Am. Math. Monthly Vol. 90, 2 (1983) p. 121.

[8] G. SANSONE and J.W.S. CASSELS. *«Sur le problème de M. Werner Mnich»*. Acta Arith. 7 (1962) p. 187-190.

[9] M. WARD. *«The vanishing of the homogeneous product sum of the roots of a cubic»*. Duke Math. J. 26 (1959) p. 553-562.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1984)