MARCEL BRAY

Quelques univers anisotropes en cosmologie relativiste

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 1 (1985), p. 75-85

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_1_75_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 75 à 85

QUELQUES UNIVERS ANISOTROPES EN COSMOLOGIE RELATIVISTE

Marcel Bray *(1)*

(1) 657, rue de Robbé - 02120 Guise (France)

Résumé : L'intégration du système d'Einstein à partir d'une métrique anisotrope permet d'obtenir des modèles cosmologiques plus généraux que ceux de Robertson-Walker. Parmi ces métriques, celles du type de Kantowski-Sachs, spatialement homogènes, se caractérisent par la possession d'un groupe d'isométries G_4 dont un sous-groupe G_3 opère de manière multiplement transitive sur les 2-surfaces de symétrie maximum.

Adoptant une telle métrique et comme terme de source le tenseur d'impulsion-énergie magnétohydrodynamique on montre que le système d'Einstein-Maxwell et l'équation de conservation admettent des solutions physiquement acceptables dépendant d'une fonction arbitraire.

Par contre, le même problème traité dans une métrique conforme à la précédente conduit à une dégénérescence complète de celle-ci.

En revanche la distribution d'énergie radiation pure fournit des solutions particulières pourvues de sens physique.

Summary : The choice of an anisotropic metric in the Einstein system of field equations permits one to obtain cosmological models more general than Robertson-Walker's.

Among these metrics, those of Kantowski-Sachs-which are spatially homogeneous-distinguish themselves by the possession of a G_4 group of isometries a subgroup G_3 of which acts multiply transitively on the 2-surfaces maximally symmetrical.

Beginning with such a metric and a magnetohydrodynamic source tensor one proves that the Einstein-Maxwell system and the conservation equation admit of physically acceptable solutions (depending on an arbitrary function).

The same problem dealt with a metric conform to Kantowski-Sachs'leads to a complete degeneracy of the metric.

In return, a pure radiation distribution of energy provides us with particular solutions physically admissible.

I. - INTRODUCTION

Pour tenter d'obtenir une description cosmologique plus raffinée on peut généraliser la métrique de Robertson-Walker en abandonnant l'un des deux postulats fondamentaux sur lesquels elle repose (homogénéité et isotropie spatiales) ou les deux. Parmi les univers anisotropes, ceux qui possèdent un groupe d'isométries G_4 dont un sous-groupe G_3 (existence démontrée par le théorème de Kantowski) opère de manière multiplement transitive sur les 2-surfaces de symétrie maximum

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + f^2(\theta)d\varphi^2 \quad ; \quad f = \sin\theta, \theta, \mathrm{sh}\,\theta$$

seront désignés par l'expression «univers de Kantowski-Sachs (1).

En coordonnées

$$x^o \equiv t \quad ; \quad x^1 \equiv x \quad ; \quad x^2 \equiv \theta \quad ; \quad x^3 \equiv \varphi$$

la métrique s'écrit

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)\,dx^2 - B^2(t)d\sigma^2$$

Ces univers sont donc spatialement homogènes. Aux avantages physiques évidents de la possession d'un groupe d'isométries s'ajoute l'intérêt mathématiques suivant : les «points singuliers» de la «variété» des solutions du système d'Einstein (quotient de l'ensemble des solutions par le groupe des difféomorphismes) sont ceux qui correspondent à l'existence de groupes d'isométries.

C'est pourquoi de nombreux travaux ont pris la métrique de K.-S. comme base dans la recherche des solutions exactes.

Au mémoire de A.G. Doroshkewich (2) traitant le cas d'une manière sans pression avec champ électromagnétique s'ajoutèrent les solutions données par Kantowski (3) (poussière, radiation, matière rigide) puis celles de Shikin (4) et de Thorne (5) étudiant particulièrement le schéma champ magnétique-matière.

Le présent article se propose d'abord d'intégrer, en métrique de K.-S., le système d'Einstein écrit pour un tenseur source de type magnétohydrodynamique (MHD). L'importance du schéma MHD en astrophysique nous paraît justifier cette étude. Dans une seconde partie seront étudiées deux sources $(T_{\alpha\beta})_{MHD}$ et $(T_{\alpha\beta})$ radiation engendrant un champ gravitationnel conforme à celui de K.-S..

II. - UNIVERS M H D DU TYPE DE K.-S.

Dans un système de coordonnées locales

$$x^o \equiv t \quad ; \quad x^1 \equiv x \quad ; \quad x^2 \equiv \theta \quad ; \quad x^3 \equiv \varphi$$

on pose

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)dx^2 - B^2(t)\,[d\theta^2 + f^2 d\varphi^2] \;\; ; \;\; f = \sin\theta, \theta, \mathrm{sh}\,\theta$$

Cette métrique fournit un tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = R^{\nu}{}_{.\alpha\beta\nu} = -\,\partial_\beta\,(\Gamma^\nu_{\alpha\nu}) + \partial_\nu(\Gamma^\nu_{\alpha\beta}) - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\,\Gamma^\nu_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\,\Gamma^\nu_{\sigma\nu}$$

réduit à ses composantes diagonales

$$\begin{cases} R_{oo} = -\dfrac{\ddot{A}}{A} - 2\,\dfrac{\ddot{B}}{B} \quad ; \quad R_{11} = A\left[\ddot{A} + 2\dfrac{\dot{A}\dot{B}}{B}\right] \quad ; \quad \dot{A} \equiv \dfrac{dA}{dt} \\ \\ R_{22} = B\ddot{B} + \dot{B}^2 + B\dfrac{\dot{A}\dot{B}}{A} - \dfrac{f''}{f} \quad ; \quad R_{33} = f^2\,R_{22} \quad ; \quad R_{\alpha\beta} = 0 \;\; ; \;\; \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Si, dans le terme de source de l'équation d'Einstein

$$R_{\alpha\beta} = \chi\,(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g\alpha\beta\,T) + \Lambda\,g\alpha\beta \quad ; \quad \chi = 8\pi$$

on insère le tenseur MHD (6)

$$T_{\alpha\beta} = (c^2 r\tilde{f} + \mu\,|h|^2) U_\alpha\,U_\beta - (p + \frac{\mu}{2}\,|h|^2)\,g\alpha\beta - \mu\,h\alpha h_\beta \;\; ; \;\; U^\alpha\,U_\alpha = 1 \;\; ; \;\; U^\alpha\,h_\alpha = 0$$

r : densité propre de matière ; ϵ : énergie spécifique interne ; $i=(\epsilon+\frac{p}{r})$: enthalpie spécifique
$\widetilde{f}\equiv(1+i/_c 2)$; $\rho=c^2 r\,[1+c^{-2}\epsilon]$: densité d'énergie propre ; $|h|^2\equiv -h^\nu h_\nu$

il vient, en posant

$$2\overset{*}{\rho}\equiv c^2 r\,\widetilde{f}+\mu\,|h|^2+2p \quad ; \quad 2\overset{*}{p}\equiv c^2 r\,\widetilde{f}+\mu\,|h|^2-2p$$

$$R_{\alpha\beta}=\chi\left\{(\overset{*}{\rho}+\overset{*}{p})\,U_\alpha U_\beta-\overset{*}{p}\,g_{\alpha\beta}-\mu h_\alpha h_\beta\right\}+\Lambda\,g_{\alpha\beta}$$

En coordonnées comobiles $(U^k=0)$,$(U^\nu h_\nu)=0$ entraîne ho = o. Les équations E_{oj} , $h_o h_j=0$, j = 1,2,3 sont alors identiquement satisfaites.

Dans les équations E_{jk} : $h_2h_3=0$; $h_3h_1=0$; $h_1h_2=0$, les hypothèses $h_1=h_3=0$, $h_2\neq 0$ et $h_1=h_2=0$, $h_3\neq 0$ sont exclues.

En effet, soit $h_1=h_3=0$, $h_2\neq 0$, on a

$$R_{22}=\chi\,[\overset{*}{p}\,B^2-\mu h_2^2]-\Lambda B^2 \quad ; \quad R_{33}=\chi\,[\overset{*}{p}\,B^2 f^2]-\Lambda B^2 f^2=f^2\,[\chi(\overset{*}{p}\,B^2-\mu h_2^2)-\Lambda B^2]$$

d'où $h_2=0$ contrairement à l'hypothèse.

Donc, nécessairement $h_2=h_3=0$, $h_1\neq 0$. Le système se réduit à :

$$R_{oo}=\chi\,\overset{*}{\rho}+\Lambda \quad ; \quad R_{11}=\chi\,[\overset{*}{p}\,A^2-\mu h_1^2\,]-\Lambda A^2 \quad ; \quad R_{22}=\chi\,\overset{*}{p}\,B^2-\Lambda B^2$$

ou, équivalemment

$$\chi\overset{*}{\rho}=R_{oo}-\Lambda \quad ; \quad \chi\,\overset{*}{p}=B^{-2}\,R_{22}+\Lambda \quad ; \quad \chi\mu h_1^2=B^{-2}A^2R_{22}-R_{11}$$

Soit, de manière explicite

$$\left\{\begin{array}{l}\chi c^2 r\,\widetilde{f}=-2\dfrac{\ddot{B}}{B}+2\dfrac{\dot{A}}{A}\dfrac{\dot{B}}{B}\ ;\ 2\chi p=-\dfrac{\ddot{A}}{A}-3\dfrac{\ddot{B}}{B}-\left(\dfrac{\dot{B}}{B}\right)^2-\dfrac{\dot{A}}{A}\dfrac{\dot{B}}{B}+\dfrac{k}{B^2}-2\Lambda\\[2ex] \chi\mu\,|h|^2=\dfrac{\ddot{B}}{B}-\dfrac{\ddot{A}}{A}+\left(\dfrac{\dot{B}}{B}\right)^2-\dfrac{\dot{A}}{A}\dfrac{\dot{B}}{B}-\dfrac{k}{B^2}\ ;\ k\equiv f''/_f=-1,\,0,\,+1\end{array}\right.$$

Aux équations d'Einstein s'ajoutent l'équation de conservation de la matière

$$\nabla_\beta(rU^\beta)=0\ \rightarrow\ \partial_o(\sqrt{-g}\,r)=0\ \rightarrow\ rAB^2 f=\phi(x,\theta,\varphi) \quad ; \quad \phi\ :\ \text{arbitraire}$$

et les équations de Maxwell

$$\nabla_\beta(F^{\alpha\beta})=0 \quad ; \quad F^{\alpha\beta}\equiv 2h^{[\alpha}U^{\beta]}\ \rightarrow\ \partial_o(\sqrt{-g}\,h^1)\ =\ \partial_1(\sqrt{-g}\,h^1)=0$$

h^1 ne dépendant que de x^o, on a

$$h^1 AB^2 f = \Psi(\theta)$$

et

$$\Psi = C f(\theta) \quad ; \quad C : \text{cte}$$

$$h_1 = -CAB^{-2} \to |h|^2 = C^2 B^{-4}$$

En portant cette valeur dans $\chi \mu |h|^2$ on obtient l'équation de compatibilité

$$(\mathscr{C}) \qquad \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}}{A}\frac{\dot{B}}{B} = \frac{\ddot{B}}{B} + (\frac{\dot{B}}{B})^2 - \frac{\tilde{C}^2 + k B^2}{B^4}) \quad ; \quad \chi\mu C^2 \equiv \tilde{C}^2$$

Tout choix arbitraire de B laisse une équation de type

$$\ddot{A} + \dot{A} L(x^o) + AM(x^o) = 0$$

pour déterminer A.

Considérons le cas $A = B^n$; ($\mathscr{C}$) s'écrit en éliminant A

$$(\mathscr{C}) \qquad \frac{\ddot{B}}{B} + (n+1)(\frac{\dot{B}}{B})^2 + \frac{(\tilde{C}^2 + k B^2)}{(n-1)B^4} = 0 \quad ; \quad n-1 \neq 0 \quad \text{sinon} \quad k = \tilde{C} = 0$$

Tirant $\frac{\ddot{B}}{B}$ de ($\mathscr{C}$) nous avons dans ces conditions

$$\frac{1}{2} \chi c^2 r \tilde{f} = (2n+1)(\frac{\dot{B}}{B})^2 + \frac{\tilde{C}^2 + kB^2}{(n-1)B^4} > 0 \quad \text{si} \quad n > 1 \ ; \ k = 0,1$$

Si $n > 1$, $k = -1$ on doit avoir $(2n+1)\dot{B}^2 + \frac{\tilde{C}^2}{(n-1)B^2} > \frac{1}{(n-1)}$

Il vient ensuite

$$2\chi p = 2(2n+1)(\frac{\dot{B}}{B})^2 + \left[\frac{\tilde{C}^2 \ell + k B^2(\ell+1)}{B^4}\right] - 2\Lambda \ ; \quad \ell \equiv \frac{n+3}{n-1}$$

expression strictement positive pour $n > 1$; $k = 0,1$; $\Lambda \leqslant 0$.
L'ensemble des paires A, B susceptibles de représenter une solution physiquement acceptable n'est donc pas vide. Puisque $\dot{U}_\alpha \equiv U^\nu \nabla_\nu(U_\alpha) = 0$ la congruence des lignes de courant se compose de géodésiques. Cette congruence possède une expansion

$$\theta \equiv \nabla_\nu(U^\nu) = \frac{\dot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}}{B} \quad \text{et un tenseur de déformation } \sigma_{\alpha\beta} \equiv U(\alpha;\beta) - \frac{\theta}{3}\pi\alpha\beta$$

- avec $\pi\alpha\beta \equiv g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta$ - réduit à ses composantes diagonales.

$$\sigma_{oo}=0 \;;\quad \sigma_{11}=-A\dot{A}+\frac{\theta}{3}A^2 \;;\quad \sigma_{22}=-B\dot{B}+\frac{\theta}{3}B^2 \;;\quad \sigma_{33}=f^2\sigma_{22} \;;\quad \sigma_{\alpha\beta}=0, \alpha\neq\beta$$

$$(\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}) \equiv 2\sigma^2 = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \frac{\theta^2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{\dot{A}}{A}-\frac{\dot{B}}{B}\right)^2$$

La congruence ne possède pas de rotation $\omega_{\alpha\beta}\equiv U_{[\alpha\,;\,\beta]}$ car $U_{[\alpha\,;\,\beta]}=0$. On sait que l'application de l'identité de Ricci $2\,\nabla_{[\nu}\nabla_{\rho]}U^\nu = R_{\rho\beta}\,U^\beta$ conduit à l'équation de Raychaudhuri $\dot{\theta}=\nabla_\nu(\dot{U}^\nu)-U_{\alpha\,;\,\beta}\,U^{\beta\,;\,\alpha}-R_{\alpha\beta}\,U^\alpha U^\beta$ soit

$$\dot{\theta} = -\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - 2\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 + \frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\ddot{B}}{B} = \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^{\bullet} + 2\left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^{\bullet}$$

qui donne la loi de variation de θ le long des lignes de courant. Le champ magnétique est à divergence nulle $\nabla_\nu(h^\nu)=0$. Rappelons également la loi d'évolution de l'énergie spécifique interne $r\,\dot{\epsilon}+p\,\theta=0$. Si l'on observe que la relation

$$U^\beta\,\nabla_\nu(h^\nu)+h^\nu\,\nabla_\nu(U^\beta)-\dot{h}^\beta-\theta\,h^\beta=0$$

déduite des équations de Maxwell nous donne $\partial_o\log(h^1)=-\theta$, il vient ensuite

$$\frac{\nabla}{ds}\log\left(|h|\,r^{-2/3}\right)+\sigma_{\alpha\beta}\frac{h^\alpha h^\beta}{|h|^2}=0 \;\rightleftarrows\; \nabla_o\log\left(|h|\,r^{-2/3}\right)+\left(\frac{\theta}{3}-\frac{\dot{A}}{A}\right)=0$$

Notons enfin que l'invariant de courbure écrit en termes de matrice 6×6 (par la correspondance $R_{[\alpha\beta][\mu\nu]}\to\Omega_{RS}$) sous la forme $(\Omega^{RS}\,\Omega_{RS})$ a pour expression

$$\mathscr{K}=\left(\frac{\ddot{A}}{A}\right)^2+2\left(\frac{\ddot{B}}{B}\right)^2+\left(\frac{k-\dot{B}^2}{B^2}\right)^2+2\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB}\right)^2$$

III. - SOLUTIONS DU TYPE $ds^2=\Omega^2\,[ds^2]_{K.-S.}$

Soit l'élément

$$ds^2=\Omega^2(x)\;\left\{dt^2-A^2(t)dx^2-B^2(t)\,[d\theta^2+f^2\,d\varphi^2]\right\} \qquad \text{avec } \Omega'\neq 0$$

Cette métrique fournit un tenseur de Ricci de composantes non nulles

$$R_{oo}=\mathscr{R}_{oo}+A^{-2}\Delta \quad;\quad R_{11}=\mathscr{R}_{11}-3H$$

$$R_{22}=\mathscr{R}_{22}-B^2A^{-2}\Delta \quad;\quad R_{33}=f^2R_{22} \quad;\quad R_{o1}=2\frac{\dot{A}}{A}\frac{\Omega'}{\Omega}$$

$\mathscr{R}_{\alpha\beta}$: tenseur de Ricci de la métrique de K. – S. .

$$\Delta \equiv \left(\frac{\Omega''}{\Omega} + \frac{\Omega'^2}{\Omega^2}\right) \quad ; \quad H \equiv \left(\frac{\Omega''}{\Omega} - \frac{\Omega'^2}{\Omega^2}\right)$$

a) Reprenant le système d'Einstein -en coordonnées comobiles- pour $(T_{\alpha\beta})_{MHD}$ on démontre comme précédemment que seule h_1 peut différer de 0. (conséquence de $R_{33} = f^2 R_{22}$). Il reste

$$R_{oo} = \Omega^2 [\chi \overset{*}{\rho} + \Lambda] \quad ; \quad R_{11} = \chi[\overset{*}{p} A^2 \Omega^2 - \mu h_1^2] - \Lambda A^2 \Omega^2$$

$$R_{22} = \Omega^2 B^2 [\chi \overset{*}{p} - \Lambda] \ ; \quad R_{o1} = 0$$

soit

$$\begin{cases} \chi \overset{*}{\rho} = \Omega^{-2} R_{oo} - \Lambda = \Omega^{-2} [-2 \dfrac{\ddot{B}}{B} + \Delta] - \Lambda \\ \chi \overset{*}{p} = \Omega^{-2} B^{-2} R_{22} + \Lambda = \Omega^{-2} [\dfrac{\ddot{B}}{B} + \dfrac{\dot{B}^2}{B^2} - \dfrac{k}{B^2} - \Delta] + \Lambda \\ \chi \mu \, | h |^2 = \Omega^{-2} [\dfrac{\ddot{B}}{B} + \dfrac{\dot{B}^2}{B^2} - \dfrac{k}{B^2} + (3H - \Delta)] \end{cases} \quad ; \ A = 1 \text{ en vertu de } R_{o1} = 0$$

La conservation de la matière donne ensuite $r = B^{-2} \phi\, (x,\theta,\varphi)$, ϕ arbitraire tandis que les équations de Maxwell exigent $h_1 = - LB^{-2} \Omega^{-1}$; $L : c^{te}$. Dans ces conditions l'équation de compatibilité s'écrit

$$(\mathscr{C}) \ : \qquad \frac{n^2}{B^4 \Omega^2} = \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{k}{B^2} + (3H - \Delta) \quad ; \quad n^2 \equiv \chi \mu L^2$$

On en tire B = 1 d'où $(3H - \Delta) = (k + \dfrac{n^2}{\Omega^2})$. Puisque $\chi\, (\overset{*}{\rho} + \overset{*}{p}) = - k\, \Omega^{-2}$ on doit avoir $k = -1 \ \rightleftharpoons \ f = \sin \theta$. Donc

$$\frac{\Omega''}{\Omega} - 2 \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} = \left(\frac{n^2 - \Omega^2}{2\,\Omega^2}\right)$$

Cette équation admet l'intégrale $\Omega = \dfrac{n}{\sqrt{2}} \operatorname{ch} \omega$; $\omega \equiv \dfrac{x}{\sqrt{2}}$. On en déduit

$$\chi \overset{*}{\rho} = \phi^* \Omega^{-2} - \Lambda \ ; \quad \chi \overset{*}{p} = \frac{n^2}{4} \Omega^{-4} + \Lambda \ ; \quad \chi \mu \, | h |^2 = n^2 \Omega^{-4}$$

avec $\phi^* \equiv [1 - \dfrac{1}{2} \operatorname{ch}^{-2}(\omega)] > 0.$

Equivalemment

$$\chi \overset{*}{\rho} = \left(\frac{2\,\mathrm{ch}^2(\omega) - 1}{n^2\,\mathrm{ch}^4(\omega)}\right) - \Lambda \quad ; \quad \chi \overset{*}{p} = \frac{1}{n^2\,\mathrm{ch}^4(\omega)} + \Lambda \quad ; \quad \chi \mu\, |h|^2 = \frac{4}{n^2\,\mathrm{ch}^4(\omega)}$$

Revenant aux variables initiales il vient

$$\begin{cases} \chi c^2 r \tilde{f} = \dfrac{n^2}{2\,\Omega^4}\,[\mathrm{ch}^2(\omega) - 2] \\ 2\chi p \quad = \Omega^{-2}\,\mathrm{th}^2(\omega) - 2\Lambda \end{cases}$$

La seule condition de positivité est donc $\mathrm{ch}^2(\omega) > 2$ si $\Lambda \leqslant 0$. Cette solution correspond à une dégénérescence complète de la métrique de K. – S. $(A = B = 1)$. $f = \sin\theta$ décrit une «symétrie sphérique» dans laquelle toutes les sphères de la coupe $t = c^{te}$ ont même surface dans la métrique de K. – S..

b) Posons maintenant $T_{\alpha\beta} = \sigma k_\alpha k_\beta$, $k^\nu k_\nu = 0$ (radiation pure).

$$R_{\alpha\beta} = \chi\, \sigma\, k_\alpha k_\beta + \Lambda\, g_{\alpha\beta}$$

Les équations E_{02}, E_{03}, E_{23}, E_{31}, E_{12} sont identiquement satisfaites si $k_2 = k_3 = 0$.

L'isotropie de $\vec{k}$ entraine ensuite $k_1 = \epsilon\, A k_o$, $\epsilon = \pm 1$. Il vient

$$R_{oo} = \chi\,\sigma\, k_o^2 + \Lambda\,\Omega^2 \quad ; \quad R_{11} = \chi\,\sigma\, A^2 k_o^2 - \Lambda\, A^2\,\Omega^2 \quad ; \quad R_{22} = -\Lambda\, B^2\,\Omega^2$$

$R_{o1} = \chi\,\sigma\, k_o^2\, A$ (en prenant $\epsilon = +1$) soit

$$2\chi\,\sigma\, k_o^2 = (R_{oo} + A^{-2} R_{11}) \quad ; \quad (R_{oo} - A^{-2} R_{11}) = 2\Lambda\,\Omega^2 \quad ; \quad B^{-2} R_{22} = -\Lambda\,\Omega^2 \quad ;$$

$$R_{o1} = \chi\,\sigma\, A\, k_o^2$$

Quelques réductions donnent les formes explicites.

$$\chi\,\sigma\, k_o^2 = 2\frac{\dot{A}}{A^2}\,\frac{\Omega'}{\Omega} \quad ; \quad -2\frac{\ddot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \left(\frac{\Delta - 3H}{A^2}\right) = 4\frac{\dot{A}}{A^2}\,\frac{\Omega'}{\Omega} \tag{1}$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{A}\,\dot{B}}{A\,B} - \frac{k}{B^2} - \frac{\Delta}{A^2} = -\Lambda\,\Omega^2 \tag{2}$$

$$-2\frac{\ddot{A}}{A} + 2\frac{\dot{B}^2}{B^2} - \frac{2k}{B^2} + \left(\frac{3H - \Delta}{A^2}\right) = 0 \tag{3}$$

Dans (1) écrivons $\Delta - 3H = 4\dot{A}\dfrac{\Omega'}{\Omega}$ (1)' ; il reste $-\ddot{B} + \dfrac{\dot{A}\dot{B}}{A} = 0$ (1)''.

D'après (1)' $\dot{A} = K : c^{te} \rightarrow \Delta - 3H = 4K\dfrac{\Omega'}{\Omega} \rightleftharpoons -\left[\dfrac{\Omega''}{\Omega} - 2\dfrac{\Omega'^2}{\Omega^2}\right] = 2K\dfrac{\Omega'}{\Omega}$ soit, avec $\Omega' \neq 0$:

$$-\frac{\Omega''}{\Omega'} + 2\frac{\Omega'}{\Omega} = 2K \rightarrow \log\left(\frac{\Omega^2}{C\Omega'}\right) = 2K\,x \quad C : \text{cte} \quad -\frac{\Omega'}{\Omega^2} = -\frac{1}{C}\,e^{-2Kx} \rightarrow \Omega^{-1} = \frac{e^{-2Kx}}{2\,CK}$$

On prendra pour simplifier $\Omega = e^{2Kx}$

De (1)'' on tire ensuite $\dfrac{\ddot{B}}{\dot{B}} = \dfrac{\dot{A}}{A} \rightarrow \dot{B} = LA$, $L : c^{te}$.

Puisque $A = Kt$, $B = \dfrac{LK}{2}t^2$.

Portant ces valeurs dans (2) il vient $-4kL^{-2}K^{-2}t^{-4} = -\Lambda\,\Omega^2$ d'où $k = \Lambda = 0$. L'insertion dans (3), compte tenu de $k = 0$ fournit une identité ; il reste

$$\chi\,\sigma\,k_o^2 = 4/_{t^2}$$

Dans les équations du mouvement $\nabla_\beta(T_\alpha^\beta) = 0$ nous postulerons $\nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0$.

La congruence des trajectoires de k se compose alors de géodésiques nulles

$$k^\beta\,\nabla_\beta(k_\alpha) = 0 \quad ; \quad \nabla_\beta(\sigma k^\beta) = 0 \rightarrow \partial_o(\sqrt{-g}\,\sigma k^o) + \partial_1(\sqrt{-g}\,\sigma k^1) = 0$$

$$\text{Or } k^1 = -A^{-1}\,k^o \quad ; \quad \text{donc } A\,\partial_o(\sqrt{-g}\,\sigma k^o) - \partial_1(\sqrt{-g}\,\sigma k^o) = 0$$

On peut satisfaire cette équation en posant $\sqrt{-g}\,\sigma k^o = \phi(u)$

$$\phi \quad \text{arbitraire} \;;\; u \equiv (x + \frac{1}{K}\log t)$$

Par conséquent $\dfrac{\chi\,\sigma\,k_o^2}{\chi\,\sigma\,k_o} = k_o = \dfrac{4}{t^2}\left[\dfrac{\Omega^2\,A\,B^2\,f}{\chi\,\phi(u)}\right]$ soit

$$k_o = L^2\,K^3\left[\frac{t^3\,e^{4Kx}\,\theta}{\chi\,\phi(u)}\right]; \quad k_1 = (Kt)k_o \quad ; \quad \sigma = \frac{4\chi\,\phi^2(u)\,e^{-8Kx}}{K^6\,L^4\,t^8\,\theta^2}$$

Le ds^2 prend la forme

$$ds^2 = e^{4Kx}\left\{dt^2 - K^2t^2dx^2 - \frac{L^2\,K^2\,t^4}{4}\,[d\theta^2 + \theta^2\,d\varphi^2]\right\}$$

La transformation $t = e^{K\tau}$ permet de l'écrire

$$ds^2 = K^2\,e^{2K\tau\,+\,4Kx}\left\{d\tau^2 - dx^2 - \frac{L^2}{4}\,e^{2K\tau}\,[d\theta^2 + \theta^2\,d\varphi^2]\right\}$$

soit un élément du type $ds^2 = \Psi^2(\tau, x)\,ds^2_{K.-S.}$ (avec $A = 1$).

De même la transformation définie par $\dfrac{2dt}{LKt^2} = d\tau$ fournit un second aspect, savoir

$$ds^2 = \frac{4\,e^{4Kx}}{L^2K^2\tau^4}\left\{d\tau^2 - K^2\tau^2\,dx^2 - [d\theta^2 + \theta^2\,d\varphi^2]\right\} = \Psi^2(\tau, x)\,ds^2_{K.-S.} \quad \text{(avec } B = 1\text{)}.$$

Le calcul des composantes du tenseur de courbure conduit aux résultats suivants :

$$R^0_{.101} = -A\ddot{A} + H \;;\quad R^0_{.202} = -B\ddot{B} + \frac{B^2}{A^2}\frac{\Omega'^2}{\Omega^2} \;;\quad R^0_{.212} = B^2\,\frac{\dot{A}}{A}\,\frac{\Omega'}{\Omega}$$

$$R^0_{.303} = f^2\,R^0_{.202} \;;\quad R^0_{.331} = -f^2\,R^0_{.212} \;;\quad R^2_{.323} = B^2f^2\left[\frac{k}{B^2} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\Omega'^2}{A^2\Omega^2}\right]$$

$$R^3_{.1o3} = \frac{\dot{A}}{A}\,\frac{\Omega'}{\Omega} \;;\quad R^3_{.131} = H - \frac{A\dot{A}\dot{B}}{B}$$

$$R^1_{.202} = -\frac{B^2}{A^2}\left(\frac{\dot{A}}{A}\,\frac{\Omega'}{\Omega}\right) \;;\quad R^1_{.212} = -B^2\left[\frac{\dot{A}}{A}\,\frac{\dot{B}}{B} - \frac{H}{A^2}\right]$$

desquels on déduit les composantes covariantes et contrevariantes.

Puis établissant la correspondance

01	02	03	23	31	12
1	2	3	4	5	6

de manière à écrire les composantes $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, $R^{\alpha\beta\mu\nu}$ sous forme de matrices 6 X 6 Ω_{RS}, Ω^{RS} on évalue l'invariant de courbure $\mathscr{K} = (\Omega^{RS}\,\Omega_{RS})$

$$\mathscr{K} = \Omega^{-4}\left[\left(\frac{-A\ddot{A} + H}{A^2}\right)^2 + 2\left(-\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\Omega'^2}{A^2\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{B^2} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\Omega'^2}{A^2\Omega^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{H}{A^2}\right)^2 - \frac{4}{A^2}\left(\frac{\dot{A}}{A}\,\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2\right]$$

Pour la solution III (a) nous avons

$$(\mathscr{K})_{MHD} = \Omega^{-4}\left[3H^2 + 3\frac{\Omega'^4}{\Omega^4} - 2\frac{\Omega'^2}{\Omega^2} + 1\right] = \frac{3\,ch^4(\omega) - 2\,ch^2(\omega) + 6}{4\,ch^4(\omega)} \;,\quad \omega \equiv \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Il n'y a pas de singularité essentielle.

Dans le cas de la radiation pure $\mathscr{K} = 0$.

REFERENCES

[1] M.A.H. MAC CALLUM. *«Anisotropic and inhomogeneous relativistic cosmologies».* In «General Relativity an Einstein Centenary Survey» ed. by S.W. Hawking and W. Israel, Ch. 11, p. 545.

[2] A.G. DOROSHKEWICH. 1965 *«Model of a universe with a uniform magnetic field».* Astrophysics 1, 138.

[3] R. KANTOWSKI. 1966 *«Some relativistic cosmological models».* Ph. D. Thesis University of Texas.

[4] I.S. SHIKIN. 1966 *«A uniform anisotropic cosmological model with a magnetic field».* Astrophys. J. 148, 51.

I.S. SHIKIN. 1974 *«Investigation of a class of gravitational fields of a charged dust-like medium».*

[5] K.S. THORNE. 1967 *«Primordial element formation, primordial magnetic fields and the isotropy of the universe».* Astrophys. J. 148, 51.

[6] A. LICHNEROWICZ. Ann. Inst. H. Poincaré, 5, n^{o} 1, 1966, p. 37-75, section A Physique théorique.

(Manuscrit reçu le 25 juin 1984)