ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GENEVIÈVE ALLAIN

**Un problème de Navier-Stokes avec surface libre et tension superficielle**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série*, tome 7, nº 1 (1985), p. 29-56

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_1_29_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 29 à 56

# UN PROBLEME DE NAVIER-STOKES AVEC SURFACE LIBRE ET TENSION SUPERFICIELLE

**Geneviève Allain** (1)

*(1) Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cédex - France.*

**Résumé** : On considère un fluide visqueux, incompressible, instationnaire avec surface libre. Les équations sont écrites en coordonnées Lagrangiennes. La tension superficielle sur la surface libre est exprimée à l'aide d'une fonction inconnue supplémentaire, liée à la vitesse par une équation d'évolution. Pour une vitesse initiale quelconque on prouve l'existence pour un temps petit d'une solution des équations de Navier-Stokes.

**Summary** : We consider a viscous, incompressible, instationary fluid with a free surface. We use a Lagrangian formulation. To write the superficial tension on the free surface we use a new unknown function related to the velocity by an evolution equation. For any initial velocity we prove the small-time solvability of the Navier-Stokes equations.

## 1. - EQUATIONS, THEOREME

Nous étudions ici le mouvement d'un fluide visqueux incompressible situé entre une surface libre et un fond solide. Nous prouvons, lorsqu'on tient compte de la tension superficielle sur la surface libre, l'existence d'une solution sur un petit intervalle de temps même si les données initiales ne sont pas proches de l'équilibre.

Un problème similaire a fait l'objet d'une thèse [1] mais on y avait remplacé la tension superficielle par un opérateur plus simple. Dans [2] J.T. Beale a montré aussi un résultat d'existence locale lorsqu'on ne tient pas compte de la tension superficielle. Dans [3] il étudie l'effet de cette tension sur la régularité de la vitesse et de la surface libre pour des données initiales proches de l'équilibre.

On étudie le problème en coordonnées Lagrangiennes de manière à ce que les inconnues soient définies sur un domaine fixe. Les équations sont linéarisées au voisinage d'un déplacement nul. On considère ensuite les termes non linéaires comme une perturbation de l'opérateur linéaire tangent. Nous estimons ces termes pour un temps petit. Nous sommes alors amenés à résoudre un problème de point fixe et nous prouvons ainsi l'existence d'une solution.

Les données initiales sont un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limité en profondeur par une surface solide $S_B$ et au-dessus par une surface $S_F$ ne touchant pas $S_B$, ainsi qu'un champ initial de vitesses $u_1$ sur $\Omega$.

A l'instant t le fluide occupe un domaine $\Omega(t)$ et nous voulons connaître le champ des vitesses $v(.,t)$, de pression $p(.,t)$ ainsi qu'une transformation $\bar{\eta}(.,t) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tels que :

(1.1) $$\Omega(t) = \bar{\eta}(\Omega,t) \qquad \bar{\eta}(S_B,t) = S_B$$

(1.2) $$\bar{\eta}_t = v \circ \bar{\eta} \text{ sur } \Omega$$

(1.3) $$v_t + (v\,.\,\nabla)v + \nabla p = -\nu\Delta v + g_0 \nabla x_2 \text{ dans } \Omega(t)$$

(1.4) $$\operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega(t)$$

(1.5) $$-pn_i + \nu \sum_j (v_{i,j} + v_{j,i})n_j - \alpha H\, n_i = -P_0\, n_i \text{ sur } \bar{\eta}(S_F,t)$$

(1.6) $$v = 0 \text{ sur } S_B$$

(1.7) $$v(x,0) = u_1(x) \text{ dans } \Omega$$

(1.8) $$\bar{\eta}(x,0) = x \text{ dans } \Omega$$

Ici $\nu$ désigne la viscosité cinématique du fluide, $g_0$ l'accélération de la pesanteur ; $n = (n_1,n_2)$ désigne la normale à $\bar{\eta}(S_F,t)$ et H la courbure principale de $\bar{\eta}(S_F,t)$ en un point de cette surface ; la pression atmosphérique, supposée constante, est notée $P_0$ et $\alpha$ est le coefficient (strictement positif) de tension superficielle entre le fluide et l'air.

Les équations (1.2) et (1.8) signifient que $\overline{\eta}(.\,,t) = I + \eta(.\,,t)$ où $\eta(.\,,t)$ est le champ défini sur $\Omega$, des déplacements à l'instant t. L'équation (1.5) contient donc l'hypothèse implicite que la suface déplacée $\overline{\eta}(S_F,t)$ est la surface libre du fluide à l'instant t.

Nous allons maintenant écrire le problème en coordonnées Lagrangiennes, c'est-à-dire sur $\Omega$. Nous supposerons que sur $\overline{\eta}(S_F,t)$, $x_2$ tend vers une constante (que nous choisirons nulle) à l'infini. On pose alors $\tilde{p} = p - P_o + g_o\, x_2$. Les inconnues seront la vitesse Lagrangienne $u(.\,,t) = v \circ \overline{\eta}(.\,,t)$ - dont nous déduirons $\eta$ par $\eta(.\,,t) = \int_0^t u(.\,,t')dt'$ - la pression $q(.\,,t) = \tilde{p}[\eta(.\,,t);t]$ ainsi qu'une fonction $\Phi(.\,,t)$ définie sur $S_F$ grâce à laquelle nous exprimerons la tension superficielle comme suit :

Supposons que $S_F$ a pour équation $x_2 = h(x_1)$ où h est une fonction assez régulière. On a, pour $x \in \mathbb{R}$

$$(Hn)\,[\overline{\eta}(x,h(x),t)] = \frac{1}{\| S(x) \|}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\| S(x) \|}\,S(x)\right]$$

où $S = (1+\eta'_1\,,\, h'+\eta'_2)$ , $\eta'(x) = \frac{d}{dx}[\eta(x,h(x))]$.

Soit $\Phi$ définie sur $S_F$ au point $M(x,h(x))$ par

$$\Phi(M) = \frac{h'+\eta'_2}{1+\eta'_1}\,(x,t) - h'(x) \tag{1.9}$$

alors

$$(Hn \circ \overline{\eta})(M) = \frac{(1+h'^2)^{1/2}}{\| S \|}\;\partial_\tau \left\{ [1 + (\Phi + h')^2]^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi + h' \end{pmatrix} \right\}$$

où $\partial_\tau \psi$ est la dérivée tangentielle de $\psi$ sur $S_F$.

Soit $N = (N_1,N_2)$ la normale extérieure à $S_F$, et $\mathcal{N} = (N_1 - \partial_\tau \eta_2\,,\, N_2 + \partial_\tau \eta_1)$ ; le problème (1.1) - (1.8) s'écrit sur $\Omega$ :

$$u_{i,t} - \nu \overline{\xi}_{kj}\, \partial_k(\overline{\xi}_{\ell j}\, u_{i,\ell}) + \overline{\xi}_{ki}\, \partial_k\, q = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{1.10}$$

$$\overline{\xi}_{kj}\, u_{j,k} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} -q\,\mathcal{N}_i + \nu(\overline{\xi}_{kj}\, u_{i,k} + \overline{\xi}_{ki}\, u_{j,k})\,\mathcal{N}_j - \alpha\, \partial_\tau \left\{ [1 + (\Phi + h')^2]^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi + h' \end{pmatrix} \right\} \\ + g_o(x_2+\eta_2)\,\mathcal{N}_i = 0 \quad \text{sur } S_F \times (0,T) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\Phi_t - (N_2 + \partial_\tau \eta_1)^{-2}(\partial_\tau u \,.\, N + \partial_\tau u_2\, \partial_\tau \eta_1 - \partial_\tau u_1\, \partial_\tau \eta_2) = 0 \quad \text{sur } S_F \times (0,T) \tag{1.13}$$

(1.14) $$u = 0 \text{ sur } S_B \times (0,T)$$

(1.15) $$u = u_1 \text{ dans } \Omega \text{ pour } t = 0$$

(1.16) $$\Phi = 0 \text{ sur } S_F \text{ pour } t = 0$$

Rappelons que $\eta(.\,,t) = \int_0^t u(.\,,t')dt'$. Les coefficients $\bar{\xi}_{ij}$ sont les composantes de la matrice Jacobienne $(I + d\eta)^{-1}$ avec $d\eta_{ij} = \eta_{i,j}$.

Nous avons remplacé (1.9) par l'équation dérivée en temps (1.13) avec la condition initiale (1.16). En effet, le problème linéarisé ne donne une régularité suffisante que sur $\partial_\tau \eta$ . N et non par sur toute la dérivée $\partial_\tau \eta$, aussi nous ne pourrions pas estimer les termes d'ordre supérieur à 1 dans (1.9) pour utiliser une méthode de point fixe. Cette difficulté disparait avec l'équation (1.13).

Les espaces utilisés seront les espaces de Sobolev $H^{r,s}(G)$ où $G = \Omega \times ]0,T[$ ,

$$H^{r,s}(G) = L^2(0,T,H^r(\Omega)) \cap H^s(0,T,L^2(\Omega))$$

et de même les espaces $H^{r,s}(S_F \times ]0,T[\,)$. Pour les propriétés de ces espaces et notamment les théorèmes de trace, on se réfèrera à [4] . Nous noterons $|\,.\,|_r$, $|\,.\,|_{r,s}$ les normes dans $H^r(\Omega)$ et $H^{r,s}(G)$ quand il n'y a pas ambiguïté.

Pour $r > 0$, soit $X_T^r(\Omega)$ l'espace des fonctions $(u,q,\Phi)$ telles que :

(1.17) $$u \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(G) \text{ et } u = 0 \text{ sur } S_B \times (0,T)$$

(1.18) $$\nabla q \in H^{r,\frac{r}{2}}(G) \text{ et } q_{|S_F} \in H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T,L^2(S_f))$$

(1.19) $$\Phi_t \in H^{r+\frac{1}{2},\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F \times ]0,T[\,)\ ;\ \partial_\tau \Phi \in L^2(0,T,H^{r+\frac{1}{2}}(S_F))\ ;\ \Phi(0) = 0.$$

Nous supposerons que $S_B$ et $S_F$ ont respectivement pour équation $x_2 = \lambda + h_o(x_1)$ et $x_2 = h(x_1)$ où $\lambda \in \mathrm{IR}^{*-}$, où h et $h_o$ sont de classe $C^4$ sur IR, tendant vers 0 à l'infini et à dérivées bornées. Pour la régularité du problème linéarisé nous aurons besoin de l'hypothèse

$$|h|_{C_b^4(\mathrm{IR})} + |h_o|_{C_b^4(\mathrm{IR})} < \beta$$

où $\beta > 0$ est une constante qui sera déterminée plus loin. Sous ces conditions nous montrons le résultat d'existence suivant :

THEOREME 1.1. *Soit* r, $0 < r < {}^1\!/_2$ . *Si* $h \in H^{r+{}^5\!/_2}(\mathrm{IR})$, $u_1 \in H^{r+1}(\Omega)$ *avec les conditions de* *compatibilité* div $u_1 = 0$ *dans* $\Omega$, $u_1 = 0$ *sur* $S_B$, *alors il existe* $T > 0$ *dépendant de* $\Omega$ *et de* $u_1$ *tel que (1.10) - (1.16) a une solution* $(u,q,\Phi)$ *dans* $X_T^r(\Omega)$.

Pour montrer ce théorème, il nous faudra étudier le problème obtenu en linéarisant (1.10) - (1.16) au voisinage de $\eta = 0$ et $\Phi = 0$ qui est, si $\varphi = (1+h'^2)^{-1}\,\Phi$

(1.20) $$u_t - \nu\Delta u + \nabla q = f \text{ dans } \Omega \times (0,T)$$

(1.21) $$\operatorname{div} u = a \text{ dans } \Omega \times (0,T)$$

(1.22) $$\sigma(u,q) - \alpha\,\partial_\tau(\varphi N) = g \text{ sur } S_F \times (0,T)$$

(1.23) $$\varphi_t - \partial_\tau u\,.\,N = k \text{ sur } S_F \times (0,T)$$

(1.24) $$u = 0 \text{ sur } S_B \times (0,T)$$

(1.25) $$u = u_1 \text{ dans } \Omega \text{ pour } t = 0$$

(1.26) $$\varphi = 0 \text{ sur } S_F \text{ pour } t = 0$$

Le vecteur des contraintes $\sigma(u,q)$ sur $S_F$ est défini par $\sigma_i(u,q) = -\,q\,N_i + \nu(u_{i,j} + u_{j,i})N_j$.

Nous montrerons dans la partie 2 l'existence d'une solution faible du problème homogène (1.20) - (1.26) sur tout intervalle fini de temps. Pour obtenir des résultats de régularité, nous étudierons dans la partie 3 le cas où $\Omega$ est une bande $\mathbb{R} \times \,]\lambda,0[$ . Ensuite dans la partie 4 nous transposerons ces résultats pour le problème linéaire non homogène dans le cas où $\Omega$ est un ouvert vérifiant les hypothèses du Théorème 1.1. Après avoir estimé les termes non linéaires de (1.10) - (1.16), (partie 5), nous montrerons grâce à un théorème de point fixe, dans la partie 6, l'existence d'une solution pour un temps petit, ce qui achèvera la démonstration du Théorème 1.1.

## 2. - EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE DU PROBLEME LINEAIRE SUR $\Omega$

Nous allons donner une formulation faible de (1.20) - (1.26) dans le cas homogène, c'est-à-dire quand les fonctions $a,g,k,u_1$ sont nulles. Soient V,W,H les espaces de Hilbert suivants :

$V = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega,\ u = 0 \text{ sur } S_B,\ \partial_\tau u\,.\,N \in L^2(S_F)\}$ muni de la norme $|u|_V = \left(|u|^2_{H^1(\Omega)} + |\partial_\tau u\,.\,N|^2_{L^2(S_F)}\right)^{1/2}$

$$W = \{u \in H^1(\Omega)\ ;\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega,\ u = 0 \text{ sur } S_B\} \text{ muni de la norme de } H^1(\Omega),$$

$$H = \{u \in L^2(\Omega)\ ;\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega,\ u\ .\ N = 0 \text{ sur } S_B\} \text{ muni de la norme de } L^2(\Omega).$$

L'espace $\mathscr{V}$ des fonctions $C^\infty$ sur $\bar{\Omega}$, à support compact dans $\bar{\Omega}$, à divergence nulle dans $\bar{\Omega}$ et nulles sur $S_B$, est dense dans V, W, H (cf. [1]). Nous définissons des opérateurs $A \in \mathcal{L}(W,W')$ et $B \in \mathcal{L}(L^2(S_F),V')$ par

$$\forall u \in W,\ \forall v \in W \quad \langle Au,v\rangle = \sum_{i,j} \int_\Omega (u_{i,j} + u_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i})d\Omega$$

$$\forall v \in V,\ \forall \psi \in L^2(S_F) \quad \langle B\psi,v\rangle = \int_{S_F} \psi\ \partial_T v\ .\ N\, ds$$

Alors $\| u \| = \langle Au,u\rangle^{1/2}$ définit sur W une norme équivalente à celle de $H^1(\Omega)$ (cf. [2] p. 367). Considérons le problème suivant : Trouver $(u,\varphi)$ vérifiant :

$$u_t + \nu\, Au + \alpha\, B\varphi = f \tag{2.1}$$

$$\varphi_t - \partial_T u\ .\ N = 0 \tag{2.2}$$

$$u(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 \tag{2.3}$$

Le théorème suivant sera prouvé dans cette partie :

THEOREME 2.1. *Si* $f \in L^2(0,T,W')$ *il existe une unique solution* $(u,\varphi)$ *de (2.1) - (2.3) telle que* $u \in L^2(0,T,W)$ *et* $\varphi \in L^\infty(0,T,L^2(S_F))$. *De plus, on a*

$$|u|_{L^2(0,T,W)} + |\varphi|_{L^\infty(0,T,L^2(S_F))} \leqslant C\, |f|_{L^2(0,T,W')} \tag{2.4}$$

*où* C *est une constante positive indépendante de* $T \leqslant T_0$.

*Remarque.* La solution $(u,\varphi)$ vérifie alors $u_t \in L^2(0,T,V')$ et $\varphi_t \in L^2(0,T,H^{-1/2}(S_F))$. Les équations (2.3) ont donc un sens.

Pour prouver le théorème 2.1, nous approchons la solution $(u,\varphi)$ par des suites de Galerkin. Soient $(v_i)_{i \geqslant 1}$ une base dense de V, $(\psi_i)_{i \geqslant 1}$ une base dense de $L^2(S_F)$ et $(f^m)_{m \geqslant 1}$ une suite de fonctions de $C^0(0,T,W')$ qui converge vers f dans $L^2(0,T,W')$. Nous dirons que $(u^m,\varphi^m)$ est solution approchée de (2.1) - (2.3) si

$$u^m(t) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i^m(t) v_i \qquad \varphi^m(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_k^m(t)\psi_k \tag{2.5}$$

(2.6) $$(u_t^m,v_j)_H + \nu < Au^m,v_j > + \alpha < B\varphi^m,v_j > = < f^m,v_j >_{W',W}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

(2.7) $$(\varphi_t^m,\psi_\ell)_{L^2} - < B\psi_\ell,u^m > = 0, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant m$$

(2.8) $$\mu_j^m(0) = \lambda_\ell^m(0) = 0 \qquad 1 \leqslant j,\ell \leqslant m.$$

Ces équations équivalent à un système différentiel du premier ordre en dimension finie. Il existe donc une unique solution $(u^m,\varphi^m)$ de ce système où $u^m \in C^1(0,T,V)$ et $\varphi^m \in C^1(0,T,L^2(S_F))$. Grâce à une combinaison linéaire les équations (2.6) et (2.7) restent vraies si on remplace $v_j$ par $u^m$ et $\psi_\ell$ par $\varphi^m$ donc nous avons :

(2.9) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^m|_H^2 + \nu \|u^m\|_W^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}|\varphi^m|_{L^2(S_F)}^2 \leqslant |f^m|_{W'}\,|u^m|_W.$$

Ce qui entraîne après intégration

(2.10) $$\|u^m\|_{L^2(0,T,W)} \leqslant C\,|f^m|_{L^2(0,T,W')}$$

(2.11) $$|u^m|_{L^\infty(0,T,H)} + |\varphi^m|_{L^\infty(0,T,L^2(S_F))} \leqslant C\,|f^m|_{L^2(0,T,W')}$$

où les constantes C ne dépendent pas de $T \leqslant T_0$. Comme la suite $f^m$ converge vers f dans $L^2(0,T,W')$, les suites $(u^m)_{m \geqslant 1}$ et $(\varphi^m)_{m \geqslant 1}$ sont bornées indépendamment de m, respectivement dans les espaces $L^2(0,T,W) \cap L^\infty(0,T,H)$ et $L^\infty(0,T,L^2(S_F))$. Par conséquent, il existe des fonctions $(u,\varphi)$ telles qu'une sous-suite de $u^m$ converge vers u dans $L^2(0,T,W)$ faible et dans $L^\infty(0,T,H)$ faible * et qu'une sous-suite de $\varphi^m$ converge vers $\varphi$ dans $L^\infty(0,T,L^2(S_F))$ faible *.

Soit $\theta \in C^1(0,T)$ telle que $\theta(T) = 0$. Pour $j \leqslant m$ on a :

(2.12) $$-\int_0^T \theta'(t)(u^m,v_j)_H\,dt + \nu \int_0^T \theta(t) < Au^m,v_j > dt$$
$$+ \alpha \int_0^T \theta(t) < B\varphi^m,v_j > dt = \int_0^T \theta(t) < f^m,v_j >_{W',W} dt$$

Par passage à la limite cette égalité reste vraie en remplaçant $(u^m,\varphi^m)$ par $(u,\varphi)$ puis, étant donnée la densité de la base $(v_j)$ dans V, en remplaçant $v_j$ par un élément quelconque de V. Il en résulte que $(u,\varphi)$ vérifie (2.1) au sens des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans V', puis dans $L^2(0,T,V')$.

D'autre part, pour $\ell \leqslant m$, on a (si les fonctions $\psi_\ell$ sont assez régulières) :

(2.13) $$-\int_0^T \theta'(t)\,(\varphi^m,\psi_\ell)_{L^2(S_F)} dt = \int_0^T \theta(t)(\partial_\tau\, u^m . N, \psi_\ell)_{L^2(S_F)} dt$$

$$(2.14)\qquad -\int_0^T \theta'(t)\,(\varphi^m,\psi_\ell)_{L^2(S_F)}\,dt = \int_0^T \theta(t) < \partial_\tau u^m \,.\, N,\, \psi_\ell >_{H^{-1/2},H^{1/2}} dt$$

L'égalité (2.14) reste vraie en remplaçant $(u^m,\varphi^m)$ par $(u,\varphi)$. Nous pouvons supposer que $(\psi_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ est aussi une base dense de $H^{1/2}(S_F)$, ce qui permet de conclure que (2.2) est vrai au sens des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans $H^{-1/2}(S_F)$ puis dans $L^2(0,T,H^{-1/2}(S_F))$. Nous déduisons alors de (2.1) et (2.12) que pour tout j,

$$-\int_0^T \theta'(t)\,(u,v_j)_H\,dt - \int_0^T \theta(t) < u_t, v_j >_{V',V} dt = 0$$

d'où
$$\theta(0) < u(0), v_j >_{V',V} = 0 \quad \text{et} \quad u(0) = 0.$$

De même on montre que $\varphi(0) = 0$ dans $H^{-1/2}(S_F)$, ce qui permet de conclure que $(u,\varphi)$ est solution de (2.1) - (2.3).

Unicité de la solution : si f = 0 toute solution est-elle nulle ? Soit $(v, \psi)$ une solution de (2.1) - (2.3) avec f = 0, telle que $v \in L^2(0,T,W)$ et $\psi \in L^2(0,T,L^2(S_F))$. Si on pose $\tilde{v}(t) = \int_0^T v(t')dt'$ et $\tilde{\psi}(t) = \int_0^t \psi(t')dt'$ alors $\tilde{v}$ est dans $L^2(0,T,V)$. On peut donc «multiplier» $\tilde{v}_t + \nu A\tilde{v} + \alpha B\tilde{\psi} = 0$ par $\tilde{v}$, ce qui après intégration entraîne $(\tilde{v},\tilde{\psi}) = (0,0)$ et par suite $(v,\psi) = (0,0)$.

## 3. - REGULARITE DU PROBLEME LINEAIRE HOMOGENE SUR $\Sigma = ]\lambda,0[ \times IR$

Sur la bande $\Sigma$ nous obtenons facilement des résultats de régularité par la méthode des translations (dérivation en $x_1$). Cette méthode ne peut s'étendre à un ouvert $\Omega$ quelconque en utilisant des cartes locales à cause de la divergence, et parce que $\Omega$ est non borné.

Soit $\Pi$ la projection orthogonale de $L^2(\Sigma)$ sur H (sous-espace de $L^2(\Sigma)$ des fonctions à divergence nulle et à trace normale nulle sur $S_B$). Nous allons montrer le résultat de régularité suivant :

THEOREME 3.1. *Soit un réel* r, $0 \leqslant r \leqslant 2$, $r \neq 1$. $G_o = \Sigma \times ]0,T[$. *Si* $f \in H^{r,\frac{r}{2}}(G_o)$ *et si, lorsque* $1 < r \leqslant 2$, $\Pi f(0) = 0$, *alors dans le cas où* a, g, k, $u_1$ *sont nulles le problème (1.20) - (1.26) admet une solution unique* $(u,q,\varphi)$ *qui est dans* $X_T^r(\Sigma)$ *et vérifie*

$$|u,q,\varphi|_{X_T^r(\Sigma)} \leqslant C\,|f|_{H^{r,\frac{r}{2}}(G_o)}$$

*où* C *est une constante indépendante de* $T \leqslant T_o$.

Pour démontrer ce théorème nous étudierons d'abord le cas où r = 0, puis le cas où r = 2. Ensuite nous déduirons les autres cas par une interpolation. Nous aurons besoin pour la démonstration d'étendre à $\Sigma$ certains résultats classiques sur un ouvert borné.

### 3.1. - Résultats d'ordre général

LEMME 3.2. *Pour* $0 \leqslant r \leqslant 3$, *soient* $f \in H^r(\Sigma)$ *et* $b \in H^{r+\frac{1}{2}}(S_B)$. *Il existe une unique solution* $u \in H^{r+2}(\Sigma)$ *de* $\Delta u = f$ *dans* $\Sigma$, $u = 0$ *sur* $S_F$, $\partial_N u = b$ *sur* $S_B$. *La solution satisfait l'inégalité :*

$$|u|_{r+2} \leqslant C(|f|_r + |b|_{r+\frac{1}{2}}).$$

La démonstration de ce lemme se trouve p. 367 de [2] . Par la même méthode on peut montrer également que le problème de Stokes sur $\Sigma$ est régulier au sens suivant :

LEMME 3.3. *Soient des fonctions* $v \in H^1(\Sigma)$ *et* $p \in L^2(\Sigma)$, *et un réel* r, $0 \leqslant r \leqslant 2$, *tels que :* $-\nu\, \Delta v + \nabla p = f$ *dans* $\Sigma$, div v = a *dans* $\Sigma$ *et* v = g *sur* $\partial\Sigma$ *où* $f \in H^r(\Sigma)$, $a \in H^{r+1}(\Sigma)$ *et* $g \in H^{r+\frac{3}{2}}(\partial\Sigma)$. *Alors* $v \in H^{r+2}(\Sigma)$, $p \in H^{r+1}(\Sigma)$ *et*

$$|v|_{r+2} + |p|_{r+1} \leqslant C(|v|_1 + |p|_0 + |f|_r + |a|_{r+1} + |g|_{r+\frac{3}{2}}).$$

Pour exploiter la condition $\Pi f(0) = 0$ du théorème nous caractérisons H par :

LEMME 3.4.

$$H^{\perp} = \{\nabla p \,;\, p \in H^1(\Sigma),\ p = 0 \textit{ sur } S_F\} \tag{3.1}$$

*Démonstration.* Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble désigné au 2e membre de l'égalité (3.1). Pour tous $\varphi \in H$ et $\nabla p \in \mathcal{H}$ on a $(\varphi,\nabla p)_{L^2} = 0$ donc $\mathcal{H} \subset H^{\perp}$ et $H \subset \mathcal{H}^{\perp}$.

Réciproquement si $\varphi \in \mathcal{H}^{\perp}$ alors pour tout $p \in \mathscr{D}(\Sigma)$, $(\varphi,\nabla p)_{L^2(\Sigma)} = 0$ et div $\varphi = 0$ au sens des distributions sur $\Sigma$. On peut alors définir $\varphi \,.\, N$ dans $H^{-1/2}(\partial\Sigma)$, et pour tout $\nabla p \in \mathcal{H}$, $(\varphi,\nabla p)_{L^2(\Sigma)} = \langle \varphi \,.\, N, p \rangle_{H^{-1/2}(S_B), H^{1/2}(S_B)} = 0$.

Donc $\varphi \,.\, N = 0$ sur $S_B$ ce qui montre que $\mathcal{H}^{\perp} \subset H$ et par suite $\mathcal{H}^{\perp} = H$. Les 2 espaces $\mathcal{H}$ et H étant fermés dans $L^2(\Sigma)$ on en déduit que $H^{\perp} = \mathcal{H}$.

LEMME 3.5. *Il existe un opérateur linéaire* R *sur* $L^2(\Sigma)$, *borné, tel que si* $p \in L^2(\Sigma)$, w = Rp *vérifie*

$$(3.2) \qquad w \in H^1(\Sigma) \text{ et } w = 0 \text{ sur } S_B$$

$$(3.3) \qquad \operatorname{div} w = p$$

$$(3.4) \qquad \partial_\tau w \,.\, N \in L^2(S_F)$$

*Preuve.* Le lemme 3.2 affirme l'existence de $\Phi \in H^2(\Sigma)$ telle que $\Delta\Phi = p$ dans $\Sigma$, $\Phi = 0$ sur $S_F$, $\partial_N\Phi = 0$ sur $S_B$. On résoud alors l'équation $\theta_1 - \Delta'\theta_1 = \partial_N\Phi$ sur $S_F$, $\Delta'$ étant le Laplacien-Beltrami sur $S_F$. Comme ici $S_F = \mathbb{R}$ on a $\theta_1 \in H^{5/2}(S_F)$.

Nous savons qu'il existe $\theta \in H^2(\Sigma)$ telle que

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \partial_N\theta = -\partial_\tau \Phi \text{ sur } S_B$$

$$\theta = \partial_\tau \theta_1 \text{ et } \partial_N\theta = 0 \text{ sur } S_F$$

Alors $w = \nabla\Phi + \nabla \Lambda\, \theta$ vérifie (3.2) - (3.4) et le relèvement est continu. (On a $w = \theta_1 N$ sur $S_F$). Nous aurons besoin, pour étudier la régularité de la solution, d'approcher celle-ci par des fonctions plus régulières à la fois en temps et en espace. Nous utiliserons donc les deux lemmes suivants :

LEMME 3.6. *(i) Soit* $u \in H^1(\Sigma)$ *et* $u_\epsilon$ *définie pour* $\epsilon > 0$ *par*

$$(3.5) \qquad u_\epsilon(x_1,x_2) = \frac{1}{\epsilon}[u(x_1+\epsilon,x_2) - u(x_1,x_2)]\,.$$

*Alors la suite* $u_\epsilon$ *converge vers* $\partial_1 u$ *dans* $L^2(\Sigma)$ *quand* $\epsilon$ *tend vers* 0 *et*

$$(3.6) \qquad |u_\epsilon - \partial_1 u|_{L^2} \leqslant C\,\epsilon\, |u|_{H^1}$$

*(ii) Si* u *est seulement dans* $L^2(\Sigma)$ *alors* $u_\epsilon$ *converge vers* $\partial_1 u$ *dans* $(H^1(\Sigma))'$ *le dual de* $H^1(\Sigma)$ *et*

$$(3.7) \qquad |u_\epsilon - \partial_1 u|_{(H^1)'} \leqslant C\,\epsilon\, |u|_{L^2}.$$

*Preuve.* (i) est un résultat classique obtenu par transformation de Fourier. Pour (ii) on remarque que si $u \in L^2(\Sigma)$ alors $\partial_1 u \in (H^1(\Sigma))'$ et si $v \in H^1(\Sigma)$, $< u_\epsilon - \partial_1 u, v >_{(H^1)',H^1} = -(u, v_\epsilon - \partial_1 v)_{L^2}$ On utilise alors (i) pour v.

LEMME 3.7. *Pour* $g \in L^2(0,T,X)$ *où* X *est un espace de Hilbert, nous considerons la suite de fonctions* $g^\delta = G^\delta * \rho^\delta$ *où, ayant posé* $g(t) = 0$ *pour* $t < 0$ *et* $t > T$,

$$(3.8) \qquad G^\delta(t) = \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^{t} g(t')dt'$$

*et où* $\rho^\delta(t) = \frac{1}{\delta}\ \rho(\frac{t}{\delta})$ , $\rho$ *étant une fonction* $C^\infty$, *positive sur* IR, *à support dans* $]0,1[$ *et telle que* $\int_0^1 \rho(t')dt' = 1$.

*Alors* $g^\delta$ *converge vers* g *dans* $L^2(0,T,X)$ *quand* $\delta$ *tend vers* 0.

Ce lemme est la conséquence de la convergence des suites $G^\delta$ (cf. lemme précédent) et $g * \rho^\delta$ vers g dans $L^2(0,T,X)$. Remarquons que si g est la dérivée en temps d'une fonction de $L^2(0,T,Y)$ alors $g^\delta \in C^\infty(0,T,Y)$. D'autre part, si $g \in H^1(0,T,X)$ et $g(0) = 0$ alors

$$(g^\delta)_t = (g_t)^\delta \tag{3.9}$$

**3.2. - Démonstration du Théorème 3.1 pour r = 0**

Nous supposons ici que $f \in L^2(0,T,L^2(\Sigma))$. Soit $(u,\varphi)$ la solution de (2.1) - (2.3) dans $\Sigma$. Soient $u_\epsilon$, $\varphi_\epsilon$, $f_\epsilon$ les fonctions définies à partir de u, $\varphi$, f par (3.5). Le couple $(u_\epsilon,\varphi_\epsilon)$ est solution d'un problème du type (2.1) - (2.3) avec pour second membre $f_\epsilon$ donc

$$|u_\epsilon|_{L^2(0,T,W)} + |\varphi_\epsilon|_{L^\infty(0,T,L^2(S_F))} \leqslant C\ |f_\epsilon|_{L^2(0,T,W')}$$

Le membre de droite de cette inégalité est majoré indépendamment de $\epsilon$ par $C\ |f|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))}$. Une sous-suite de $u_\epsilon$ converge donc faiblement vers une fonction $u^1$ dans $L^2(0,T,W)$. De même une sous-suite de $\varphi_\epsilon$ converge vers une fonction $\varphi^1$ dans $L^\infty(0,T,L^2(S_F))$ faible *. Or on a au sens des distributions nécessairement $u^1 = \partial_1 u$ et $\varphi^1 = \partial_1\varphi$. Il en résulte que $u_{|S_F} \in L^2(0,T,H^{3/2}(S_F))$ car $u^1{}_{|S_F} \in L^2(0,T,H^{1/2}(S_F))$, et $\varphi \in L^\infty(0,T,H^1(S_F))$. D'après (2.2) on a alors $\varphi_t \in L^2(0,T,H^{1/2}(S_F))$. Ces fonctions sont toutes majorées en norme par $C\ |f|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))}$ où C est une constante indépendante de $T \leqslant T_o$.

Pour étudier la régularité en temps nous construisons des suites $u^\delta$, $\varphi^\delta$, $f^\delta$ grâce au lemme 3.7. Alors $u^\delta_t + \nu\ Au^\delta + \alpha\ B\varphi^\delta = f^\delta$ et nous pouvons multiplier cette égalité par $u^\delta_t$ qui est dans $L^2(0,T,V)$ :

$$|u_t^\delta|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|u^\delta\|^2_W + \alpha\int_{S_F} \varphi^\delta\ \partial_\tau\ u_t^\delta\ .\ N\ dS = \int_\Sigma f^\delta\ u_t^\delta\ d\Sigma \tag{3.10}$$

Nous allons intégrer cette égalité entre 0 et t. Que devient l'intégrale $I = \int_0^t\int_{S_F} \varphi^\delta\ \partial_\tau\ u^\delta\ .\ N\ ds$ ?

$$I = \int_0^t\int_{S_F} \varphi^\delta\ \varphi^\delta_{tt}\ dS\ dt = -\ |\varphi_t^\delta|^2_{L^2(0,t,L^2(S_F))} + \int_{S_F} (\varphi^\delta\ \varphi^\delta_t)(t)dS$$

D'autre part,

$$\int_{S_F} (\varphi^\delta \varphi_t^\delta)(t)dS = <\varphi_t^\delta, \varphi^\delta>_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \leqslant C \, \| u^\delta(t) \|_W \, |\varphi^\delta(t)|_{1/2}$$

Alors, en utilisant le lemme 3.7 et les estimations trouvées précédemment sur $u_{|S_F}$ et $\varphi$ nous déduisons de (3.10)

$$\text{(3.11)} \qquad |u_t^\delta|^2_{L^2(0,t,L^2(\Sigma))} + \frac{\nu}{2} \| u^\delta(t) \|^2_W \leqslant C \, |f|^2_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))} +$$

$$C \, |f|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))} \left[ |u_t^\delta|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))} + \| u^\delta(t) \|_W \right].$$

Il en résulte que $u_t^\delta$ est bornée dans $L^2(0,T,L^2(\Sigma))$ et par suite $u_t \in L^2(0,T,L^2(\Sigma))$ avec

$$\text{(3.12)} \qquad |u_t|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))} \leqslant C \, |f|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))}.$$

Pour chaque temps $t \in \, ]0,T[$ nous définissons maintenant une pression q comme la solution dans $L^2(\Sigma)$ du problème coercif

$$\forall \, p \in L^2(\Sigma) \quad \int_\Sigma p \, q \, d\,\Sigma =$$

$$\int_\Sigma (f - u_t) w \, d\,\Sigma - \nu \int_\Sigma (u_{i,j} + u_{j,i})(w_{i,j} + w_{j,i}) d\Sigma - \alpha \int_{S_F}^{\varphi} \partial_\tau \, w \, . \, N \, dS$$

où w et p sont liées par le relèvement (3.2) - (3.4). On vérifie que la fonction q ainsi définie est telle que

$$|q|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))} \leqslant C \, |f|_{L^2(0,T,L^2(\Sigma))}.$$

L'égalité (1.20) est alors vraie au sens des distributions. Le lemme 3.3 permet de dire que $u \in L^2(0,T,H^2(\Sigma))$ et $q \in L^2(0,T,H^1(\Sigma))$. Des conditions aux bords nous déduisons que $\varphi$ est au moins dans $H^{3/2,5/4}(S_F \times \, ]0,T[\,)$ donc $\partial_\tau \, \varphi$ et $q_{|S_F}$ sont dans $H^{1/2,1/4}(S_F \times \, ]0,T[\,)$. La continuité par rapport à f se déduit de la démonstration.

**3.3. - Démonstration du Théorème 3.1 dans le cas $r \neq 0$.**

Nous commencerons par le cas $r = 2$, c'est-à-dire quand :

$$\text{(3.17)} \qquad f \in H^{2,1}(G_o) \text{ et } \Pi \, f(0) = 0$$

Soit K l'opérateur qui à $f \in H^{o,o}(G_o)$ associe $(u,q,\varphi) \in X_T^o(\Sigma)$ la solution de (1.20) - (1.26) quand a, g, k, $u_1$ sont nulles.

Si f vérifie (3.17) alors $f_t \in H^{o,o}(G_o)$ et d'après le lemme 3.4, $f(0) = \nabla q_o$ où $q_o \in H^1(\Sigma)$ et $q_o = 0$ sur $S_F$. De plus, $(v,p,\psi) = Kf_t$ est dans $X_T^o(\Sigma)$, et si on pose

$$v^1(t) = \int_0^t v(t')dt' \qquad p^1(t) = \int_0^t p(t')dt' \qquad \psi^1(t) = \int_0^t \psi(t')dt'$$

alors $$(v^1,p^1,\psi^1) = K(f - \nabla q_o)$$

donc $$(v^1,p^1 + q^o,\psi^1) = Kf$$

Nous en déduisons que $(u,q,\varphi) = Kf$ vérifie alors :

(3.18) $$(u_t, q_t, \varphi_t) \text{ est dans } X_T^o(\Sigma).$$

D'autre part en réitérant la méthode utilisée pour r = 0 (approximation de $\partial_1 u$) nous pouvons montrer que $u_{|S_F} \in L^2(0,T,H^{7/2}(S_F))$.

Le problème de Stokes étant régulier sur $\Sigma$ (Lemme 3.2) nous en déduisons que

$$u \in L^2(0,T,H^4(\Sigma)) \quad \text{et} \quad q \in L^2(0,T,H^3(\Sigma))$$

ce qui entraîne avec (3.18) que $(u,q,\varphi) \in X_T^2(\Sigma)$, la solution étant continue par rapport a f. Pour $0 < r < 2$, $r \neq 1$, nous déduisons le théorème des cas précédents par une interpolation de l'opérateur K. (Si r = 1 la condition $\Pi f(0) = 0$ induit une condition supplémentaire).

## 4. - LE PROBLEME LINEAIRE NON HOMOGENE

Nous allons résoudre (1.20) - (1.26) dans $\Sigma = \mathbb{R} \times ]\lambda,0[$ en relevant toutes les conditions aux limites.

Ensuite grâce à un changement de variables nous considèrerons le problème sur $\Omega$ comme une perturbation du problème sur $\Sigma$. Cette méthode appelle des commentaires qui seront donnés à la fin de cette partie.

Remarquons que si $v \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(G)$ où $G = \Omega \times ]0,T[$ et si v = 0 sur $S_B$ alors

$$\operatorname{div} v \in L^2(0,T,H^{r+1}(\Omega)) \cap H^{\frac{r}{2}+1}(0,T,oH^{-1}(\Omega)) = \widetilde{K}^r(G)$$

où $oH^{-1}(\Omega)$ est le dual de ${}^{o}H^{1}(\Omega)=\{p\in H^{1}(\Omega)\ ;p=0 \text{ sur } S_F\}$.

Nous noterons alors $Y_T^r(\Omega)$ l'espace des $(a,g,k,u_1)$ tels que

(4.1) $$a\in\widetilde{K}^r(G),\ g \text{ et } k\in H^{r+\frac{1}{2},\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F\times\ ]0,T[),\quad u_1\in H^{r+1}(\Omega)$$

avec les conditions de compatibilité

(4.2) $$\operatorname{div} u_1=a(0)\quad \text{dans } \Omega\ ;\quad u_1=0 \text{ sur } S_B.$$

Sous les hypothèses sur $\Omega$ du Théorème 1.1 nous allons montrer le :

THEOREME 4.1. *Soit* L *l'opérateur continu de* $X_T^r(\Omega)$ *sur* $Y_T^r(\Omega)$ *défini par* $L(u,q,\varphi)=(f,a,g,k,u_1)$ *avec (1.20) - (1.26). Alors si* $0<r<\frac{1}{2}$ *l'opérateur* L *est inversible et* $L^{-1}$ *est continu et borné indépendamment de* $T\leqslant T_o$.

### 4.1. - Relèvements des termes non homogènes dans la bande $\Sigma=\mathbb{R}\times\ ]\lambda,0[$

Nous voulons montrer que si $(0,a,g,k,u_1)\in Y_T^r(\Sigma)$ alors il existe $(v,p,\psi)\in X_T^r(\Sigma)$ tel que

(4.1) $$\operatorname{div} v=a \text{ dans } \Sigma,\quad \sigma(v,p)-\partial_\tau(\psi_N)=g \text{ sur } S_F,$$

(4.2) $$\psi_t-\partial_\tau v\,.\,N=k\ \text{ sur } S_F\ \text{ et }\ v(0)=0 \text{ dans } \Sigma.$$

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme de prolongement qui suit. La démonstration (par réflexions) en est classique ([4] p. 17, [2] p. 365).

LEMME 4.2. *Soit* X *un espace de Hilbert. Pour* $0\leqslant s\leqslant 2$, $s-\frac{1}{2}$ *n'étant pas entier, il existe un opérateur continu de prolongement de* $\{v\in H^s(0,T,X),\ \partial_t^k\ v(0)=0,\ 0\leqslant k<s-\frac{1}{2}\}$ *sur* $H^s(0,\infty,X)$, *de norme bornée indépendamment de* T.

Soient $T_o>0$, $r, 0<r<\frac{1}{2}$ et $T\leqslant T_o$. Il existe $v^1\in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(\Sigma\times\ ]0,T_o[)$ tel que

$$v^1=0 \text{ sur } S_B\quad\text{et}\quad v^1(0)=u_1 \text{ dans } \Sigma.$$

Nous allons relever la divergence. Comme à l'instant initial $a-\operatorname{div} v^1$ est nulle, le lemme 4.2 permet de prolonger cette fonction sur IR en une fonction a' telle que :

$$|a'|_{\widetilde{K}(\Sigma\times \mathbb{R})}\leqslant C\ |a-\operatorname{div} v^1|_{\widetilde{K}(\Sigma\times\ ]0,T[\,)}$$

où C ne dépend pas de T.

Si $\hat{a}'$ désigne la transformée de Fourier de a' en temps, soit $\hat{\Phi}(s)$ la solution du problème $\Delta\hat{\Phi}(s) = \hat{a}'(s)$ dans $\Sigma$, $\hat{\Phi}(s) = 0$ sur $S_F$ et $\partial_N \hat{\Phi}(s) = 0$ sur $S_B$ alors $\hat{\Phi}(s) \in H^{r+3}(\Sigma)$ et $|\hat{\Phi}(s)|_{r+3} \leqslant C\ |\hat{a}(s)|_{r+1}$. Comme pour tout $\theta \in {}^oH^1(\Sigma)$, $(\nabla\ \hat{\Phi}(s),\nabla\theta)_{L^2(\Sigma)} = -<\hat{a}(s),\theta>_{{}^oH^{-1},{}^oH^1}$ nous avons : $|\nabla\ \hat{\Phi}(s)|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\ |\hat{a}(s)|_{{}^oH^{-1}}$.

Il en résulte que si $v^2 = \nabla\ \Phi$ où $\Phi$ est la transformée de Fourier inverse de $\hat{\Phi}$ alors

$$v^2 \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(\Sigma \times\ ]0,T_o[\ ),\ \mathrm{div}\ v^2 = a' \text{ dans } \Sigma,\quad v^2(0) = 0 \text{ dans } \Sigma$$

et
$$|v^2|_{r+2,\frac{r}{2}+1} \leqslant C\ |a - \mathrm{div}\ v^1|_{\tilde{K}^r}$$

où C ne dépend pas de T.

(Cette démonstration reprend celle de J.T. Beale p. 376 de [2] ).

Remarquons que $v^2$ n'est pas nulle sur $S_B$ . Pour pallier à cet inconvénient nous ajoutons à $v^2$ un rotationnel $\nabla \wedge \theta^2 = (\partial_2\theta^2, -\partial_1\theta^2)$ tel que :

$$\theta^2(0) = 0 \text{ dans } \Sigma,\quad \theta^2 = 0 \text{ et } \partial_N\theta^2 = -\partial_\tau\ \Phi \text{ sur } S_B.$$

La fonction $\Phi$ en tant que transformée de Fourier inverse est définie sur IR. Il nous est donc possible de trouver $\theta^2$ dans $H^{r+3,\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}(\Sigma \times\ ]0,T_o[\ )$. En fin de compte la fonction $v^3 = v^1+v^2+\nabla \wedge \theta^2$ est telle que :

$$v^3 \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(\Sigma \times\ ]0,T_o[\ )$$

(4.3) $$\mathrm{div}\ v^3 = a \text{ dans } \Sigma \times\ ]0,T[$$

(4.4) $$v^3(0) = u_1 \text{ dans } \Sigma$$

(4.5) $$v^3 = 0 \text{ sur } S_B$$

et
$$|v^3|_{r+2,\frac{r}{2}+1} \leqslant C\ (\ |u_1|_{r+1} + |a|_{\tilde{K}^r})$$

où C est indépendante de $T \leqslant T_o$.

Nous allons maintenant relever les conditions aux bords sur $S_F$. Les fonctions g et k étant dans $H^{r+\frac{1}{2},\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(\Sigma \times\ ]0,T[\ )$ nous les prolongeons sur $]0,T_o[$ . (La condition $r<\frac{1}{2}$ permet d'utiliser un opérateur de prolongement borné indépendamment de T).

Soit $\psi \in H^{r+\frac{5}{2},\frac{r}{2}+\frac{5}{4}}(S_F \times ]0,T_o[)$ la solution de :

(4.6) $$\psi_t - \Delta'\psi = k + \partial_\tau v^3 . N \; ; \; \psi(0) = 0.$$

Nous cherchons une fonction $v^4$ vérifiant (4.3) - (4.5) et en plus $\psi_t - \partial_\tau v^4 . N = k$ sur $S_F$. Pour cela il suffit de poser $v^4 = v^3 + \nabla \Lambda \theta^4$ où :

$$\theta^4(0) = 0 \text{ dans } \Sigma \; ; \; \theta^4 = \partial_N \theta^4 = 0 \text{ sur } S_B \; ; \; \theta^4 = \psi \text{ sur } S_F.$$

On peut trouver $\theta^4$ dans $H^{r+3,\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}(\Sigma \times ]0,T_o[)$ et ainsi $v^4 \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(\Sigma \times ]0,T_o[)$.

Quant aux contraintes g, nous remarquons que si $v^5 = \nabla \Lambda \theta^5$ est nulle sur $S_F$ alors $\sigma_{tan}(v^5) = -\nu \partial_N^2 \theta^5$. Nous choisissons donc $\theta^5 \in H^{r+3,\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}(\Sigma \times ]0,T_o[)$ telle que $\theta^5(0) = 0$ ; $\theta^5 = \partial_N \theta^5 = 0$ sur $S_F$ et $S_B$, $-\nu \partial_N^2 \theta^5 = g_{tan} - \sigma_{tan}(v^4)$ sur $S_F$. Nous relevons ensuite la partie normale de g sur $S_F$ grâce à la pression sur $]0,T_o[$.

En fin de compte, en posant $v = v^5 + v^4$ et p la pression utilisée pour $g_{norm}$, $(v,p,\psi) \in X_T^r(\Sigma)$ et vérifie (4.1) - (4.2). De plus

$$|v,p,\psi|_{X_T^r(\Sigma)} \leqslant C \, |0,a,g,k,u_1|_{Y_T^r(\Sigma)}$$

où C est indépendante de $T \leqslant T_o$. Nous pouvons donc passer de (1.20) - (1.26) à un problème homogène que nous savons résoudre.

### 4.2 - Résolution du problème linéaire non homogène sur $\Omega$

Nous avons supposé que l'ouvert $\Omega$ était défini par : $\Omega = \{(x_1,x_2) \in IR^2 \; ; \lambda + h_o(x_1) < x_2 < h(x_2)\}$ où $\lambda$ est une constante ($\lambda < 0$) et où $h_o$ et h sont des fonctions de classe au moins $C^4$ sur IR et bornées. On fait le changement de variables :

(4.7) $$x'_1 = x_1 \qquad x'_2 = \lambda \, \frac{h(x_1) - x_2}{h(x_1) - h_o(x_1) - \lambda}$$

qui est un isomorphisme de $\Omega$ sur $\Sigma = IR \times ]\lambda,0[$.

Soient $\tilde{u}, \tilde{q}, \tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{a}, \tilde{g}, \tilde{k}, \tilde{u}_1$ les fonctions définies sur $\Sigma$ à partir de u, q, $\varphi$... grâce à la transformation (4.7) :

$$\tilde{u}(x'_1,x'_2) = u(x_1,x_2).$$

Nous noterons $\widetilde{S}_F$ et $\widetilde{S}_B$, dans cette partie les surfaces $\widetilde{S}_F : x'_2 = 0$ et $\widetilde{S}_B : x'_2 = \lambda$. Nous distinguerons l'opérateur L défini de $X^r_T(\Omega)$ sur $Y^r_T(\Omega)$ au Théorème 4.1 de l'opérateur (que nous noterons $L_o$) défini de $X^r_T(\Sigma)$ sur $Y^r_T(\Sigma)$ par les mêmes égalités sur $\Sigma$.

Alors l'égalité $L(u,q,\varphi) = (f,a,g,k,u_1)$ dans $\Omega$ est transformée en $(L_o + \delta L_o)(\widetilde{u}, \widetilde{q}, \widetilde{\varphi}) = (\widetilde{f},...,\widetilde{u}_1)$ dans $\Sigma$ où $\delta L_o$ est un opérateur linéaire continu de $X^r_T(\Sigma)$ sur $Y^r_T(\Sigma)$ vérifiant :

(4.8) $$\|\delta L_o\| \leqslant C\,(\,|h|_{C^4_b(IR)} + |h_o|_{C^4_b(IR)})$$

où C ne dépend pas de T.

Comme nous avons montré que $L_o$ était inversible, il en résulte que si $C(\,|h| + |h_o|)$ est inférieur à $\dfrac{1}{\|L_o^{-1}\|}$ (qui ne dépend pas de $T \leqslant T_o$) alors $L_o + \delta L_o$ est inversible, et par conséquent L aussi, avec $\|L^{-1}\| \leqslant C$ où C est une constante ne dépendant pas de $T \leqslant T_o$.

4.3. - Commentaires

Cette méthode impose des hypothèses fortes sur l'ouvert $\Omega$ mais retenons que ces hypothèses ne servent que pour étudier la régularité du problème linéaire, ce qui laisse l'espoir de pouvoir les amoindrir.

Une méthode qui semble naturelle aurait été d'étudier directement l'opérateur $L_o + \delta L_o$ sur $\Sigma$. Pour résoudre $(L_o + \delta L_o)(\widetilde{u}, \widetilde{q}, \widetilde{\varphi}) = (\widetilde{f},0,0...0)$ l'existence d'une solution faible se montre sans difficultés lorsque $\widetilde{f} \in L^2(0,T,{}^oH^{-1}(\Sigma))$ où ${}^oH^{-1}(\Sigma)$ est le dual des fonctions de $H^1(\Sigma)$ nulles sur $\widetilde{S}_B$. Mais nous n'avons à ce stade aucun renseignement sur la pression. Est-elle seulement dans $L^2_{loc}(\Sigma)$ ?. Aussi, lorsque $\widetilde{f} \in L^2(0,T,L^2(\Sigma))$ nous ne pouvons obtenir d'estimations sur $\partial_1 \widetilde{u}$ (qui n'est plus la solution faible, comme $\widetilde{u}$, d'un problème variationnel) et donc sur la trace de $\widetilde{u}$ sur $\widetilde{S}_F$, car l'espace des fonctions transformées de V par (4.7) n'est pas stable par dérivation par rapport à $x'_1$.

## 5. - ESTIMATIONS DES TERMES NON LINEAIRES

### 5.1. - Calcul des termes non linéaires. Théorème

Reprenons le problème non linéaire (1.10) - (1.16) dans $\Omega$. Si $(u,q,\Phi) \in X^r_T(\Omega)$ nous désignons par $M(u,q,\Phi)$ les premiers membres des égalités (1.10) - (1.13), (1.15). Nous avons linéarisé le problème, c'est-à-dire que si on pose

$$M(u,q,\Phi) = M(0,0,0) + L\left(u,q,\frac{\Phi}{1+h'^2}\right) + E(u,q,\Phi) \tag{5.1}$$

l'opérateur E ainsi construit doit être «petit» pour T assez petit, ce que nous allons montrer au voisinage d'un point $(u^o,q^o,\Phi^o)$ donné. Précisons l'opérateur E. Nous notons $\xi_{ij}$ les coefficients $\overline{\xi_{ij}} - \delta_{ij}$. Pour l'équation de la dynamique nous avons

$$E^1_i(u,q,\Phi) = -\nu\xi_{kj}\,\partial_k\,[(\delta_{\ell j} + \xi_{\ell j})u_{i,\ell}] - \nu\,\partial_j(\xi_{\ell j}\,u_{i,\ell}) + \xi_{ki}\,\partial_k q \tag{5.2}$$

Correspondant à la divergence, il reste :

$$E^2(u,q,\Phi) = \xi_{kj}\,u_{j,k} \tag{5.3}$$

Pour les contraintes sur $S_F$ :

$$\begin{aligned} E^3_i(u,q,\Phi) = &-q\,(\mathcal{N}_i - N_i) + \nu\,[\xi_{kj}\,u_{i,k} + \xi_{ki}\,u_{j',k}]\,N_j \\ &+ \nu\,[(\delta_{kj} + \xi_{kj})u_{i,k} + (\delta_{ki} + \xi_{ki})u_{j,k}][\mathcal{N}_j - N_j] \\ &+ gx_2\,(\mathcal{N}_i - N_i) + g\,\eta_2\,\mathcal{N}_i + \alpha\,\partial_\tau\,Q_i \end{aligned} \tag{5.4}$$

avec :

$$Q_1 = (1 + h'^2)^{-1/2}\left[\left(1 + \frac{2h'\Phi + \Phi^2}{1 + h'^2}\right)^{-1/2} - 1 + \frac{h'\Phi}{1 + h'^2}\right] \tag{5.5}$$

$$Q_2 = -h'\Phi^2\,(1 + h'^2)^{-3/2} + (\Phi + h')Q_1 \tag{5.6}$$

Pour l'équation définissant $\Phi$ il reste :

$$\begin{aligned} E^4(u,q,\Phi) = &-\partial_\tau\,u\,.\,N\,[(N_2 + \partial_\tau\,\eta_1)^{-2} - N_2^{-2}\,] \\ &-(N_2 + \partial_\tau\,\eta_1)^{-2}\,(\partial_\tau\,u_2\,\partial_\tau\,\eta_1 - \partial_\tau\,u_1\,\partial_\tau\,\eta_2) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Pour la vitesse initiale, il n'y a pas de terme non linéaire :

$$(5.8) \qquad E^5(u,q,\Phi) = 0.$$

Soit $(u^o,q^o,\Phi^o)$ un élément de $X^r_{T_o}(\Omega)$ pour un certain $T_o > 0$ fixé. Le but de cette partie est d'estimer $E(u,q,\Phi)$ sur la boule de $X^r_T(\Omega)$ définie par $u = u^o + v$, $q = q^o + p$, $\Phi = \Phi^o + \psi$ avec

$$(5.9) \qquad v(0) = 0\ ;\ \ |v, p, \psi|_{X^r_T} \leqslant R$$

où R est un réel strictement positif donné.

THEOREME 5.1. $0 < r < 1/2$. *Il existe* $\epsilon > 0$ *et* $T'_o$, $0 < T'_o \leqslant T_o$, *dépendant de* $(u^o, q^o, \Phi^o)$ *et* R, *tels que pour* $T < T'_o$, *si* $(v,p,\psi)$ *vérifie (5.9) alors* $E(u^o + v, q^o + p, \Phi^o + \psi)$ *est dans* $Y^r_T(\Omega)$ *et*

$$(5.10) \qquad |E^i(u^o + v, q^o + p, \Phi^o + \psi)|_{Y^r_T} \leqslant CT^\epsilon \qquad i = 1,\dots,5\ ;\ i \neq 2$$

$$(5.11) \qquad |E^2(u^o + v, q^o + p, \Phi^o + \psi) - E^2(u^o,q^o,\Phi^o)|_{\tilde{K}^r(G)} \leqslant CT^\epsilon$$

*Si* $(v',p',\psi')$ *vérifie aussi (5.9), on a de plus*

$$(5.12) \qquad |E(u^o + v, q^o + p, \Phi^o + \psi) - E(u^o + v', q^o + p', \Phi^o + \psi')|_{Y^r_T}$$
$$\leqslant CT^\epsilon\,|v - v', p - p', \psi - \psi'|_{X^r_T}$$

*Les constantes* C *dépendent de* r, R, $(u^o,q^o,\Phi^o)$ *mais pas de* $T \leqslant T'_o$.

Pour pouvoir multiplier certaines fonctions entre elles, et pour faire apparaître le coefficient $T^\epsilon$ nous utiliserons les lemmes suivants :

**5.2. - Lemmes généraux**

LEMME 5.2. *Soit* $T_o > 0$ *et* $T \leqslant T_o$. *Pour* $v \in L^2(0,T,X)$ *on définit* $V \in H^1(0,T,X)$ *par*

$$V(t) = \int_0^t v(t')dt'$$

*Supposons* $0 < s < 1/2$ *et* $0 \leqslant \epsilon < s$. *Alors* $v \to V$ *est un opérateur borné de* $H^s(0,T,X)$ *dans* $H^{s+1-\epsilon}(0,T,X)$ *et*

$$|V|_{s+1-\epsilon} \leqslant C_o T^{\epsilon} |v|_s$$

*où* $C_o$ *est indépendante de* $T$ *pour* $0 < T \leqslant T_o$.

La démonstration de ce lemme se trouve p. 365 de [2].

LEMME 5.3. *Soit* $r, \frac{1}{2} < r \leqslant 1$, *et* $s$, $s < r$ *et* $s \neq \frac{1}{2}$. *Si* $f \in H^r(0,T,X)$ *et* $f(0) = 0$ *alors* $f \in H^s(0,T,X)$ *et*

$$|f|_{H^s(0,T,X)} \leqslant C\, T^{r-s} |f|_{H^r(0,T,X)}$$

*où* $C$ *est indépendante de* $T \leqslant T_o$.

*Démonstration.* Il existe un prolongement $\tilde{f}$ de $f$ dans $H^r_o(0,+\infty,X)$ tel que l'opérateur $f \mapsto \tilde{f}$ soit borné indépendamment de T (lemme 4.2). Nous savons que l'application $\tilde{f} \mapsto t^{-r}\tilde{f}$ est continue de $H^r_o(0,+\infty, X)$ dans $L^2(0,+\infty, X)$ (Théorème 11.3 p. 65 de [8]) donc

$$T^{-r} |f|_{L^2(0,T,X)} \leqslant |t^{-r}\tilde{f}|_{L^2(0,+\infty,X)} \leqslant C |f|_{H^r(0,T,X)}$$

où C ne dépend pas de T. En utilisant l'inégalité d'interpolation

$$|f|_{H^s(0,T,X)} \leqslant C |f|_{L^2(0,T,X)}^{\frac{r-s}{r}} |f|_{H^r(0,T,X)}^{\frac{s}{r}}$$

nous obtenons

$$|f|_{H^s(0,T,X)} \leqslant C\, T^{r-s} |f|_{H^r(0,T,X)}$$

LEMME 5.4. $0 \leqslant r \leqslant 4$

*(i)* *pour* $p \leqslant \frac{1}{2} r$, $H^{r,\frac{r}{2}}(G)$ *est un sous-espace de* $H^p(0,T,H^{r-2p}(\Omega))$ *et l'injection du premier espace dans le second est continue.*

*(ii)* *La restriction de cette injection au sous-espace*

$$\left\{ v \in H^{r,\frac{r}{2}}(G);\ \partial_t^k v(0) = 0\,, \quad 0 \leqslant k < \frac{1}{2}(r-1) \right\}$$

*(où* $r$ *n'est pas un entier impair) est bornée indépendamment de* $T$.

LEMME 5.5.

*(i)* $r > 1$ *et* $r \geqslant s \geqslant 0$. *Si* $v \in H^r(\Omega)$ *et* $w \in H^s(\Omega)$ *alors* $v\,w \in H^s(\Omega)$ *et*

$$|v\,w|_s \leqslant C |v|_r\, |w|_s$$

*(ii)* $r > 1$. *Si* $v \in H^r(\Omega)$ *et* $w \in oH^{-1}(\Omega)$ *alors* $v\,w \in oH^{-1}(\Omega)$ *et :*

$$|v\,w|_{-1} \leqslant C\,|v|_r\,|w|_{-1}$$

*(iii)* *Si* v *et* w *sont dans* $H^1(\Omega)$ *alors* $v\,w \in L^2(\Omega)$ *et*

$$|v\,w|_o \leqslant C\,|v|_1\,|w|_1$$

*(iv)* *Si* $v \in H^1(\Omega)$ *et* $w \in L^2(\Omega)$ *alors* $v\,w \in oH^{-1}(\Omega)$ *et*

$$|v\,w|_{-1} \leqslant C\,|v|_1\,|w|_o$$

LEMME 5.6. *Soient* X, Y, Z *des espaces de Hilbert et une «multiplication»* $M : X \times Y \to Z$ *bornée, bilinéaire.*

*(i)* *Soient* $v \in H^s(0,T,X)$ *et* $w \in H^s(0,T,Y)$ *avec* $s > {}^1/2$. *Si on définit* v w *par* $(v\,w)(t) = M(v(t),w(t))$ *alors* v w *est dans* $H^s(0,T,Z)$ *et* $|v\,w|_s \leqslant C\,|v|_s\,|w|_s$.

*(ii)* *Si* $s \leqslant 2$ *et* v, w *satisfont à* $\partial_t^k\,v(0) = \partial_t^k\,w(0) = 0$ , $0 \leqslant k < s - {}^1/2$ *et si* $s - {}^1/2$ *n'est pas entier alors la constante* C *de (i) peut-être choisie indépendante de* $T > 0$.

Ces trois derniers lemmes sont démontrés p. 366 de [2] avec la seule différence que $\Omega$ est un ouvert de $IR^2$ et pas de $IR^3$.

**5.3. - Etude de l'opérateur $E^1$**

Rappelons que $\eta$ est définie par $\eta(t) = \displaystyle\int_0^t u(\tau)d\tau$ , et que $\xi$ est la matrice $(I + d\eta)^{-1} - I$ où $d\eta = (\eta_{i,j})$. Les matrices $d\eta$ et $\xi$ dépendent de u aussi nous les noterons parfois $d\eta(u)$ et $\xi(u)$. Nous allons dans une première étape étudier $\xi$.

LEMME 5.7. $0 < r < \frac{1}{2}$. *Soient les algèbres*

$$\mathscr{A}_1 = L^\infty(0,T,H^{r+1}(\Omega)) \quad et \quad \mathscr{A}_2 = H^{1+\frac{r}{8}}(0,T,H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega))$$

*Il existe* $t_1 > 0$ *et* $\epsilon > 0$ *tels que si* $v, v' \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(G)$ *et vérifient (5.9) :*

$$|\xi(u^o + v)|_{\mathscr{A}_i} \leqslant C\,T^\epsilon \qquad i = 1,2 \tag{5.13}$$

$$|\xi(u^o + v) - \xi(u^o + v')|_{\mathscr{A}_i} \leqslant C\,T^\epsilon\,|v - v'|_{r+2,\frac{r}{2}+1} \tag{5.14}$$

*où les constantes* C *dépendent de* R, $T_o$ *et* r *mais pas de* $T \leqslant T_o$.

*Démonstration.* D'une manière générale soient $\eta$ et $\eta'$ des fonctions telles que $\eta_{i,j}$ et $\eta'_{i,j}$ (i,j = 1,2) soient dans une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ pour le produit usuel. On note $C(\mathcal{A})$ la constante de continuité du produit dans $\mathcal{A}$. Alors, si on note $d\eta = (\eta_{i,j})$

(i) il existe $\alpha_1 > 0$ dépendant de $C(\mathcal{A})$ tel que si $|d\eta|_{\mathcal{A}} < \alpha_1$ alors $\xi = (I + d\eta)^{-1} - I$ a ses composantes dans $\mathcal{A}$ et vérifie

(5.15)
$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (d\eta)^n$$

(ii) On a la relation : si $\xi' = (I + d\eta')^{-1} - I$

$$\xi' - \xi = (I + d\eta)^{-1} \;[(I + d\eta) - (I + d\eta')]\; (I + d\eta')^{-1}$$

(5.16)
$$\xi' - \xi = (I + \xi) \;\; d(\eta - \eta')\; (I + \xi')$$

Par conséquent si $|d\eta|_{\mathcal{A}} < \alpha_2 < \alpha_1$ et si $|d\eta'|_{\mathcal{A}} < \alpha_2$ alors :

(5.17)
$$|\xi|_{\mathcal{A}} \leqslant C\, |d\eta|_{\mathcal{A}}$$

(5.18)
$$|\xi - \xi'|_{\mathcal{A}} \leqslant C\, |d(\eta - \eta')|_{\mathcal{A}}$$

où les constantes C et $\alpha_i$ ne dépendent que de $C(\mathcal{A})$.

Soit maintenant $u^o \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(\Omega \times ]0,T_o[)$ et $v \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(G)$ vérifiant (5.9). Alors $\nabla(u^o + v) \quad L^2(0,T,H^{r+1}(\Omega))$ donc $d\eta(u^o + v)$ est en $0(T^{1/2})$ dans $L^\infty(0,T,H^{r+1}(\Omega))$ qui est une algèbre $\mathcal{A}_1$. La constante $C(\mathcal{A}_1)$ ne dépend pas de T donc en utilisant (5.17) on vérifie (5.13) pour T assez petit. De même on montre (5.14) pour i = 1.

En utilisant le lemme 5.4, on peut dire que $\nabla u^o \in H^{\frac{r}{4}}(0,T_o,H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega))$. Donc d'après le lemme 5.2 avec $\epsilon = \frac{r}{8}$, pour $T \leqslant T_o$, $d\eta^o \in H^{1+\frac{r}{8}}(0,T,H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega))$ qui est une algèbre $\mathcal{A}_2$ et $|d\eta^o|_{\mathcal{A}_2} \leqslant C\, T^{\frac{r}{8}}\, |u^o|_{r+2,\frac{r}{2}+1}$ où C dépend de $T_o$ et r. De même puisque v(0) = 0 on montre que $d\eta(v) \in \mathcal{A}_2$ et que $|d\eta(v)|_{\mathcal{A}_2} \leqslant C\, T^{\frac{r}{8}}$ où C ne dépend pas de $T \leqslant T_o$, mais de r et R. On en déduit, en utilisant (5.17) et (5.18), les inégalités (5.13) et (5.14).

On peut alors étudier chaque terme de $E^1$ pour vérifier que $E^1$ est contractant au sens du Théorème 5.1. Ces estimations sont plus techniques que difficiles, et les calculs sont trop longs pour être développés ici.

**5.4. - Termes résiduels de la divergence**

Formellement, nous écrirons $E^2(u) = \xi \nabla u$. Si $u = u^o + v$ où v vérifie (5.9) nous savons que $\xi(u) \in \mathscr{A}_1$ et que $\nabla u \in L^2(0,T,H^{r+1}(\Omega))$. Il en résulte que $\xi \nabla u \in L^2(0,T,H^{r+1}(\Omega))$ et

$$|\xi \nabla u|_{L^2(0,T,H^{r+1}(\Omega))} \leqslant C\, T^{\epsilon}$$

où C dépend de R, $T_o$ et r. Par conséquent nous avons la même estimation pour $E^2(u^o + v) - E^2(u^o)$.

Pour la régularité en temps, nous allons utiliser le fait que pour $t = 0$ $E^2(u^o + v) - E^2(u^o)$ est nul et en particulier :

$$(5.19)\quad |E^2(u^o + v) - E^2(u^o)|_{H^{\frac{r}{2}+1}(0,T,oH^{-1}(\Omega))} \leqslant C\,|E_t^2(u^o + v) - E_t^2(u^o)|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T,oH^{-1})}$$

où C ne dépend pas de $T \leqslant T_o$. Puis nous allons montrer que le second membre de (5.19) est $O(T^{\epsilon})$, ce qui serait faux pour $E_t^2(u^o + v)$ seul, puisqu'il n'est pas nul pour $t = 0$.

Nous avons :

$$(5.20)\qquad E_t^2(u^o + v) - E_t^2(u^o) = [\xi(u^o + v) - \xi(u^o)]\, \nabla u_t^o + \xi(u^o + v)\, \nabla v_t$$

$$+ [\xi_t(u^o + v) - \xi_t(u^o)]\, \nabla u^o + \xi_t(u^o + v)\, \nabla v$$

Pour les deux premiers termes de (5.20) de la forme $\xi \nabla u_t$ nous remarquons si $u \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(G)$ et $u = 0$ sur $S_B$ alors $\nabla u_t \in H^{\frac{r}{2}}(0,T,oH^{-1}(\Omega))$ et

$$|\nabla u_t|_{H^{\frac{r}{2}}(0,T,oH^{-1}(\Omega))} \leqslant C\, |u|_{r+2,\frac{r}{2}+1}$$

où C est indépendante de T. Nous utilisons alors les estimations de $\xi$ dans $\mathscr{A}_2$ (lemme 5.7) et le lemme 5.5 (ii) pour en déduire que les termes considérés sont $O(T^{\epsilon})$ dans $H^{r/2}(0,T,oH^{-1}(\Omega))$

Pour le terme $\xi_t\,(u^o + v)\, \nabla v$, en utilisant le lemme 5.4 (ii) nous pouvons dire que $\nabla v \in H^{\frac{r+1}{2}}(0,T,L^2(\Omega))$ et comme $v(0) = 0$, d'après le lemme 5.3, $\nabla v \in H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}(0,T,L^2(\Omega))$

$$(5.21)\qquad |\nabla v|_{H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}(0,T,L^2(\Omega))} \leqslant C\, T^{\frac{r}{4}}\, |v|_{r+2,\frac{r}{2}+1}$$

Or on vérifie que $\xi_t(u^o + v) = -(I + \xi)\, d(u^o + v)\, (I + \xi)$ est dans $H^{\frac{r}{2}}(0,T,H^1(\Omega))$, donc $\xi_t(u^o + v)\, \nabla v$ est dans $H^{\frac{r}{2}}(0,T,{}_oH^{-1}(\Omega))$ (lemme 5.5 (iv)) et est $O(T^{\frac{r}{4}})$ dans cet espace.

Pour le 3e terme de (5.2) nous allons montrer le lemme suivant :

LEMME 5.8. *Si* $v, v' \in H^{r+2,\frac{r}{2}+1}(G)$ *vérifient (5.9) alors* $\xi_t(u^o + v) - \xi_t(u^o)$ *est dans* $H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}(0,T,L^2(\Omega))$ *et*

$$|\xi_t(u^o + v) - \xi_t(u^o + v')|_{H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}(0,T,L^2(\Omega))} \leqslant C\, T^{\frac{r}{4}}\, |v - v'|_{r+2,\frac{r}{2}+1}. \tag{5.22}$$

*Démonstration.* Nous noterons $\xi$ pour $\xi(u^o + v)$ et $\xi'$ pour $\xi(u^o + v')$. On a :

$$\xi_t = -(I + \xi)\, d(u^o + v)\, (I + \xi)$$

donc

$$\xi_t - \xi'_t = -[(\xi - \xi')\, d(u^o + v)(I + \xi) + (I + \xi')\, d(v - v')\, (I + \xi) + (I + \xi')\, d(u^o + v')\, (\xi - \xi')] \tag{5.23}$$

On montre que $d(u^o + v)\, (I + \xi)$ et $(I + \xi')\, d(u^o + v')$ sont bornés indépendamment de $T \leqslant T_o$ dans $H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}(0,T,L^2(\Omega))$ comme $d(u^o + v)$ et $d(u^o + v')$. On utilise alors (5.14) avec $i = 2$, ce qui entraîne que les premier et troisième termes de (5.22) sont majorés en norme dans $H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}(0,T,L^2(\Omega))$ par $C\, T^{\epsilon}\, |v - v'|_{r+2,\frac{r}{2}+1}$ où C ne dépend pas de $T \leqslant T_o$.

Quant au 2e terme, de même que pour (5.21) on a :

$$|d(v - v')|_{H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}(0,T,L^2(\Omega))} \leqslant C\, T^{\frac{r}{4}}\, |v - v'|_{r+2,\frac{r}{2}+1}$$

et en utilisant une nouvelle fois (5.14), on en déduit que ce terme vérifie une majoration analogue dans $H^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}(0,T,L^2(\Omega))$, ce qui montre le lemme.

Pour terminer l'étude de $E^2$ nous multiplions $\xi_t(u^o + v) - \xi_t(u^o)$ par $\nabla u^o \in H^{\frac{r}{2}}(0,T,H^1(\Omega))$ donc le produit obtenu est dans $H^{\frac{r}{2}}(0,T,{}_oH^{-1}(\Omega))$ et est $O(T^{\epsilon})$ dans cet espace.

On montre de même que $E^2$ est contractant.

**5.5. - Termes de surface**

Rappelons que $\mathcal{N} - N = (-\partial_\tau \eta_2, \partial_\tau \eta_1)$. Par conséquent $\mathcal{N} - N$ a la même régularité et vérifie les mêmes estimations que la trace de $\nabla \eta$ sur $S_F$ ou que celle de $\xi$. Il en résulte qu'à part $\partial_\tau Q_i$, $i = 1, 2$, tous les termes de $E^3$ dans (5.4), et $E^4$, sont $O(T^\epsilon)$ dans $H^{r+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F \times ]0,T[\,)$ et contractants.

Remarquons la nécessité d'avoir $r < \frac{1}{2}$ pour que des produits tels que $q(\mathcal{N}_i - N_i)$ n'induisent pas de constantes dépendant de T ou des hypothèses supplémentaires $(q(0) = 0)$, cf. lemme 5.6 (ii).

Les fonctions $Q_1$ et $Q_2$ sont considérées comme des séries entières en $\Phi = \Phi^o + \psi$ à coefficients dans $C_b^3(\mathrm{IR})$, de termes d'ordre 0 et 1 nuls. On a

$$\partial_\tau \left[ \sum_{i=2}^{\infty} a_i \Phi^i \right] = \partial_\tau \Phi \sum_{i=2}^{\infty} a_i\, i\, \Phi^{i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} \partial_\tau a_i \Phi^i$$

Comme $\Phi_t \in H^{r+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F \times ]0,T[)$, $\Phi$ est $O(T^{1/2})$ dans l'algèbre $L^\infty(0,T,H^{r+\frac{1}{2}}(S_F))$ donc $\sum_{i=2}^{\infty} a_i\ i\ \Phi^{i-1}$ et $\sum_{i=2}^{\infty} \partial_\tau a_i\ \Phi^i$ sont aussi $0(T^{1/2})$ dans le même espace. Or $\partial_\tau \Phi \in L^2(0,T,H^{r+\frac{1}{2}}(S_F))$ donc les termes $\partial_\tau Q_i$ sont $O(T^{1/2})$ dans $L^2(0,T,H^{r+\frac{1}{2}}(S_F))$.

Pour la régularité en temps nous savons que $\Phi_t \in H^{r+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F \times ]0,T[\,)$ donc nous pouvons dire que $\Phi_t \in H^{\frac{r}{4}}(0,T,H^{\frac{r}{4}}(0,T,H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}(S_F))$. Comme $\Phi(0) = 0$ nous en déduisons que $\Phi$ est $O(T^{1/4})$ dans $H^{\frac{r}{4}+\frac{3}{4}}(0,T,H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}(S_F))$ (lemme 5.2 avec $\epsilon = \frac{1}{4}$). Ce dernier espace est une algèbre donc $\sum_{i=2}^{\infty} a_i\, i\Phi^{i-1}$ et $\sum_{i=2}^{\infty} \partial_\tau a_i \Phi^i$ sont aussi $O(T^{1/4})$ pour la même norme.

D'autre part, comme $\partial_\tau \Phi \in L^2(0,T,H^{r+1}(S_F))$ $\Phi$ est au moins dans $H^{r+\frac{3}{2}, \frac{r}{2}+\frac{5}{4}}(S_F \times ]0,T[)$ et donc $\partial_\tau \Phi$ est au moins dans $H^{r+\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(S_F \times ]0,T[\,)$. Il en résulte que $\partial_\tau Q_i$ est $O(T^{1/4})$ dans $H^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}(0,T,L^2(S_F))$.

Le lecteur vérifiera qu'il y a contraction. Ceci achève la démonstration du Théorème 5.1.

## 6. - METHODE DE POINT FIXE

Rappelons que $M(u,q,\Phi)$ désigne les premiers membres des égalités (1.10) - (1.12), (1.14), (1.15) et que

$$M(u,q,\Phi) = M(0,0,0) + L(u,q,(1+h'^2)^{-1}\,\Phi) + E(u,q,\Phi)$$

Nous cherchons $(u,q,\Phi)$ tel que $M(u,q,\Phi) = (0,0,0,0,u_1)$ où $u_1$ est donnée. Soit $T_o > 0$. Si $h \in H^{r+\frac{5}{2}}(\mathrm{IR})$ il existe

$$(u^o,q^o,\Phi^o) \in X^r_{T_o}(\Omega) \text{ tel que } L(u^o,q^o,(1+h'^2)^{-1}\,\Phi^o) = (0,\ldots,0,u_1) - M(0,0,0)$$

Si nous posons $u = u^o + v$, $q = q^o + p$, $\Phi = \Phi^o + \psi$, il faut donc résoudre :

$$L(v,p,\psi) + E(u^o + v,\, q^o + p,\, \Phi^o + \psi) = 0$$

c'est-à-dire

$$(v,p,\psi) = F(v,p,\psi)$$

où

$$F(v,p,\psi) = -\,L^{-1}\,E(u^o + v,\, q^o + p,\, \Phi^o + \psi)$$

On est donc amené à résoudre un problème de point fixe dans $\{(v,p,\psi) \in X^r_T(\Omega)\ ;\ v(0) = 0\} = X^*_T$

Soit $R > 0$ fixé et $(v^1,p^1,\psi^1)$ tel que

$$L(v^1,p^1,\psi^1) = (0,E^2(u^o),0,0,0)$$

Alors, d'après les Théorèmes 4.1 et 5.1 nous pouvons dire que si $|v - v^1,\, p - p^1,\, \psi - \psi^1|_{X^*_T} \leqslant R$ alors

$$|L^{-1}\,[E(u^o + v,\, q^o + p,\, \Phi^o + \psi) - (0,E^2(u^o),0,0,0)]\,| \leqslant C\,T^{\epsilon}$$

où C dépend de R, $T_o$, r et $u_1$ mais pas de $T \leqslant T_o$.

Il en résulte que

$$|F(v,p,\psi) - (v^1,p^1,\psi^1)|_{X^*_T} \leqslant C\,T^{\epsilon}$$

D'autre part, dans $X_T^*$

$$|F(v,p,\psi) - F(v',p',\psi')|_{X_T^*} \leqslant C\, T^{\epsilon}\, |v - v',\, p - p',\, \psi - \psi'|_{X_T^*}$$

Il s'ensuit que pour T assez petit, F envoie la boule fermée de $x_T$ de rayon R de centre $(v^1,p^1,\psi^1)$ dans elle-même et que F est contractante. Par conséquent, il existe un point fixe de F, c'est-à-dire une solution de (1.10) - (1.16). Nous avons donc démontré le Théorème 1.1.

## REFERENCES

[1] G. ALLAIN. *«Un problème de Navier-Stokes avec surface libre».* Thèse de 3e cycle, Paris VI, 1983.

[2] J.T. BEALE. *«The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface».* Comm. Pure and Applied Math., 34, p. 359-381, 1981.

[3] J.T. BEALE. *«Large-time regularity of viscous surface waves».* Arch. Rat. Mech. Anal., 84, p. 307-352, 1984.

[4] J.L. LIONS - E. MAGENES. *«Problèmes aux limites non homogènes et applications».* Dunod, Paris, 1968.

[5] V.V. PUKHNACHEV. *«A plane steady free-boundary problem for the Navier-Stokes equations».* P.M.T.F., 3, p. 91-102, 1972.

[6] G. de RHAM. *«Variétés différentiables».* Hermann, Paris, 1960.

[7] V.A. SOLONNIKOV. *«Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface».* Math. U.S.S.R. Izvestijya 11, 1977, p. 1323-1358.

[8] V.A. SOLONNIKOV. *«The solvability of the second initial value problem for the linear time-dependent system of Navier-Stokes equations».* J. Soviet. Math. 10, 1978, p. 141-155.

[9] R. TEMAM. *«Navier-Stokes equations».* North-Holland, Amsterdam, 1977.

(Manuscrit reçu le 24 juillet 1984)