ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-PIERRE MASSIAS

Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 3-4 (1984), p. 269-281

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_3-4_269_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VI, 1984, P. 269 à 281

MAJORATION EXPLICITE DE L'ORDRE MAXIMUM D'UN ELEMENT DU GROUPE SYMETRIQUE

Jean-Pierre Massias (1)

(1) U.E.R. des Sciences, Département de Mathématiques, 123 rue Albert Thomas, 87060 Limoges Cédex (France).

Résumé : Soit $g(n) = \sup\limits_{\sigma \in S_n}$ (ordre de σ) (S_n étant le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments). Landau a démontré en 1909 que $\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}$.

Le but de cet article est de donner la majoration : $\log g(n) \leqslant 1{,}05313... \sqrt{n \log n}$ ($\forall\, n \geqslant 1$) avec égalité pour n = 1319766.

Les techniques utilisées sont voisines de celles de Ramanujan pour étudier la fonction d(n) nombre de diviseurs de n, en particulier des nombres analogues aux nombres hautement composés supérieurs sont définis et jouent un grand rôle.

Summary : Let $g(n) = \sup\limits_{\sigma \in S_n}$ (order of σ) (S_n being the group of permutations of n elements). Landau proved in 1909 that $\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}$.

The aim of this article is to give the following upper bound : $\log g(n) \leqslant 1{,}05313... \sqrt{n \log n}$ ($\forall\, n \geqslant 1$) (with equality at n = 1319766).

Our techniques are close to those used by Ramanujan in the study of the function d(n) (number of divisors of n) ; in particular, we introduce certain numbers (analogous to highly composite numbers) that play here an important role.

I - INTRODUCTION

Soit S_n le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments, on définit :

$$g(n) = \sup_{\sigma \in S_n} \ (\text{ordre de } \sigma).$$

E. Landau en 1909 (cf. [Lan]) a étudié cette fonction et a montré notamment :

$$\log g(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$

Plus tard S.M. Shah en 1939 (cf. [Shah]) a précisé de la manière suivante :

$$\log g(n) = \sqrt{n \log n} \left(1 + \frac{\log \log n}{2 \log n} + 0 \ (\frac{1}{\log n})\right).$$

J.L. Nicolas en 1969 (cf. [Nic 4]) a donné un algorithme de calcul de g(n). Dans cet article, il mentionne les deux tables créées avec son algorithme (g(n) et sa décomposition en facteurs premiers pour $n \leqslant 8100$, g(n) avec 8 chiffres significatifs pour $n \leqslant 32000$).

M. Szalay (cf. [Sza]) quant à lui, donne un développement plus précis de g(n) et du nombre de ses facteurs premiers.

La fonction g(n) intervient dans quelques domaines des Mathématiques et de l'Informatique. A. Schinzel utilise la fonction g(n) et le résultat de Landau dans son article sur l'irréductibilité des polynômes lacunaires (cf. [Schin]). L.G. Valiant et M.S. Paterson (cf. [Val]) utilisent g(n) pour obtenir une majoration du temps de calcul d'une procédure de décision d'un problème d'équivalence pour un D.O.C.A. (automate déterministe dont l'alphabet est constitué d'un seul symbole). P.M.B. Vitanyi (cf. [Vit]) dans son étude sur les langages D.O.L. (système de Lindenmayer déterministe indépendant du contexte) considère la fonction P(n) :

$$P(n) = \max\ (\pi\, p^{\alpha} + d \ / \ \Sigma\, p^{\alpha} + d = n).$$

Cette fonction majore la taille d'un langage D.O.L. fini en fonction de la taille de son alphabet. Cette fonction est en liaison directe avec la fonction g(n), en effet on a $g(n) \leqslant P(n) < g(n) + n$. A cette occasion il constate que la fonction P(n) a une utilisation plus vaste puisqu'elle permet d'étudier un processus qui commence par un comptage jusqu'à un certain nombre d puis qui initialise q compteurs périodiques. Dans ce cas P(n) représente le plus grand nombre de configurations distinguables qui peuvent être générées en utilisant n différents états. Il nous a donc paru intéressant de compléter l'équivalence de E. Landau en donnant pour g(n) la majoration suivante :

THEOREME. $\log g(n) \leqslant 1{,}05314\ \sqrt{n \log n}$ *quel que soit* $n \geqslant 1$. *De plus le maximum de la fonction* $\dfrac{\log g(n)}{\sqrt{n \log n}}$ *est atteint en un seul point* $n_0 = 1319766$.

La démonstration du théorème est basée principalement sur le lemme 5 qui affirme que le maximum est atteint lorsque g(n) est un nombre ℓ - composé supérieur. Ces nombres généralisent les nombres hautement composés supérieurs introduits par Ramanujan (cf. [Ram]). La méthode utilisée a été développée par Robin et Nicolas (cf. [Rob 1], [Rob 2], [Nic 1]) pour d'autres fonctions.

II - RAPPEL DES PROPRIETES DE G(N)

Nicolas en 1968 (cf. [Nic 2], [Nic 3]) a étudié en détail les propriétés de g(n).

PROPOSITION 1. $$g(n) = \sup_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} (\text{p p c m } (n_1,\ldots,n_k)).$$

Démonstration. Soit $\sigma \in S_n$ telle que $g(n)$ = ordre de σ. On décompose σ en cycles de longueur $n_1,\ldots,n_k$. On a alors $n = n_1 + \ldots + n_k$ et ordre de σ = p p c m $(n_1,\ldots,n_k)$.

DEFINITION 1. *Soit* ℓ *l'application de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}$ *définie par :*

. $\ell(1) = 0$

. *si la décomposition de* x *en facteurs premiers est* $x = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, $\ell(x) = \sum_i p_i^{\alpha_i}$.

PROPOSITION 2. $$g(n) = \sup_{\ell(k) \leqslant n} k.$$

Démonstration. D'après la proposition 1 : $g(n) = \sup\limits_{n_1+\ldots+n_k \leqslant n} (\text{p p c m } (n_1,\ldots,n_k))$.

On peut voir d'abord que la borne supérieure est atteinte lorsque les n_i sont des puissances de nombre premiers distincts ou des 1 : en effet si l'un d'eux est composé, soit $n_1 = a\,b$ avec $(a,b) = 1$ on peut écrire :

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = a + b + n_2 + \ldots + n_k + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a\,b - (a+b)}.$$

Dans ce cas le p p c m ne change pas. D'où l'on déduit

$$g(n) = \sup_{p_1^{\alpha_1}+\ldots+p_j^{\alpha_j} \leqslant n} \prod_{i \leqslant j} p_i^{\alpha_i}$$

III - NOMBRES ℓ - COMPOSES SUPERIEURS

Ramanujan (cf. [Ram]) a défini les nombres hautement composés supérieurs pour étudier les grandes valeurs de la fonction d(n) nombre de diviseurs de n. Nous allons procéder de façon analogue avec la fonction ℓ.

DEFINITION 2. *On dit que* N *est* ℓ *- composé si quel que soit* $M > N$ *on a* $\ell(M) > \ell(N)$ *(on écrira* ℓ.c. *pour* ℓ *- composé).*

DEFINITION 3. *On dit que* N *est* ℓ *- composé supérieur* (ℓ.c.s.) *s'il existe un nombre réel positif* ρ *tel que quel que soit* $M \in \mathbb{N}^*$ *on ait :*

$$\ell(M) - \rho \log M \geqslant \ell(N) - \rho \log N.$$

On peut montrer (cf. [Nic 2]) que pour $\rho > 0$ fixé, la fonction $N \to \ell(N) - \rho \log N$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Cette fonction a donc un minimum sur $\mathbb{N}^*$ qu'elle atteint en un ou plusieurs nombres N_ρ qui sont ℓ.c.s.

Pour chaque nombre premier p on définit la suite :

$$a_p^{(1)} = \frac{p}{\log p} \quad \text{et pour } \alpha \geqslant 2 \quad a_p^{(\alpha)} = \frac{p^\alpha - p^{\alpha-1}}{\log p}.$$

La suite $a_p^{(\alpha)}$ est croissante en α, et même strictement croissante sauf pour p = 2 (on a $a_2^{(1)} = a_2^{(2)}$). D'autre part, pour $p \neq q$, pour α et β quelconques on a $a_p^{(\alpha)} \neq a_q^{(\beta)}$. Sinon on aurait $\frac{r}{\log p} = \frac{s}{\log q}$ avec $r,s \in \mathbb{N}^*$ ce qui entrainerait $q^r = p^s$ ce qui est impossible.

Si $0 < \rho < \frac{3}{\log 3}$, il y a un seul nombre ℓ.c.s : $N_\rho = 1$.

Si $\rho = \frac{3}{\log 3}$, il y a deux nombres ℓ.c. s : 1 et 3.

Si $\frac{3}{\log 3} < \rho < \frac{2}{\log 2}$, il y a un seul nombre ℓ.c. s : 3.

Si $\rho = \frac{2}{\log 2}$, il y a trois nombres ℓ.c.s : 3,6,12.

Si $\rho > \frac{2}{\log 2}$, soit x l'unique solution $\geqslant 4$ de l'équation $\frac{x}{\log x} = \rho$.

Soit $E = \left\{ a_p^{(\alpha)}, \text{p premier}, \alpha \geqslant 1 \right\}$.

LEMME 1. *Soit* ρ *donné* $> \frac{2}{\log 2}$, $\rho \notin E$, *on désigne par* N_ρ *le nombre* ℓ.c.s. *associé à* ρ *et par* x *la solution* $\geqslant 4$ *de l'équation* $\frac{x}{\log x} = \rho$. *On a :*

$$N_\rho = \prod_{p \leqslant x} p^{k(p,\rho)}$$

avec

$$k(p,\rho) = \left[1 + \frac{\log\left(\frac{\rho \log p}{p-1}\right)}{\log p} \right]$$

en désignant par $[u]$ *la partie entière de* u.

Démonstration. On applique la définition 3 avec $N = N_\rho$ et $M = \rho N_\rho$, puis $M = N_\rho/\rho$.

On obtient alors :

$$\text{Si} \quad k(p,\rho) = 1, \quad \frac{p}{\log p} < \rho < \frac{p^2-p}{\log p}$$

$$\text{Si} \quad k(p,\rho) = k > 1, \quad \frac{p^k - p^{k-1}}{\log p} < \rho < \frac{p^{k+1} - p^k}{\log p}.$$

De cette dernière formule on déduit, pour $k > 1$

$$k = 1 + \left[\frac{\log \frac{\rho \log p}{p-1}}{\log p} \right]$$

On observe enfin que si ρ vérifie $\frac{p}{\log p} < \rho < \frac{p^2-p}{\log p}$, la formule ci-dessus donne $k = 1$.

Si $\rho \in E$, $\rho = a_q^{(\beta)}$ il y a deux nombres N_ρ possibles.

Pour chaque nombre premier $p \neq q$ l'exposant est déterminé de façon unique comme précédemment. L'exposant de q est soit β, soit $\beta-1$. Remarquons que ces deux nombres sont obtenus comme $N_{\rho'}$, avec $\rho' \notin E$, en choisissant $\rho' = \rho + \epsilon$ et $\rho' = \rho - \epsilon$ avec ϵ suffisamment petit.

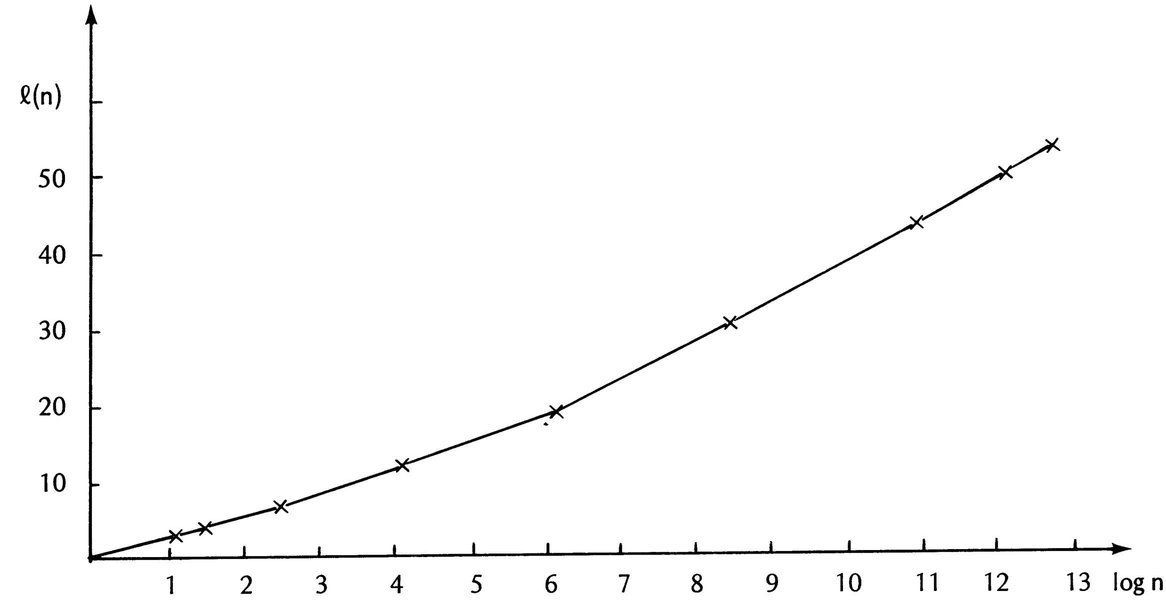
Voir en annexe I une table des nombres ℓ.c.s. jusqu'à $\rho = 14{,}47$.

Interprétation géométrique :

Représentons les points de coordonnées $(\log n, \ell(n))$ pour $n \geqslant 1$. (voir figure). L'enveloppe convexe de ces points est une ligne brisée dont les sommets ont pour coordonnées $(\log N_\rho, \ell(N_\rho))$ pour toutes les valeurs de ρ.

Considérons la famille de droites d'équations $y = \rho x + b$ qui minorent cette enveloppe convexe.

N_ρ est le(s) point(s) d'intersection de cette enveloppe et de la droite obtenue en prenant b maximum.



LEMME 2. *Soit* N_ρ *un nombre* ℓ.c.s. *donné* $(\rho > \frac{2}{\log 2})$ *et* x *la solution* $\geqslant 4$ *de l'équation* $\frac{x}{\log x} = \rho$. *Soit* p *un facteur premier de* N_ρ *dont l'exposant est* α *dans la décomposition de* N_ρ. *On a alors* $p^\alpha \leqslant x$.

Démonstration. Si $\alpha = 1$ c'est évident.

Si $\alpha > 1$, raisonnons par l'absurde : supposons $p^\alpha > x$:

On sait que $\dfrac{p^\alpha - p^{\alpha-1}}{\log p} \leqslant \rho < \dfrac{p^{\alpha+1} - p^\alpha}{\log p}$.

La fonction $\dfrac{x}{\log x}$ étant croissante pour $x > e$, on a :

$$\rho = \frac{x}{\log x} < \frac{p^\alpha}{\alpha \log p}$$

d'où :

$$p^\alpha - p^{\alpha-1} < \frac{p^\alpha}{\alpha} \quad \text{ou bien} \quad \alpha(p-1) < p.$$

On aboutit à $\alpha < \dfrac{p}{p-1}$ ce qui pour $p \geqslant 2$ est < 2.

Donc il y a contradiction.

LEMME 3. *Majoration des nombres* ℓ.c.s. *: Soit* N_ρ *un nombre* ℓ.c.s. $(\rho > \frac{2}{\log 2})$ *et* x *la solution* $\geqslant 4$ *de l'équation* $\frac{x}{\log x} = \rho$.

On a $\log N_\rho \leqslant \psi(x)$ *où* $\psi(x)$ *est la deuxième fonction de Chebychev* $(\psi(x) = \sum_{\substack{p,\alpha \\ p^\alpha \leqslant x}} \log p)$.

Démonstration. $\log N_\rho = \sum_{p \leqslant x} k(p,\rho) \log p$ d'après le lemme 1. D'après le lemme 2 : $p^{k(p,\rho)} \leqslant x$.

On peut donc écrire :

$$\log N_\rho \leqslant \sum_{\substack{p,\alpha \\ p^\alpha \leqslant x}} \log p.$$

IV - MAJORATION DE $\frac{\text{LOG } G(N)}{\sqrt{N \text{ LOG } N}}$

LEMME 4. *Soit* $\alpha > 0$ *et la fonction* $\beta : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $\beta(u) = u - \alpha\sqrt{u \log u}$. *Il existe* $u_o > 1$ *tel que* β *soit décroissante sur* $[1,u_o]$ *et croissante sur* $[u_o,+\infty]$.

Démonstration. Dérivons $\beta(u)$:

$$\beta'(u) = 1 - \frac{\alpha(\log u+1)}{2\sqrt{u \log u}} \quad \text{pour } u \neq 1$$

Montrons que la fonction $\gamma : u \to \frac{\log u+1}{\sqrt{u \log u}}$ est décroissante vers 0 :

$$\gamma'(u) = \frac{\frac{\sqrt{u \log u}}{u} - \frac{(\log u+1)^2}{2\sqrt{u \log u}}}{u \log u}$$

u étant > 1, $\gamma'(u)$ est du signe de

$$2 \log u - (\log u+1)^2 = -\log^2 u-1 < 0$$

de plus lorsque $u \to +\infty, \frac{\log u}{u} \to 0$.

Ce qui montre que l'on peut trouver u_o tel que pour $u \leqslant u_o : \beta'(u) \leqslant 0$ et pour $u \geqslant u_o : \beta'(u) \geqslant 0$.

LEMME 5. *Soit* $F(N) = \frac{\log N}{\sqrt{\ell(N) \log \ell(N)}}$ *et* M *un entier où* F(N) *atteint sont maximum* λ *alors* M *est* ℓ.c.s. *associé à* $\rho = \dfrac{2\ell(M)\log \ell(M)}{\log M(1+\log \ell(M))}$ *et l'on a :* $\lambda^2 = \dfrac{2\log M}{\rho(1+\log \ell(M))}$.

Démonstration. Si λ est la maximum de $F(N)$ on a pour $N \geqslant 2$:

$$\ell(N)\log \ell(N) \geqslant \left(\frac{\log N}{\lambda}\right)^2.$$

Soit $\phi(x) = x \log x$, ϕ est un bijection de $[1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ et l'on a $\ell(N) \geqslant \phi^{-1}\left(\left(\frac{\log N}{\lambda}\right)^2\right)$.

Montrons que l'on peut trouver ρ de telle sorte que si M est un entier où F(N) atteint son maximum alors $\ell(M) - \rho \log M$ soit minimum.

$$\ell(N) - \rho \log N = \left(\ell(N) - \phi^{-1}\left[\left(\frac{\log N}{\lambda}\right)^2\right]\right) + \left(\phi^{-1}\left[\left(\frac{\log N}{\lambda}\right)^2\right] - \rho \log N\right).$$

La première parenthèse est positive et s'annule pour $N = M$. La seconde parenthèse s'écrit, en posant $u = \phi^{-1}\left(\left(\frac{\log N}{\lambda}\right)^2\right)$, $u - \rho\lambda\sqrt{u \log u}$. D'après le lemme précédent, cette quantité présente un minimum en u_o.
Montrons que l'on peut déterminer ρ pour que $u_o = \phi^{-1}\left(\left(\frac{\log M}{\lambda}\right)^2\right) = \ell(M)$. D'après le lemme 4, u_o vérifie :

$$1 - \frac{\rho\lambda(\log u_o + 1)}{2\sqrt{u_o \log u_o}} = 0.$$

On a donc :

$$\rho\lambda = \frac{2\sqrt{\ell(M)\log \ell(M)}}{1+\log \ell(M)}.$$

Comme $\lambda = \dfrac{\log M}{\sqrt{\ell(M)\log \ell(M)}}$, on obtient :

$$\rho = \frac{2\ell(M)\log \ell(M)}{\log M(1+\log \ell(M))}$$

et

$$\lambda^2 = \frac{2\log M}{\rho(1+\log \ell(M))}$$

LEMME 6. *Minoration de* $\sum_{p \leqslant x} p$:

$$\sum_{p \leqslant x} p \geqslant \frac{x^2}{2\log x} + \frac{c\,x^2}{\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x}$$

avec $c = \dfrac{9}{52}$ *pour* $x \geqslant 11813$.

Démonstration. Calcul préliminaire :

$$(1)\quad \int_e^x \frac{t}{\log^n t}\,dt = \left[\frac{t^2}{2\log^n t}\right]_e^x + \int_e^x \frac{n\,t}{2\log^{n+1} t}\,dt = \frac{x^2}{2\log^n x} - \frac{e^2}{2} + \int_e^x \frac{n\,t}{2\log^{n+1} t}\,dt.$$

Soit $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ la première fonction de Chebychev.

Considérons l'intégrale de Stieltjes et intégrons par parties :

$$\sum_{2<p\leqslant x} p = \int_e^x \frac{t}{\log t}\,d\,\theta(t) = \left[\frac{t\,\theta(t)}{\log t}\right]_e^x - \int_e^x \frac{\log t - 1}{\log^2 t}\,\theta(t)\,dt.$$

Nous utilisons maintenant les majorations et minorations de $\theta(x)$ obtenues par Schoenfeld (cf. [Sch], p. 357 et 359) :

$$\theta(x) < x\left(1 + \frac{c_1(x)}{\log x}\right) \text{ pour tout } x \geqslant 1$$

avec $c_1(x) = 0{,}0201384$ pour $x > 10^{11}$ et $c_1(x) = 0$ pour $1 \leqslant x \leqslant 10^{11}$

$$\theta(x) > x\left(1 - \frac{c_2(x)}{\log x}\right) \text{ pour tout } x \geqslant 48751$$

avec $c_2(x) = \dfrac{1}{13}$ pour $48751 \leqslant x \leqslant 10^{11}$ et $c_2(x) = \dfrac{1}{41}$ pour $x > 10^{11}$.

Supposons maintenant $x \geqslant 48751$. On a :

$$\sum_{2<p\leqslant x} p \geqslant \frac{x^2}{\log x}\left(1 - \frac{c_2(x)}{\log x}\right) - e\log 2 - \int_e^x \frac{\log t - 1}{\log^2 t} \times \left(1 + \frac{c_1(x)}{\log t}\right) t\,dt$$

$$\sum_{2<p\leqslant x} p \geqslant \frac{x^2}{\log x}\left(1 - \frac{c_2(x)}{\log x}\right) - \int_e^x \frac{t}{\log t}\,dt + (1 - c_1(x)) \int_e^x \frac{t}{\log^2 t}\,dt + \int_e^x \frac{c_1(x)}{\log^3 t}\,dt$$

en appliquant (1) il vient :

$$\sum_{p\leqslant x} p \geqslant \frac{x^2}{2\log x} + \left(\frac{1}{4} - \frac{c_1(x)}{2} - c_2(x)\right)\frac{x^2}{\log^2 x} + \left(c_1(x) + \frac{1}{2}\right)\frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{4\log^3 x} - \frac{e^2}{4} + \int_e^x \frac{3t}{4\log^4 t}\,dt$$

La somme des constantes est $\geqslant 0$. La dernière intégrale est > 0, on en déduit donc :

$$\sum_{p\leqslant x} p \geqslant \frac{x^2}{2\log x} + \left(\frac{1}{4} - \frac{c_1(x)}{2} - c_2(x)\,\frac{x^2}{\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x}\right).$$

Pour $48751 \leqslant x \leqslant 10^{11}$, on a $c_1(x) = 0$, $c_2(x) = \frac{1}{13}$ donc

$$\frac{1}{4} - \frac{c_1(x)}{2} - c_2(x) = \frac{9}{52}.$$

Pour $x > 10^{11}$ on a $c_1(x) = 0{,}0201384$, $c_2(x) = \frac{1}{41}$ donc

$$\frac{1}{4} - \frac{c_1(x)}{2} - c_2(x) > \frac{9}{52}.$$

En calculant les valeurs numériques de $\sum_{p \leqslant x} p$ on constate que la formule est encore valable pour $11813 \leqslant x < 48751$.

Démonstration du théorème. Il résulte de la proposition 2 que $\ell(g(n)) \leqslant n$, donc :

$$\frac{\log g(n)}{\sqrt{n \log n}} \leqslant \frac{\log g(n)}{\sqrt{\ell(g(n)) \log \ell(g(n))}} \leqslant \lambda.$$

Utilisons maintenant les résultats du lemme 5 :

D'une part, calculons les valeurs de $\frac{\log N}{\sqrt{\ell(N) \log \ell(N)}}$ pour les nombres N_ρ vérifiant $\rho \leqslant 7489$; ce qui correspond à $x \leqslant 85000$. On constate sur ces premières valeurs que le maximum est atteint en N_{ρ_0} pour $\rho_0 = 541{,}973$ correspondant à $x = 4567$ et qu'il est $\geqslant 1{,}053$. On a donc $\lambda \geqslant 1{,}053$.

D'autre part montrons que ce maximum n'est pas atteint pour $x \geqslant 85000$. En effet,

Supposons que le maximum soit atteint en un nombre $N = N_\rho$ avec $\rho > \frac{85000}{\log 85000}$. Ce maximum vérifierait,

$$\lambda = \left(\frac{2 \log N}{\rho(1 + \log \ell(N))}\right)^{1/2}.$$

On va montrer que cette quantité est majorée par 1,053 ; ce qui montre que le maximum est donc atteint en N_{ρ_0}. Si x est la solution $> e$ de $\frac{x}{\log x} = \rho$ on peut écrire :

$$\frac{2 \log N}{\rho(1 + \log \ell(N))} = \frac{2 \log N}{\frac{x}{\log x}(1 + \log \ell(N))}.$$

Le lemme 3 nous donne une majoration de $\log N$ par $\psi(x)$.

D'autre part si $N = \prod_{p \leqslant x} p^\alpha$ alors $\ell(N) = \sum_{p \leqslant x} p^\alpha \geqslant \sum_{p \leqslant x} p$ le lemme 6 donne :

$$\ell(N) \geqslant \frac{x^2}{\log x}\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{\log x} + \frac{1}{4\log^2 x}\right)$$

avec $c = \frac{9}{52}$ d'où :

$$\log \ell(N) \geqslant 2 \log x - \log\log x - \log 2$$

$$\frac{2 \log N}{\rho(1+\log(N))} \leqslant \frac{2\psi(x)}{\frac{x}{\log x}(1 + 2\log x - \log\log x - \log 2)} .$$

On utilise maintenant la majoration de Schoenfeld pour $\psi(x)$ (cf. [Sch] , p. 356)

$$\psi(x) \leqslant \theta(x) + 1{,}001093\sqrt{x} + 3x^{1/3}$$

et en utilisant la même majoration de $\theta(x)$ que dans la démonstration du lemme 6,

$$\psi(x) \leqslant x\left(1 + \frac{c_1(x)}{\log x} + 1{,}001093\, x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

d'où l'on tire :

$$\lambda^2 \leqslant \frac{2\left(1 + \frac{c_1(x)}{\log x} + 1{,}001093\, x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{2}{3}}\right)}{2 + \frac{1-\log 2}{\log x} - \frac{\log\log x}{\log x}} .$$

Le dénominateur est une fonction croissante de x pour $x > 41 > \exp(e^2/2)$. Le numérateur est une fonction décroissante de x dans chacun des intervalles $1 \leqslant x \leqslant 10^{11}$ et $x > 10^{11}$. Pour $x = 10^{11}$, on obtient $\lambda \leqslant 1{,}031$. Pour $x = 85000$ on obtient $\lambda \leqslant 1{,}05292 < 1{,}053$.
Il y a donc contradiction avec le fait que $\lambda \geqslant 1{,}053$.

Interprétation géométrique :

Représentons les points de coordonnées $\log n$, $\sqrt{\ell(n)\log \ell(n)}$ pour $n \geqslant 1$. L'enveloppe convexe de ces points est une ligne brisée ayant (0,0) pour sommet. Un autre sommet correspond à $n = N_{\rho_0}$. La droite qui joint ces deux sommets a pour équation $y = \frac{1}{\lambda} x$.

Soit $F(x)$ vérifiant $\sqrt{F(x)\log(F(x))} = \frac{1}{\lambda} x$. On voit que F est convexe, que $F(\log n) \leqslant \ell(n)$ et donc que la courbe représentative de F est située sous l'enveloppe convexe définissant les nombres ℓ.c.s. et qu'il ne peut y avoir égalité qu'en un seul nombre.

REFERENCES

[Land] E. LANDAU. *«Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bände 1 und 2»*. Leipzig und Berlin 1909. (2te Auflage, New York 1953).

[Nic 1] J.L. NICOLAS et G. ROBIN. *«Majorations explicites pour le nombre de diviseurs de n»*. Canad. Math. Bull. Vol. 26 (4), 1983 p. 485-492.

[Nic 2] J.L. NICOLAS. *«Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers»*. Bull. Soc. Math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.

[Nic 3] J.L. NICOLAS. *«Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe S_n des permutations»*. Acta Arithmetica XIV (1968), p. 315-332.

[Nic 4] J.L. NICOLAS. *«Calcul de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique S_n»*. R.I.R.O. 3^e année, n^o R-2/1969, p. 43-50.

[Ram] S. RAMANUJAN. *«Highly composite numbers»*. Proc. London Math. Soc. Series 2, 14 (1915), p. 347-400 ; collected papers p. 78-129. Cambridge (1927).

[Rob 1] G. ROBIN. *«Majorations explicites du nombre de diviseurs d'un entier»*. Publ. Dépt. Maths Limoges t. 2 (1981).

[Rob 2] G. ROBIN. *«Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le k^e-nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$, nombre de diviseurs premiers de n»*. Acta Arithmetica XLII (1983) p. 367-389.

[Schin] A. SCHINZEL. *«Reducibility of lacunary polynomials, III»*. Acta Arithmetica XXXIV (1978), p. 227 à 266.

[Sch] L. SCHOENFELD. *«Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$ II»*. Math. of computation vol. 30, n^o 134 (Avril 1976).

[Shah] S. SHAH. *«An inequality for the arithmetical function g(x)»*. Journal Indian Math. Soc. 3 (1939), p. 316-318.

[Sza] M. SZALAY. *«On the maximal order in S_n and S_n^*»*. Acta Arithmetica XXXVII (1980) p. 321-331.

[Val] L.G. VALIANT et M.S. PATERSON. *«Deterministic one counter automata»*. Journal of Computer and System Sciences. Vol. 10, n^o 3, juin 1975, p. 340-350.

[Vit] P.M.B. VITANYI. *«On the size of DOL languages»*. L Systems (Third Open House, Comput. Sci. Dept. Aarhus Univ., Aarhus, 1974), pp. 78-92, 327-338. Lectures Notes in Computer Science, Vol. 15, Springer, Berlin, 1974.

(Manuscrit reçu le 5 mars 1984)

TABLE DES 23 PREMIERS NOMBRES ℓ.c.s.

ρ	ρ	N	N	ℓ(N)
		1	1	1
3/log 3	2,73	3	3	3
2/log 2 = (4n2/log 2)	2,89	2 . 3	6	5
		4 . 3	12	7
5/log 5	3,11	4 . 3 . 5	60	12
7/log 7	3,60	4 . 3 . 5 . 7	420	19
11/log 11	4,59	4 . 3 . 5 . 7 . 11	4 620	30
13/log 13	5,07	4 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13	60 060	43
(9 3)/log 3	5,46	4 . 9 . 5 . 7 . 11 . 13	180 180	49
(8–4)/log 2	5,77	8 . 9 . 5 . 7 . 11 . 13	360 360	53
17/log 17	6,00	8 . 9 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17	6 126 120	70
19/log 19	6,45	8 . 9 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19	116 396 280	89
23/log 23	7,34	8 . 9 . 5 23		112
29/log 29	8,61	8 . 9 . 5 29		141
31/log 31	9,03	8 . 9 . 5 31		172
37/log 37	10,25	8 . 9 . 5 37		209
41/log 41	11,04	8 . 9 . 5 41		250
43/log 43	11,43	8 . 9 . 5 43		293
(16–8)/log 2	11,54	16 . 9 . 5 43		301
47/log 47	12,21	16 . 9 . 5 47		348
(25–5)/log 5	12,43	16 . 9 . 25 47		368
53/log 53	13,35	16 . 9 . 25 53		421
59/log 59	14,47	16 . 9 . 25 59		480

Les valeurs de ρ données dans cette table sont les valeurs limites pour lesquels on a 2 nombres ℓ.c.s. (sauf pour $\rho = \dfrac{2}{\log 2}$). A partir de $\rho = 7{,}34$ on donne seulement le nouveau facteur de N qui apparaît.