

GUY ROBIN

**Sur la différence  $Li(\theta(x)) - \pi(x)$**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 6, n° 3-4 (1984), p. 257-268

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1984\\_5\\_6\\_3-4\\_257\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_3-4_257_0)

© Université Paul Sabatier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA DIFFERENCE $\text{Li}(\theta(x)) - \pi(x)$

Guy Robin <sup>(1)</sup>

(1) *Laboratoire d'Algorithmique et Théorie des nombres. U.E.R. des Sciences de Limoges, Département de Mathématiques et Informatique, 123 rue Albert Thomas, 87060 Limoges Cédex. et G.R.E.C.O. n° 60.*

**Résumé :** L'étude de la différence  $\text{Li}(x) - \pi(x)$ ,  $\pi(x)$  désignant le nombre de nombres premiers inférieur à  $x$ , est bien connue. On précise ici le comportement asymptotique de  $\text{Li}(\theta(x)) - \pi(x)$ , où  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ . On généralise le problème au cas des progressions arithmétiques. Les résultats obtenus utilisent l'hypothèse de Riemann généralisée et le calcul effectif des zéros des fonctions de Dirichlet.

**Summary :** The study of the difference  $\text{Li}(x) - \pi(x)$ , where  $\pi(x)$  stands for the number of prime numbers less than  $x$ , is well known. We precise there the asymptotic behaviour of  $\text{Li}(\theta(x)) - \pi(x)$ ,  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ . We extend the results to the case of arithmetics progressions. The results are obtained by using the generalized Riemann Hypothesis and the effectif calculus of the zeros of Dirichlet' functions.

### 1. - INTRODUCTION

Le théorème des nombres premiers affirme que  $\pi(x)$ , le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $x$ , est asymptotiquement équivalent, lorsque  $x$  tend vers l'infini, à

$$\text{Li}(x) = \text{vp} \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right) \quad (x > 1)$$

Bien que la différence  $\text{Li}(x) - \pi(x)$  soit positive pour  $x \leq 10^{11}$  ([SCH]) on sait d'après LITTLEWOOD ([ELL], p. 200) que :

$$\text{Li}(x) - \pi(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log \log \log x / \log x)$$

Rappelons ici que si  $g$  est une fonction réelle positive qui ne s'annule pas, alors  $f = \Omega_{+}(g)$  signifie que  $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) / g(x) > 0$  et que  $f = \Omega_{-}(g)$  signifie que  $-f = \Omega_{+}(g)$ .

Dans un article précédent ([ROB]), nous avons étudié la fonction  $\omega(n)$ , nombre de facteurs premiers de  $n$ . Si  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$  désigne la première fonction de Tchebychef, nous avons eu besoin de considérer en particulier la différence

$$A(x) = \text{Li}(\theta(x)) - \pi(x).$$

Bien que  $\theta(x)$  soit équivalent à  $x$ , le comportement de  $A(x)$  n'est pas analogue à celui de  $\text{Li}(x) - \pi(x)$ . Nous avons en effet :

**THEOREME 1.** *L'assertion,  $A(x) = \text{Li}(\theta(x)) - \pi(x) > 0$  pour  $x$  assez grand est équivalente à l'hypothèse de Riemann.*

Lorsque l'hypothèse de Riemann est vraie, il est facile de déduire de calculs faits par RAMANUJAN ([RAM], p. 119) que  $A(x) > 0$ , pour  $x$  assez grand.

Plus généralement, nous nous intéressons au même problème dans les progressions arithmétiques. Si  $(k, l) = 1$  nous posons :

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l(k)}} 1,$$

$$\theta(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l(k)}} \log p,$$

$$\phi(k) = \sum_{\substack{n \leq k \\ (n, k) = 1}} 1 \quad (\text{fonction d'Euler}),$$

$$A(x;k,l) = \text{Li}(\phi(k)\theta(x;k,l)) - \phi(k)\pi(x;k,l),$$

$$A(x;l,l) = A(x)$$

THEOREME 2. Soit  $k$  un entier positif fixé, et  $l$  un entier premier avec  $k$ . On suppose que les fonctions de Dirichlet  $L(s,\chi)$  attachées aux caractères  $\chi$  modulo  $k$  n'ont pas de zéros sur  $]0,1[$ . On pose :

$$\theta_k = \text{Max}_{\chi \text{ mod } k} (\sup \text{Re}(\rho) ; \rho \text{ zéros de } L(s,\chi) ).$$

On a alors :

a)  $A(x;k,l) = O(x^{\theta_k/\log^2 x})$

b) Si  $\theta_k > 1/2$  alors

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\xi}) \text{ pour tout } \xi < \theta_k ;$$

si de plus, il existe un zéro de partie réelle  $\theta_k$

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\theta_k/\log^2 x}).$$

c) Si  $\Theta_k = 1/2$

1. Si  $l$  n'est pas résidu quadratique mod  $k$  :

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{1/2}/\log^2 x)$$

2. Si  $l$  est résidu quadratique :

2.1 Pour certains  $k$  (ex. : 1, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12)

$$A(x;k,l) > 0 \text{ pour } x \geq x_0(k)$$

2.2 Pour d'autres  $k$  (ex. : 17, 19, 23)

$$A(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{1/2}/\log^2 x)$$

Pour la démonstration de ces théorèmes nous utiliserons les formules explicites de la théorie des nombres ([DAV], § 12 et 19), ([ELL], ch. 5 et 6), ([EDW], ch. 3), le théorème de Landau revu par Grosswald ([GRO]), des calculs de transformée de Mellin ([ELL], ch. 6), et les tables sur les zéros des fonctions de Dirichlet ([HAS], [SPI]).

## 2. - DEMONSTRATION DE LA PARTIE a

Soit  $\epsilon = \epsilon(k, l)$  le nombre de solutions,  $0 \leq x < k-1$ , de la congruence  $x^2 \equiv l(k)$ . On a  $\epsilon = \epsilon(k)\delta(l)$  avec  $\delta(l) = 1$  ou  $0$  selon que  $l$  est résidu quadratique ou non et  $\epsilon(k) = \epsilon(k, 1)$ .

D'après ([HAR], p. 98), si  $k = 2^\alpha k'$ ,  $(k', 2) = 1$  alors :  $\epsilon(k) = 2^{\omega(k)-1}$ ,  $2^{\omega(k)}$ ,  $2^{\omega(k)+1}$  selon que  $\alpha = 1, 0$  ou  $2, \geq 3$ . On posera  $\epsilon(1) = 1$ .

Posons

$$\Pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p^m \equiv l(k)}} \frac{1}{m}$$

$$\Psi(x; k, l) = \sum_{\substack{p^m \leq x \\ p^m \equiv l(k)}} \log p$$

$$\Pi(x; \chi) = \sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{\log n}$$

où  $\Lambda(n)$  est la fonction de Von Mangoldt

$$\psi(x; \chi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n)$$

$$R(x) = \min(x^{\Theta_k} \log^2 x, x e^{-a\sqrt{\log x}}) \quad a > 0$$

$$(1) \quad B(x; k, l) = \text{Li}(\phi(k) \psi(x; k, l)) - \phi(k) \Pi(x; k, l)$$

Nous pouvons écrire d'après le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques :

$$\begin{aligned} \text{Li}(\phi(k) \psi(x; k, l)) &= \text{Li}(x) + \frac{\phi(k) \psi(x; k, l) - x}{\log x} + O\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right) \\ &= \text{Li}(x) + \left(\sum_{\chi} \psi(x, \chi) \bar{\chi}(l) - x\right) / \log x + O\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right) \end{aligned}$$

et d'après la formule explicite de  $\psi(x, \chi)$  :

$$(2) \quad \text{Li}(\phi(k) \psi(x; k, l)) = \text{Li}(x) - \frac{1}{\log x} \sum_{\chi} \left(\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}\right) \bar{\chi}(l) + O\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right)$$

Les sommes portent sur tous les caractères  $\chi$  modulo  $k$  et pour chaque caractère  $\chi$  sur tous les zéros de la fonction  $L(s, \chi)$  associée. D'autre part, d'après la formule explicite de  $\Pi(x, \chi)$  :

$$(3) \quad \begin{aligned} \phi(k) \Pi(x; k, l) &= \sum_{\chi} \Pi(x, \chi) \bar{\chi}(l) \\ &= \text{Li}(x) - \sum_{\chi} \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) \bar{\chi}(l) + O(\log x) \end{aligned}$$

Les relations (2) et (3) donnent :

$$B(x; k, l) = \sum_{\chi} \left( \sum_{\rho} (\text{Li}(x^{\rho}) - \frac{x^{\rho}}{\rho \log x}) \bar{\chi}(l) \right) + O\left(\frac{R^2(x)}{x \log x}\right).$$

On peut écrire  $\text{Li}(x^{\rho}) = \frac{x^{\rho}}{\rho \log x} + \frac{x^{\rho}}{(\rho \log x)^2} + O\left(\frac{x^{\Theta}}{|\rho|^3 \log^3 x}\right)$  le terme reste étant uniforme en  $\rho$ . Comme les séries  $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho^2}$  et  $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho^3}$  sont absolument convergentes il vient :

$$(4) \quad B(x; k, l) = \sum_{\chi} \left( \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho^2 \log^2 x} \bar{\chi}(l) \right) + O(x^{\Theta}/\log^3 x)$$

$$(5) \quad B(x; k, l) = O(x^{\Theta}/\log^2 x)$$

On peut aussi écrire :

$$\psi(x; k, l) = \theta(x; k, l) + \sum_{\substack{p^2 \equiv l(k) \\ p \leq \sqrt{x}}} \log p + O(x^{1/3})$$

Soit :

$$(6) \quad \psi(x; k, l) - \theta(x; k, l) = \sum_{l_1^2 \equiv l(k)} \theta(x^{1/2}; k, l_1) + O(x^{1/3})$$

d'où

$$\text{Li}(\phi(k) \psi(x; k, l)) = \text{Li}(\phi(k) \theta(x; k, l)) + \frac{\phi(k) \sum_{l_1^2 \equiv l(k)} \theta(x^{1/2}; k, l_1) + O(x^{1/3})}{\log(\phi(k) \theta(x; k, l))} + O\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)$$

soit

$$\begin{aligned} \text{Li}(\phi(k) \psi(x; k, l)) &= \text{Li}(\phi(k) \theta(x; k, l)) + \frac{\phi(x)}{\log x} \sum_{l_1^2 \equiv l(k)} \theta(x^{1/2}; k, l_1) \\ &\quad + O(\text{Max}(x^{1/3}/\log x, \epsilon x^{-1/2} R(x))) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$(7) \quad \Pi(x; k, l) = \pi(x; k, l) + \frac{1}{2} \sum_{l_1^2 \equiv l} \pi(x^{1/2}; k, l_1) + O(x^{1/3}/\log x)$$

Comme pour tout m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi(x^{1/2}; k, m) - \frac{\theta(x^{1/2}; k, m)}{\log x} &= \frac{1}{2} \int_2^{x^{1/2}} \frac{\theta(t; k, m)}{t \log^2 t} dt \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\phi(k) \log^2 x} + O(\sqrt{x}/\log^3 x) \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$(8) \quad A(x; k, l) = B(x; k, l) + \frac{2\epsilon\sqrt{x}}{\log^2 x} + O(\sqrt{x}/\log^3 x)$$

Par suite, d'après (5) :  $A(x; k, l) = O(x^{\Theta_k}/\log^2 x)$  ce qui démontre a).

### 3. - DEMONSTRATION DE LA PARTIE c) 2.1

Puisque  $\Theta_k = 1/2$ , alors en écrivant  $\rho = 1/2 + \gamma$ , on a d'après (4) et (8)

$$A(x; k, l) = \frac{\sqrt{x}}{\log^2 x} \left( 2\epsilon + \sum_{\chi} \left( \sum_{\rho} \frac{x^{i\gamma}}{\rho^2} \right) \bar{\chi}(l) \right) + O(x^{1/2}/\log^3 x).$$

Si  $k = 1$ ,  $\sum_{\rho} |1/\rho^2| = 0,046... < 2$  donc  $A(x) > 0$  pour  $x$  assez grand.

Si  $k > 1$  et si  $l$  est résidu quadratique, on aura  $A(x; k, l) > 0$  pour tous les  $k$  tels que

$$\sum_{\chi} \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} < 2\epsilon; \text{ comme } \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} = 2 \operatorname{Re} \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}, \text{ en posant } S = \sum_{\chi} \operatorname{Re} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \right) \text{ il}$$

suffira de montrer que  $S < \epsilon$ .

Cette somme peut se calculer d'après le lemme suivant :

LEMME. Si  $\chi$  est un caractère primitif modulo  $k$  on a :

$$(9) \quad \sum_{\rho} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} - \frac{\gamma}{2} + (a-1) \log 2 + \operatorname{Re} \left( \frac{L'}{L}(1, \chi) \right),$$

formule dans laquelle la somme porte sur tous les zéros de  $L(s, \chi)$  et où  $a = 0$  ou  $1$  selon que  $\chi(-1) = 1$  ou  $-1$ .

*Démonstration.* Considérons les formules (17) et (18) de ([DAV], p. 83).

$$(10) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}a \right) + B(\chi) + \sum_{\rho} \left( \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right)$$

$$(11) \quad \operatorname{Re}(B(\chi)) = - \sum_{\rho} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\rho} \right).$$

Prenons la partie réelle de (10) en  $s = 1$ . Si  $\rho$  est zéro de  $L(s, \chi)$ ,  $1-\bar{\rho}$  est aussi un zéro, par suite :

$$\operatorname{Re} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{1-\rho} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\bar{\rho}} \right) = \operatorname{Re} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \right).$$

On obtient ainsi la formule (9) en remarquant que :

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left( \frac{1}{2} \right) = -\gamma - 2 \log 2 \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma'}{\Gamma} (1) = -\gamma.$$

Remarquons que dans le cas où  $\chi(-1) \neq 1$  alors  $L(0, \chi) \neq 0$  et on peut écrire la formule suivante :

$$(12) \quad \operatorname{Re} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{2} \log \frac{k}{\pi} + \frac{1}{2} \gamma + \log 2 - \operatorname{Re} \left( \frac{L'}{L} (0, \chi) \right).$$

Pour terminer la démonstration de la partie c.2.1, il reste à calculer  $L(1, \chi)$  et  $L'(1, \chi)$  pour les caractères  $\chi$  correspondant aux valeurs  $k$  de l'énoncé ; pour ces valeurs,  $\epsilon = 2$ , sauf pour  $k = 8, 12$  où  $\epsilon = 4$ .

Tableau des valeurs de  $S$  :

k	3 et 6	4	5 et 10	7	8	9	12
S	0,081	0,102	0,313	0,696	0,37	0,703	0,324



## 4. - LEMMES PRELIMINAIRES

LEMME 1. *Soit*

$$(13) \quad D(x;k,l) = \text{Li}(x) - \phi(k)\Pi(x;k,l) + \frac{\phi(k)\psi(x;k,l) - x}{\log x}$$

*alors :*

$$D(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\xi})$$

*et si  $\Theta$  est atteint :*

$$D(x;k,l) = \Omega_{\pm}(x^{\Theta_k/\log^2 x}).$$

Nous allons calculer la transformée de Mellin de  $D(x;k,l) \log x$  et utiliser le théorème de Landau.

Pour  $\text{Re}(s) > 1$ , on a :

$$(14) \quad \int_2^{\infty} \frac{\Pi(x,\chi)}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s} \log L(s,\chi)$$

$$(15) \quad \int_2^{\infty} \frac{\psi(x,\chi)}{x^{s+1}} dx = -\frac{1}{s} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

$$(16) \quad \int_2^{\infty} \frac{\text{Li}(x)}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s} (-\log(s-1) + g(s))$$

où  $g(s)$  est entière. (Voir par exemple [ELL], ch. 6).

Dans la suite  $h(s)$  désigne une fonction holomorphe pour  $\text{Re}(s) > 0$ , non nécessairement toujours la même. Si

$$J(s) = \int_2^{\infty} D(x;k,l) \log x/x^{s+1} dx$$

alors

$$J(s) = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \log(s-1) + \frac{1}{s} \sum_{\chi} \log L(s,\chi) \bar{\chi}(l) \right) - \frac{1}{s} \sum_{\chi} \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \bar{\chi}(l) - \frac{1}{s-1} + h(s)$$

$$J(s) = -\frac{1}{s^2} \left( \sum_{\chi} \log L(s,\chi) \bar{\chi}(l) + \log(s-1) \right) - \frac{1}{s} + h(s).$$

L'expression dans la parenthèse du second membre est holomorphe au voisinage de  $s = 1$ . Si

$$K(s) = \int_2^\infty x^\xi \log x / x^{s+1} dx = -\frac{1}{(s-\xi)^2} + h(s)$$

$J(s) - \alpha K(s)$  est holomorphe pour  $\text{Re}(s) > \Theta_k$ , se prolonge au voisinage de l'axe réel jusqu'à  $s = \xi$  et ne se prolonge pas en fonction holomorphe pour  $\text{Re}(s) > \xi$  donc,  $\forall \alpha$ ,  $D(x;k,l) \log x - \alpha x^\xi \log x$  change de signe sur en ensemble  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ ; c'est-à-dire que :

$$D(x;k,l) = \Omega_\pm(x^\xi)$$

Soit  $\rho = \Theta + i \gamma$  un zéro d'une fonction  $L(s, \chi)$  et

$$K_1(s) = \int_2^\infty x^\Theta / (x^{s-1} \log x) dx = \log(s - \Theta_k) + h(s).$$

Compte tenu que,  $J(s) - \alpha K_1(s)$  est holomorphe pour  $\sigma = \text{Re}(s) > \Theta_k$ , que  $|J(s) - \alpha K_1(s)| \sim |\alpha| \log(\sigma - \Theta_k)$  au voisinage de  $s = \Theta_k$ ; que  $|J(s) - \alpha K_1(s)| \sim \frac{1}{|\rho|^2} \log(\sigma - \Theta_k)$  au voisinage de  $s = \rho$ , on peut dire, d'après ([ELL], p. 192), que si  $\alpha$  est choisi tel que  $|\alpha| < \frac{1}{|\rho|^2}$ ,  $D(x;k,l) \log x - \alpha x^{\Theta_k} / \log x$  change de signe sur une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ ; c'est dire que :  $D(x;k,l) = \Omega_\pm(x^{\Theta_k} / \log^2 x)$ .

LEMME 2. On a

$$B(x;k,l) = \Omega_\pm(x^\xi)$$

et si  $\Theta$  est atteint

$$B(x;k,l) = \Omega_\pm(x^\Theta / \log^2 x).$$

D'après (1) et (13) nous avons :

$$(14) \quad B(x;k,l) = D(x;k,l) + O\left(\frac{S^2(x)}{x \log^2 x}\right)$$

avec  $S(x) = x - \phi(k)\psi(x;k,l)$ .

Si  $\Theta_k < 1$ ,  $B(x;k,l) = D(x;k,l) + O(x^{2\Theta_k-1} \log^2 x)$  et comme  $\xi$  peut être choisi tel que  $\xi > 2\Theta_k - 1$ , le lemme 2 est, sous cette hypothèse, conséquence du lemme 1.

Si  $\theta_k = 1$ , l'inégalité  $B(x;k,l) < D(x;k,l)$  donne :

$$B(x;k,l) = \Omega_-(x^\xi).$$

La démonstration de  $B(x;k,l) = \Omega_+(x^\xi)$  demande plus d'efforts. Soit  $(r_n)_n \in \mathbb{N}$  la suite, croissante, des nombres qui sont puissance d'un nombre premier congru à 1 modulo  $k$ . Pour  $\xi < 1$ , fixé, la fonction  $y : x \rightarrow D(x;k,l) - x^\xi$  est continue et dérivable sur tout intervalle  $]r_n, r_{n+1}[$  et l'on a :

$$(15) \quad y'(x) = \frac{S(x)}{x \log^2 x} - \xi x^{\xi-1}$$

$$(16) \quad y'(r_n^+) = \frac{S(r_n)}{r_n \log^2 r_n} - \xi r_n^{\xi-1} = y'(r_n^-) - \frac{\phi(k)\Lambda(r_n)}{r_n \log^2 r_n}.$$

Pour  $x \geq x_0$ , la fonction  $x \rightarrow x - \xi x^\xi \log^2 x$  est croissante, par suite  $y'(x)$  est croissante sur chaque intervalle  $]r_n, r_{n+1}[$  avec  $r_n > x_0$ ; elle s'annule donc au plus une fois dans un tel intervalle.

Soit

$$A_1 = \{a ; a > x_0 ; y'(a) = 0\}$$

$$A_2 = \{r_n ; r_n > x_0 ; y'(r_n^+)y'(r_n^-) < 0\}$$

et

$$A = A_1 \cup A_2.$$

L'ensemble  $A$  est discret d'après ce qui précède ; montrons qu'il est infini. Dans l'hypothèse contraire on aurait pour tout  $x \geq x_1$   $y'(x) > 0$  ou  $y'(x) < 0$ . D'après (15), il en résulterait pour tout  $x \geq x_1$ , dans le premier cas  $S(x) > 0$ , dans le deuxième cas  $S(x) < \xi x^\xi \log^2 x$ . Dans les deux cas on aurait une contradiction avec le résultat classique  $S(x) = \Omega_\pm(x^{\xi'})$ , avec  $\xi < \xi' < 1$ .

Soit  $(x_n)_n \in \mathbb{N}$  la suite croissante des éléments de  $A$  ; montrons que  $S(x_n)$  est assez petit.

$$\text{Si } x_n \in A_1 \text{ alors } S(x_n) = \xi x_n^\xi \log^2 x_n.$$

Si  $x_n \in A_2$  utilisons l'égalité (16).

Si  $S(x_n) > 0$ , comme  $y'(x_n^+) < 0$  il vient  $S(x_n) < \xi x_n^\xi \log^2 x_n$  tandis que si  $S(x_n) < 0$  on a  $|S(x_n)| < \phi(k)\Lambda(x_n)$  puisque  $y'(x_n^-) > 0$ .

$$\text{On a donc toujours, } |S(x_n)| = o(x_n^\xi \log^2 x_n).$$

Soit  $n_0$  donné ; si pour tout  $n \geq n_0$  on avait  $y(x_n) \leq 0$  alors  $\forall x > x_{n_0}$  on aurait

$y(x) \leq 0$  et donc  $D(x;k,l) < x^\xi$  en contradiction avec le lemme 1. Par suite, il existe une infinité de  $x_n$  tels que  $y(x_n) > 0$ . Pour cette suite infinie, compte tenu que  $y(x_n) > 0$  entraîne  $D(x_n;k,l) > x_n^\xi$ , on a,

$$B(x_n;k,l) = D(x_n;k,l) + o\left(\frac{S^2(x_n)}{x_n \log^2 x_n}\right) > x_n^\xi + o(x_n^{2\xi-1} \log^2 x_n)$$

ce qui montre que  $B(x;k,l) = \Omega_+(x^\xi)$ .

### 5. FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Les résultats du § 4, compte tenu de l'égalité (8) démontrent les parties b et c.1 du théorème.

Sous les hypothèses de c.2.2,  $\theta_k = 1/2$  et  $l$  est résidu quadratique modulo  $k$  où  $k$  est l'une des 3 valeurs 17, 19 ou 23. On utilise alors le résultat de Grosswald ([GRO], p. 417) qui nous donne la possibilité de choisir le paramètre  $\alpha$  de la fin de l'étude du lemme 1 supérieur à 4, ce qui permet d'après (8) de prouver que

$$A(x;k,l) = \Omega_\pm(x^{1/2}/\log^2 x).$$

Avec les notations de Grosswald et de Spira on utilise

pour  $k = 17$ , le zéro de plus basse ordonnée : c'est celui de  $\chi_1$ , d'ordonnée 0,391 et  $N = 5$  ;

pour  $k = 19$ , le zéro de plus basse ordonnée : c'est celui de  $\chi_5$ , d'ordonnée 0,0189 et  $N = 2$  ;

pour  $k = 23$ , les 2 zéros de plus basses ordonnées : celui de  $\chi_9$ , d'ordonnée 0,595 et celui de  $\chi_{17}$  d'ordonnée 0,689 avec  $N = 2$ .

## REFERENCES

- [DAV] H. DAVENPORT. «*Multiplicative number theory*». Springer Verlag (1967).
- [EDW] H.M. EDWARDS. «*Riemann's Zeta function*». Academic Press (1974).
- [ELL] J. ELLISON. «*Les nombres premiers*». Hermann Paris (1975). Actual. Scien. et Ind. n<sup>o</sup> 1366.
- [GRO] E. GROSSWARD. «*Oscillation theorems*». Conf. on the theory of arithmetic functions». Springer Lecture Notes 151 (1971).
- [HAR] G.H. HARDY, E.M. WRIGHT. «*An introduction to the theory of numbers*». Oxford (1960).
- [HAS] C.B. HASELGROVE et D. DAVIES. «*The evaluation of Dirichlet L functions*». Proc. Soc. Ser. (1961) A. 264, p. 122-132.
- [RAM] S. RAMUNJUN. «*Highly composite numbers*». Proc. London Math. Soc., Ser. 2, 14 (1915), p. 347-400 ; Collected papers, 78-128, Chelsea.
- [ROB] G. ROBIN. «*Estimation de la fonction de Tchebychef  $\theta$  sur le  $k^{\text{ième}}$  nombre premier et grandes valeurs de la fonction  $\omega(n)$ , nombre de diviseurs premiers de  $n$* ». Acta Arithmetica, vol. 42, n<sup>o</sup> 4, (1983), p. 367-389.
- [SCH] L. SCHOENFELD. «*Sharper bounds fo the Chebyshev fonctions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$* ». II Math. of Comp., Vol. 30, Numb. 134, (1976) p. 337-360.
- [SPI] R. SPIRA. «*Calculation of Dirichlet L functions*». Math. Comp.23 (1969), p. 489-498.

(Manuscrit reçu le 19 mars 1984)