DOMINIQUE APPRATO

Étude de la convergence du produit tensoriel de fonctions spline à une variable satisfaisant à des conditions d'interpolation de Lagrange

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 6, nº 2 (1984), p. 153-170

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1984_5_6_2_153_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VI, 1984, P. 153 à 170

ETUDE DE LA CONVERGENCE DU PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE A UNE VARIABLE SATISFAISANT A DES CONDITIONS D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Dominique Apprato (1)

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Exactes et Naturelles, Avenue Louis Sallenave, 64000 Pau - France.

Résumé : On montre que dans un certain espace fonctionnel le produit tensoriel de fonctions spline à une variable satisfaisant à des conditions d'interpolation de Lagrange est en fait une fonction spline. On étudie alors la convergence du produit tensoriel de fonctions spline dans cet espace.

Summary : We show that tensor-product of spline functions in one variable satisfying Lagrange interpolation conditions is in fact a genuine spline function in some functional space. Then we study the convergence of tensor product of spline functions in this space.

1. - INTRODUCTION - NOTATIONS - RAPPELS

1.0. - Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de la convergence du produit tensoriel de fonctions spline à une dimension satisfaisant à des conditions d'interpolation de Lagrange aux noeuds d'un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées.

Par souci de simplicité on s'est limité au cas du produit tensoriel de deux fonctions spline à une variable minimisant, sous des conditions d'interpolation de Lagrange, la semi-norme correspondant aux dérivées de longueur 2. Mais il n'y a aucune difficulté théorique à généraliser les résultats obtenus au cas du produit tensoriel de m *fonctions spline* appartenant chacune à des espaces de Sobolev *d'ordre* $k > 2$ et satisfaisant à des conditions d'interpolation analogues.

Dans les paragraphes 1 et 2 on rappelle les propriétés du produit tensoriel de fonctions spline à une variable ; des propriétés, classiques, on déjà été étudiées par AHLBERT - NILSON - WALSH [1], M. ATTEIA [4], C. de BOOR [5], C.F. DUCATEAU [9], T.N.E. GREVILLE [10], M.H. SCHULTZ [15], L. SCHUMAKER [16], etc...

On introduit ici une norme tensorielle «naturelle» associée aux conditions d'interpolation, qui permet d'établir une propriété minimale (analogue à une propriété obtenue par C.F. DUCATEAU [9]) du produit tensoriel de fonctions spline et d'étudier sa convergence.

Dans le paragraphe 3 on introduit un espace de Sobolev intermédiaire V muni d'une norme associée à la norme tensorielle introduite dans le paragraphe 2. On établit pour cet espace des résultats de densité, de traces et de complétude. On montre que dans V le *produit tensoriel de fonctions spline est encore une fonction spline.*

Dans le paragraphe 4 on fait l'étude de la convergence du produit tensoriel de fonctions spline dans l'espace V. Ces résultats complètent et généralisent de façon naturelle des résultats intermédiaires obtenus par exemple par AHLBERG - NILSON - WALSH [1], M.H. SCHULTZ [15], L. SCHUMAKER [16] etc... Ils sont aussi à rapprocher de ceux obtenus par W. DAHMEN - R. de VORE et K. SCHERER [8], concernant l'erreur de meilleure approximation par des polynômes dans des espaces produits.

1.1. - Rappels

Pour tout ouvert borné ω de IR^m, $m = 1$ ou 2, on désigne par $H^2(\omega)$ l'espace de Sobolev des (classes) de fonctions v qui appartiennent à $L^2(\omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha v$ d'ordre $|\alpha| \leqslant 2$, muni de la norme

$$\| v \|_{2,\omega} = \left(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2} \int_\omega |\partial^\alpha v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

On utilisera également les semi-normes

$$|v|_{\ell,\omega} = \left(\sum_{|\alpha| = \ell} \int_\omega |\partial^\alpha v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad \ell = 0,1,2.$$

Enfin, on désigne par $Q_1(\omega)$ l'espace vectoriel des restrictions à ω de (fonctions) polynômes à m variables de degré $\leqslant 1$ par rapport à chaque variable.

1.2. - Notations

- Soient a et b deux réels strictement positifs. Dans tout ce qui suit on désigne par Ω l'ouvert de IR^2 défini par ; $\Omega =]-a,a[\times]-b,b[$.

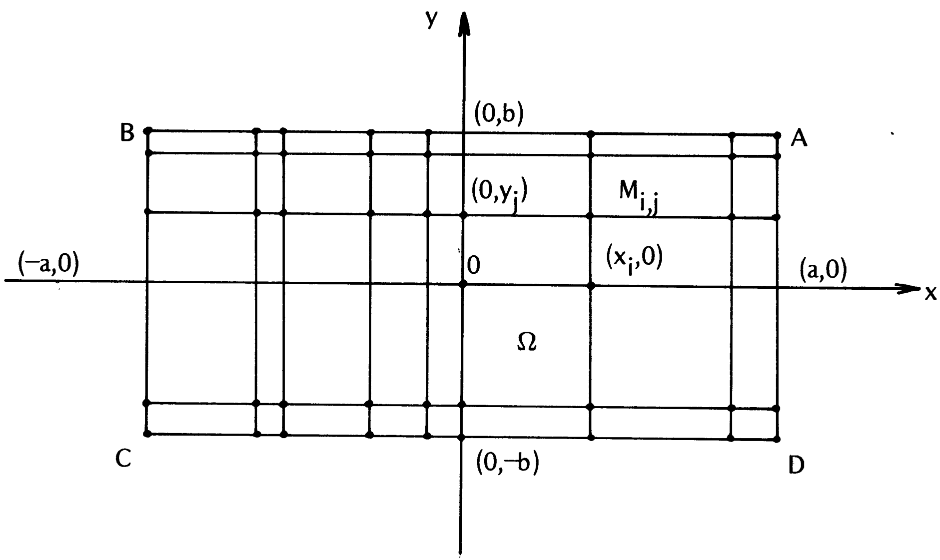
- Soit $n \in \mathrm{IN}^*$, *un entier donné*, et $\{x_i\}_{i=0}^{k(n)}$, $\{y_j\}_{j=0}^{\ell(n)}$ des réels tels que :

$$\begin{cases} x_o = -a < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < a = x_{k(n)} \\ y_o = -b < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < b = y_{\ell(n)}. \end{cases}$$

On note alors

$$\forall\, i = 0,\ldots,k(n),\quad \forall\, j = 0,\ldots,\ell(n),\quad M_{i,j} = (x_i,y_j) \in \mathrm{IR}^2,$$

on obtient ainsi une «triangulation» $\mathcal{T}_n$ de $\bar{\Omega}$ par des rectangles de sommets $M_{i,j}$



Si l'on note $\{A,B,C,D\}$ les quatre sommets du rectangle $\bar{\Omega}$, on remarque que $\{M_{i,j}\}_{i=0,\ldots,k(n)}^{j=0,\ldots,\ell(n)}$ contient $\{A,B,C,D\}$ qui est $Q_1(\Omega)$-unisolvant, au sens de CIARLET-RAVIART [7].

- On introduit alors les fonctions spline ponctuelles suivantes, cf. P.J. LAURENT [11] ;

Pour tout $i = 0,\ldots,k(n)$, $\varphi_i \in H^2(]-a,a[\,)$ est la fonction spline de base définie par :

$$(1.1)\quad \begin{cases} \text{pour tout } i_o = 0,\ldots,k(n), \quad \varphi_i(x_{i_o}) = \delta_{i,i_o}, \\ \text{et pour tout } v \in \{v \in H^2(]-a,a[); \forall_{i_o} = 0,\ldots,k(n),\ v(x_{i_o}) = \delta_{i,i_o}\} \\ \quad |\varphi_i|_{2,]-a,a[} \leqslant |v|_{2,]-a,a[} \end{cases}$$

Pour tout $j = 0,\ldots,\ell(n)$, $\Psi_j \in H^2(]-b,b[\ )$ est la fonction spline de base définie par :

$$(1.2)\quad \begin{cases} \text{Pour tout } j_o = 0,\ldots,\ell(n), \quad \Psi_j(y_{j_o}) = \delta_{j,j_o} \\ \text{et pour tout } v \in \{v \in H^2(]-b,b[\ )\ ;\ \forall j_o = 0,\ldots,\ell(n),\ v(y_{j_o}) = \delta_{j,j_o}\} \\ \quad |\psi_j|_{2,]-b,b[} \leqslant |v|_{2,]-b,b[} \end{cases}$$

On sait alors, d'après les propriétés minimales de φ_i et Ψ_j, que

$$(1.3)\quad \begin{cases} \forall i = 0,\ldots k(n),\ \forall v \in \{v \in H^2(]-a,a[\ ),\ \forall i_o = 0,\ldots,k(n), v(x_{i_o}) = 0\}, \\ \qquad \displaystyle\int_{-a}^{a} \varphi_i''(x)v''(x)dx = 0 \\ \forall j = 0,\ldots,\ell(n),\ \forall v \in \{v \in H^2(]-b,b[),\ \forall j_o = 0,\ldots,\ell(n), v(y_{j_o}) = 0\}, \\ \qquad \displaystyle\int_{-b}^{b} \Psi_j''(y)v''(y)dy = 0. \end{cases}$$

2. - CONSTRUCTION D'UN PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE SUR Ω-CARACTERISATION ET PROPRIETES

Dans ce qui suit, sauf précision contraire, $n \in \mathbb{N}^*$ est *fixé quelconque* ainsi que $\beta = (\beta_{i,j})_{\substack{j=0,\ldots,\ell(n)\\ i=0,\ldots,k(n)}} \in \mathbb{R}^{k(n)+\ell(n)+2}$.

2.1. - Construction

On note $\sigma_n(\beta)$ la fonction définie sur Ω par :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \sigma_n(\beta) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k(n)} \sum_{j=0}^{\ell(n)} \beta_{i,j}\,\sigma_{i,j} \\ \text{où } \forall (x,y) \in \Omega, \quad \sigma_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x)\,\Psi_j(y), \quad \text{avec } \varphi_i \text{ et } \Psi_j \\ \text{définies dans (1.1) et (1.2).} \end{cases}$$

D'après (1.1), (1.2), (2.1) et les propriétés de régularité que l'on a sur φ_i et Ψ_j, cf. P.J. LAURENT [11], on obtient

$$(2.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_n(\beta) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \\ \forall i = 0,\ldots,k(n),\ \forall j = 0,\ldots,\ell(n),\ [\sigma_n(\beta)]\,(M_{i,j}) = \beta_{i,j} \\ \forall j = 0,\ldots,\ell(n),\ \dfrac{\partial^2\sigma_n(\beta)}{\partial x^2}\,(.,y_j) \in C^0(]-a,a[\,) \\ \forall i = 0,\ldots,k(n),\ \dfrac{\partial^2\sigma_n(\beta)}{\partial y^2}\,(x_i,.) \in C^0(]-b,b[\,) \\ \dfrac{\partial^4\sigma_n(\beta)}{\partial x^2\partial y^2} \in C^0(\Omega) \end{array}\right.$$

2.2. - Caractérisation

- On considère l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des combinaisons linéaires finies des fonctions de la forme $(f \otimes g)$ où $f \in H^2(]-a,a[)$ et $g \in H^2(]-b,b[\,)$. On a alors les propriétés suivantes

$$\sigma_n(\beta) \in \mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} \subset H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$$

$$(2.3)\quad \left\{\begin{array}{l} \forall v \in \mathcal{E} : \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,(.,b) \ \text{ et } \ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,(.,-b) \in L^2(]-a,a[\,) \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,(a,.) \ \text{ et } \ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,(-a,.) \in L^2(]-b,b[\,) \\ \dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2} \in L^2(\Omega) \end{array}\right. .$$

- On munit alors, de façon canonique, $\mathcal{E}$ d'un *produit scalaire noté* $(\,.\,)_{\otimes}$ et défini par :

si $$u_1 = \sum_{r=1}^{N_1} \xi_r^1 (f_r^1 \otimes g_r^1) \in \mathcal{E} \quad \text{et} \quad u_2 = \sum_{s=1}^{N_2} \xi_s^2 (f_s^2 \otimes g_s^2) \in \mathcal{E},$$

avec $f_r^1, f_s^2 \in H^2(]-a,a[\,)$, $g_r^1, g_s^2 \in H^2(]-b,b[\,)$, ξ_r^1 et $\xi_s^2 \in \mathbb{R}$ alors

$$(u_1,u_2)_{\otimes} = \sum_{r=1}^{N_1} \sum_{s=1}^{N_2} \xi_r^1\, \xi_s^2 < f_r^1, f_s^2 >_X \ < g_r^1, g_s^2 >_Y$$

où $$< f_r^1, f_s^2 >_X = f_r^1(a) f_s^2(a) + f_r^1(-a) f_s^2(-a) + \int_{-a}^{a} (f_r^1)''(x)(f_s^2)''(x)dx$$

et $$< g_r^1, g_s^2 >_Y = g_r^1(b) g_s^2(b) + g_r^1(-b) g_s^2(-b) + \int_{-b}^{b} (g_r^1)''(y)(g_s^2)''(y)dy$$

sont des produits scalaires respectivement sur $H^2(]-a,a[)$ et $H^2(]-b,b[)$ et qui sont respectivement équivalents, cf. J. NEČAS [13], aux produits scalaires usuels sur ces espaces.

On a, avec les notations précédentes, la relation suivante :

$$(2.4)\quad \left\{\begin{aligned} &\forall (u,v) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \\ &(u,v)_{\otimes} = u(A)v(A) + u(B)v(B) + u(C)v(C) + u(D)v(D) \\ &\quad + \int_{-a}^{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,-b)\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(.,-b)dx + \int_{-a}^{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,b)\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(.,b)dx \\ &\quad + \int_{-b}^{b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a,.)\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(a,.)dy + \int_{-b}^{b} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(-a,.)\, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(-a,.)dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\, \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2}\, dx\, dy , \end{aligned}\right.$$

les intégrales ayant un sens d'après (2.3) ; on peut d'ailleurs vérifier directement que (2.4) définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$, cela venant du fait que $\{A,B,C,D\}$ est $Q_1(\Omega)$-unisolvant.

2.3. - Propriété minimale de $\sigma_n(\beta)$

La fonction $\sigma_n(\beta)$ vérifie la propriété minimale

$$(2.5)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{si } \mathcal{E}_n^o = \{v \in \mathcal{E} \ ; \forall i = 0,\dots,k(n),\ \forall j = 0,\dots,\ell(n),\ v(M_{i,j}) = 0\}, \\ &\text{alors} \\ &\forall v \in \mathcal{E}_n^o \ (\sigma_n(\beta),v)_{\otimes} = 0 \end{aligned}\right.$$

Pour montrer (2.5), il suffit d'après (2.1) de le vérifier pour chaque fonction $\sigma_{i,j}$.

Démonstration de (2.5). Pour cela il suffit, d'après (2.4) de vérifier les assertions suivantes :

$$\forall v \in \mathcal{E}_n^o \text{ , tel que } \forall (x,y) \in \Omega,\ v(x,y) = u(x)\, w(y)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{i)} & \text{si } y^* = -b \text{ ou } b,\ \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial x^2}(\,.\,;y^*)\, u''(x)\, w(y^*)\, dx = 0 \\ \text{ii)} & \text{si } x^* = -a \text{ ou } a,\ \displaystyle\int_{-b}^{b} \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial y^2}(x^*,.)\, u(x^*)\, w''(y)\, dy = 0 \\ \text{iii)} & \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial^4 \sigma_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2}\, u''(x)\, w''(y)\, dy = 0. \end{array}\right.$$

–) Le résultat s'en déduira alors par linéarité pour tout $v \in \mathcal{E}_n^o$.

–) démonstration de i) : on a,

$$\int_{-a}^{a} \frac{\partial^2 \sigma_{i,j}}{\partial x^2}(.,y^*)\, u''(x)\, w(y^*)\, dx = \int_{-a}^{a} (\varphi_i)''(x)\, \Psi_j(y^*) u''(x) w(y^*) dx$$

d'après (2.1).

Posons $\theta(x) = u(x)\, w(y^*)$, alors $\theta \in H^2(]-a,a[\,)$ et

$$\forall i = 0,\dots,k(n),\ \theta(x_i) = 0$$

puisque $u(x)\, w(y) \in \mathcal{E}_n^o$, donc d'après (1.3),

$$\int_{-a}^{a} (\varphi_i'')(x)\, \theta''(x) dx = 0, \text{ doù i).}$$

–) les démonstrations de ii) et iii) sont analogues à celles de i) □

Remarque 2.1. L'idée est maintenant d'étendre la propriété minimale (2.5) à un espace plus général que $\mathcal{E}$.

3. - CADRE FONCTIONNEL DE L'APPROXIMATION PAR PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE

Suivant les idées de M. ATTEIA [4] et L. SCHUMAKER [16], on considère l'espace

$$V = \left\{ v \in L^2(\Omega) \; ; \; \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \; \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \; \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \in L^2(\Omega) \right\};$$

c'est un Hilbert pour la norme euclidienne notée $\| \cdot \|$,

$$\text{(2.8)} \qquad v \in V \to \| v \| = \left(|v|^2_{0,\Omega} + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|^2_{0,\Omega} + \left| \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|^2_{0,\Omega} + \left| \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} \right|^2_{0,\Omega} \right)^{1/2}.$$

On peut remarquer que $(V, \| \cdot \|)$ est le produit tensoriel (complété) de $H^2(]-a,a[)$ par $H^2(]-b,b[)$ munis respectivement des normes définies par :

$$\forall u \in H^2(]-a,a[), \; \| u \|_{]-a,a[} = \left(|u|^2_{0,]-a,a[} + |u|^2_{2,]-a,a[} \right)^{1/2}$$

et

$$\forall w \in H^2(]-b,b[), \; \| w \|_{]-b,b[} = \left(|w|^2_{0,]-b,b[} + |w|^2_{2,]-b,b[} \right)^{1/2}$$

Ces normes étant équivalentes aux normes usuelles sur ces espaces d'après, par exemple, un théorème d'ARONSZAJN - SMITH, cf. [3] :

Pour un ouvert Ω assez régulier de $\mathbb{R}^n$, si $u \in L^p(\Omega)$ et si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\dfrac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \in L^p(\Omega)$, on a $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et il existe une constante $c > 0$ indépendante de u telle que

$$\| u \|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leqslant c \left(|u|_{0,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_i^{k+1}} \right|_{0,p,\Omega} \right).$$

- On a alors $\mathcal{E} \subset V \hookrightarrow H^2(\Omega)$.

THEOREME 3.1. *Avec les notations précédentes, l'on a :*

(2.9) $\qquad \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* V *pour la topologie induite par* $\| \cdot \|$.

$$\text{(2.10)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \; (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^o_n = \{ \eta \in \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \; ; \; \forall i = 0,\ldots,k(n), \forall j = 0,\ldots \ell(n), \eta(M_{i,j}) = 0 \} \\ \textit{est dense dans } V^o_n = \{ v \in V \; ; \; \forall i = 0,\ldots,k(n), \; \forall j = 0,\ldots,\ell(n), \; v(M_{i,j}) = 0 \} \\ \textit{pour la topologie induite par } \| \cdot \|. \end{array} \right.$$

Démonstration. i) La démonstration de (2.9) utilise des arguments analogues à ceux du théorème des dérivées intermédiaires (cf. J.L. LIONS - E. MAGENES [12]). Elle se fait par prolongement, troncature et régularisation.

ii) Pour démontrer (2.10), on opère de la façon suivante :

- $n \in \mathbb{N}^*$ *étant donné,* ainsi qu'une triangulation $\mathscr{T}_n$ (voir notations) de $\overline{\Omega}$, notons r la plus petite des largeurs des rectangles de $\mathscr{T}_n$.

En chaque noeud $M_{i,j}$, $i = 0,\dots,k(n)$, $j = 0,\dots,\ell(n)$, de $\mathscr{T}_n$ on peut considérer alors une fonction

$$\chi_{i,j} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2),\ \chi_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ sur la boule de centre } M_{i,j} \text{ de rayon } \frac{r}{4} \\ 0 \text{ à l'extérieur de la boule de centre } M_{i,j} \\ \text{et de rayon } \frac{r}{3} \end{cases}$$

On obtient ainsi une famille finie $\left\{ \chi_{i,j} \right\}_{i=0,\dots,k(n)}^{j=0,\dots,\ell(n)}$ de fonctions très régulières à supports disjoints.

- Soit alors v *une fonction donnée de* V_n^o. D'après (2.9) $\exists \{\eta_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ telle que $\eta_m \xrightarrow{m \to +\infty} v$ dans V pour la topologie induite par $\|\cdot\|$.

Considérons alors la suite de fonctions définies par :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ g_m = \eta_m - \sum_{i=0}^{k(n)} \sum_{j=0}^{\ell(n)} \eta_m(M_{i,j})(\chi_{i,j})\,|\,\overline{\Omega}.$$

Il est clair par construction que $g_m(M_{i,j}) = 0$, $\forall i = 0,\dots,k(n)$, $\forall j = 0,\dots,\ell(n)$, d'autre part $\eta_m \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$; donc $\forall m \in \mathbb{N}$ $g_m \in (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))_n^o$. On vérifie alors que $g_m \xrightarrow{m \to +\infty} v$ dans V pour $\|\cdot\|$, cela résultant des inclusions $V \hookrightarrow H^2(\Omega) \hookrightarrow C^o(\overline{\Omega})$, d'où (2.10). □

LEMME 3.1. *Les applications*

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(]-a,a[) \\ \gamma_2 &: \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(]-b,b[) \\ \gamma_3 &: \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(]-a,a[) \\ \gamma_4 &: \mathscr{D}(\overline{\Omega}) \to L^2(]-b,b[), \end{aligned}$$

définies par

$$\gamma_1(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(.,b),\ \gamma_2(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(a,.),\ \gamma_3(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(.,-b)\ \text{et}\ \gamma_4(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(-a,.)$$

vérifient

$$(2.11)\quad\begin{cases}\exists c_1,c_2>0\ ,\quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\bar\Omega)\\[4pt] |\gamma_1(\varphi)|_{0,]-a,a[}\leqslant c_1\left(\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2_{0,\Omega}+\left|\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}\leqslant c_1\,\|\varphi\|\\[4pt] |\gamma_2(\varphi)|_{0,]-b,b[}\leqslant c_2\left(\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2_{0,\Omega}+\left|\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}\leqslant c_2\,\|\varphi\|\\[4pt] |\gamma_3(\varphi)|_{0,]-a,a[}\leqslant c_1\left(\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2_{0,\Omega}+\left|\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}\leqslant c_1\,\|\varphi\|\\[4pt] |\gamma_4(\varphi)|_{0,]-b,b[}\leqslant c_2\left(\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}+\left|\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}\leqslant c_2\,\|\varphi\|\end{cases}$$

De plus on peut prolonger par densité les applications γ_i , $i=1,\ldots,4$ sur V et les relations (2.11) sont encore vraies pour tout $v\in V$.

Démonstration. On vérifie uniquement la première inégalité de (2.11), les autres se démontrant de façon analogue.

Le prolongement par densité résulte alors du théorème 3.1. Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\bar\Omega)$, on a alors pour tout $(x,y)\in\Omega$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)+(b-y)\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,y)+\int_0^1(1-t)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,y+t(b-y))(b-y)^2dt$$

et donc

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)\right]^2\leqslant 3\left(\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\right]^2+(b-y)^2\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,y)\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1(1-t)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,y+t(b-y))\,(b-y)^2dt\right]^2\right)$$

On intègre alors cette inégalité par rapport à y sur $]-b,b[$ et l'on obtient

$$(2.12)\quad \left\{\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)\right]^2 \leqslant \frac{3}{2b}\Bigg(\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\right]^2 dy + 4b^2\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,y)\right]^2 dy \\ + \int_{-b}^{b}\left[\int_0^1 (1-t)\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\,(x,y+t(b-y))(b-y)^2dt\right]^2 dy\Bigg) \end{aligned}\right.$$

or $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, pour tout $x \in]-a,a[$ $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,.) \in H^2(]-b,b[)$ et d'après un théorème d'ARONSZAJN-SMITH cf. [3], on a :

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Il existe } c > 0 \text{ indépendante de } x \in]-a,a[\text{ telle que} \\ &\left\|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,.)\right\|_{2,]-b,b[} \leqslant c\left(\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,.)\right|_{0,]-b,b[} + \left|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,.)\right|_{0,]-b,b[}\right). \end{aligned}\right.$$

On en déduit en particulier que

$$\left|\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,.)\right|^2_{0,]-b,b[} \leqslant 2c^2\left(\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\right]^2 dy + \int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right]^2 dy\right)$$

D'où en reportant cette dernière inégalité dans (2.12), on obtient

$$\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)\right]^2 \leqslant c'\Bigg(\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\right]^2 dy + \int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right]^2 dy$$
$$+ \int_{-b}^{b}\left[\int_0^1 (1-t)\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\,(x,y+t(b-y))(b-y)^2dt\right]^2 dy\Bigg)$$

On intègre alors cette dernière inégalité par rapport à x sur $]-a,a[$ et l'on obtient

$$|\gamma_1(\varphi)|^2_{0,]-a,a[} \leqslant c'\Bigg(\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2_{0,\Omega} + \left|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}$$
$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\int_0^1 (1-t)\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\,(x,y+t(b-y))(b-y)^2dt\right]^2 dy\,dx\ .$$

En posant alors $s = (1-t)(y-b)$ dans la dernière intégrale de cette inégalité, on montre qu'elle est majorée par $c\left|\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}$, d'où le résultat. □

LEMME 3.2. *Soient $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ les applications définies dans le lemme 3.1. On a :*

$$(2.13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \textit{Il existe } c_3 \textit{ et } c_4 > 0 \textit{ telles que } \forall v \in V, \\[2mm] \left|\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{0,\Omega} \leqslant c_3\left(|\gamma_1(v)|^2_{0,]-a,a[} + |\gamma_3(v)|^2_{0,]-a,a[} + \left|\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}, \\[2mm] \left|\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{0,\Omega} \leqslant c_4\left(|\gamma_2(v)|^2_{0,]-b,b[} + |\gamma_4(v)|^2_{0,]-b,b[} + \left|\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right)^{1/2}. \end{array}\right.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, le résultat général dans V s'obtenant par densité. On vérifie ici uniquement la première inégalité de (2.13), l'autre se démontrant de façon analogue.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, on a alors pour tout $(x,y) \in \Omega$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b) + (y-b)\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,b) + \int_0^1 (1-t)\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,b+t(y-b))(y-b)^2dt$$

En élevant au carré cette égalité et en intégrant par rapport à y sur $]-b,b[$ on obtient :

$$(2.14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\right]^2 dy \leqslant 3\left(2b\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)\right]^2 + \frac{8b^3}{3}\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,b)\right]^2\right. \\[2mm] \qquad\qquad \displaystyle\left. + \int_{-b}^{b}\left[\int_0^1 (1-t)\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,b+t(y-b))(y-b)^2dt\right]^2 dy\right) \end{array}\right.$$

Or $\varphi \in \mathscr{D}(\overline{\Omega})$, donc pour tout $x \in\,]-a,a[\;\; \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,.) \in H^1(]-b,b[) \hookrightarrow C^0([-b,b])$ donc il existe $c > 0$ indépendante de $x \in\,]-a,a[$ telle que :

$$\sup_{y\in[-b,b]}\left|\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\partial x^2}(x,y)\right| \leqslant c\left\|\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2}(x,.)\right\|_{2,]-b,b[}.$$

En utilisant alors un théorème d'équivalence de normes cf. J. NEČAS [13] on en déduit que :

$$\exists\ \alpha>0,\ \forall x\in\,]-a,a[,\ \left|\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}(x,b)\right|^2\leqslant\alpha\left(\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)\right]^2+\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,-b)\right]^2+\left|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial^{\ 2}}(x,.)\right|^2_{0,]-b,b[}\right.$$

En reportant cette inégalité dans (2.14) on obtient

$$\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)\right]^2 dy\leqslant c'\left(\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,b)\right]^2+\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,-b)\right]^2+\int_{-b}^{b}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right]^2 dy\right.$$

$$\left.+\int_{-b}^{b}\left[\int_0^1(1-t)\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,b+t(y-b))(y-b)^2\,dt\right]^2 dy\right)$$

On intègre alors cette dernière inégalité par rapport à x sur $]-a,a[$ et l'on a

$$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|^2_{0,\Omega}\leqslant c'\left(|\gamma_1(\varphi)|^2_{0,]-a,a[}+|\gamma_3(\varphi)|^2_{0,]-a,a[}+\left|\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}\right.$$

$$\left.+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\int_0^1(1-t)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}(x,b+t(y-b))(y-b)^2\,dt\right]^2 dy\,dx\right).$$

En posant $s=(1-t)(b-y)$ dans la dernière intégrale de cette inégalité on montre qu'elle est majorée par $c\left|\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right|^2_{0,\Omega}$, d'où le résultat. □

THEOREME 3.2. *Utilisant le lemme 3.1, on définit sur* V X V, *la forme bilinéaire symétrique notée* $(\ ,\ )_\otimes$ *telle que :*

$$(2.15)\quad\left\{\begin{aligned}&\forall(u,v)\in V\times V\\&(u,v)_\otimes=u(A)v(A)+u(B)v(B)+u(C)v(C)+u(D)v(D)\\&\qquad+\int_{-a}^{a}\gamma_1(u)\gamma_1(v)dx+\int_{-a}^{a}\gamma_3(u)\gamma_3(v)dx\\&\qquad+\int_{-b}^{b}\gamma_2(u)\gamma_2(v)dy+\int_{-b}^{b}\gamma_4(u)\gamma_4(v)dy\\&\qquad+\int_\Omega\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}\ \frac{\partial^4v}{\partial x^2\partial y^2}\,dx\,dy\end{aligned}\right.$$

alors les assertions suivantes sont vraies.

i) $(\,,\,)_{\otimes}$ *est un produit scalaire sur* V.
Si l'on pose

$$\forall v \in V, \ \| v \|_{\otimes} = ((v,v)_{\otimes})^{1/2} \tag{2.16}$$

on obtient

ii) $\exists c_5, c_6 > 0, \ \forall v \in V \ \| v \|_{2,\Omega} \leqslant c_5 \| v \|_{\otimes} \leqslant c_6 \| v \|$

iii) $\| \cdot \|_{\otimes}$ *est une norme équivalente à* $\| \cdot \|$ *sur* V.

Démonstration.

i) S'il existe $v \in V$ tel que $(v,v)_{\otimes} = 0$ alors $\dfrac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$ p.p. sur Ω ainsi que $\gamma_1(v) = \gamma_2(v) = \gamma_3(v) = \gamma_4(v) = 0$ et donc d'après le lemme 3.2 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ et comme $v(A) = v(B) = v(C) = v(D) = 0$ on en déduit le résultat.

ii) Il est clair d'après l'inclusion $V \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ et le lemme 3.1 qu'il existe $c_6 > 0$ telle que pour tout $v \in V$ $\| v \|_{\otimes} \leqslant c_6 \| v \|$.

- Réciproquement : Supposons que quel que soit $c > 0$, il existe $v \in V$ telle que

$$\| v \|_{\otimes} < \frac{1}{c} \| v \|_{2,\Omega}$$

On en déduit qu'il existe $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset V$ telle que $\| v_n \|_{2,\Omega} = 1$ et $\| v_n \|_{\otimes} < \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Mais puisque $\| v_n \|_{2,\Omega} = 1$, on peut extraire une sous-suite de $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ que l'on note toujours $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| v_n \|_{2,\Omega} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \| v_n \|_{\otimes} \to 0, \text{ quand } n \to +\infty \text{ et } v_n \xrightarrow{n \to +\infty} u \\ \text{dans } H^1(\Omega), \text{ puisque l'injection } H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \text{ est compacte.} \end{array} \right.$$

Mais d'après le lemme 3.2, $\| v_n \|_{\otimes} \to 0$ entraîne que

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Donc d'après un théorème d'ARONSZAJN-SMITH cf. [3], $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $H^2(\Omega)$ et *converge donc vers un élément* w *dans* $H^2(\Omega)$.

En particulier $\| v_n \|_{2,\Omega} = 1$ implique $\| w \|_{2,\Omega} = 1$, et de plus $\| v_n \|_{\otimes} \to 0$ implique $\dfrac{\partial^4 v_n}{\partial x^2 \partial y^2} \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ et donc $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \in L^2(\Omega)$ dans $(\mathscr{D}(\Omega))'$.

On en déduit que $v_n \to w$ dans $(V, \| \cdot \|)$ et d'après ce qui précède $\| v_n \|_{\otimes} \to \| w \|_{\otimes}$, donc $\| w \|_{\otimes} = 0$; ceci est impossible car $\| w \|_{2,\Omega} = 1$.

iii) n'est qu'une conséquence immédiate de ii) et de (2.15). □

THEOREME 3.3. *(Les notations sont celles du théorème 3.1). On a les résultats suivants :*

i) $(V, \| \cdot \|_{\otimes})$ *est un Hilbert, avec* $\| \cdot \|_{\otimes}$ *définie dans le théorème 3.2.*

ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ $(\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^o_n$ *est dense dans* V^o_n *pour la topologie induite par* $\| \cdot \|_{\otimes}$.

Démonstration. Immédiate à partir des théorèmes 3.2 et 3.1. □

LEMME 3.3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *si* $\sigma_n(\beta)$ *est définie par (2.1) on a :*

$$\forall v \in V^o_n, \ (\sigma_n(\beta), v)_{\otimes} = 0 \tag{2.17}$$

où V^o_n *est défini dans le théorème 3.1 et* $(\ ,\ )_{\otimes}$ *défini dans le théorème 3.2.*

Démonstration. Utilisant (2.15) on démontre de façon analogue que pour (2.5) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \quad \forall \eta \in (\mathscr{D}(\overline{\Omega}))^o_n \qquad (\sigma_n(\beta), \eta)_{\otimes} = 0,$$

et il suffit alors de prolonger ce résultat, par densité, sur V^o_n en utilisant le théorème 3.3. □

THEOREME 3.4. *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n(\beta)$ *est défini par (2.1) alors* $\sigma_n(\beta)$ *est la fonction spline dans* V *pour la norme* $\| \cdot \|_{\otimes}$ *relativement aux conditions d'interpolation sur* β *aux noeuds* $\{M_{i,j}\}_{i=0,\dots,k(n)}^{j=0,\dots,\ell(n)}$, *c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall i = 0,\dots,k(n), \ \ \forall j = 0,\dots,\ell(n) \qquad [\sigma_n(\beta)]\ (M_{i,j}) = \beta_{i,j}\ ,$$

et

$$\| \sigma_n(\beta) \|_{\otimes} \leqslant \| v \|_{\otimes}$$

pour toute fonction $v \in V$, *telle que* $v(M_{i,j}) = \beta_{i,j}$ *pour* $i = 0,\dots,k(n)$ *et* $j = 0,\dots,\ell(n)$.

Démonstration. Du lemme 3.3 on déduit immédiatement que :

$$\| \sigma_n(\beta) \|_{\otimes} \leqslant \| v \|_{\otimes} \quad \text{pour tout } v \in V \text{ telle que } v(M_{i,j}) = \beta_{i,j}$$

pour $i = 0,\ldots,k(n)$ et $j = 0,\ldots,\ell(n)$.
D'où le résultat d'après (2.15) et le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \{M_{i,j}\}^{j\ 0,\ldots,\ell(n)}_{i=0,\ldots,k(n)} \supset \{A,B,C,D\} \qquad \square$$

4. - CONVERGENCE ET ETUDE DE L'ERREUR POUR L'APPROXIMATION PAR PRODUIT TENSORIEL DE FONCTIONS SPLINE DANS Ω

On a le résultat de convergence suivant :

THEOREME 4.1. *Soit* f *une fonction donnée appartenant à* $V \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$. *On pose :*

(2.18) *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta = \left\{ f(M_{i,j}) \right\}^{j=0,\ldots,\ell(n)}_{i=0,\ldots,k(n)} \in \mathbb{R}^{k(n)+\ell(n)+2}$.

On suppose que :

$$\text{(2.19)} \qquad \forall M \in \Omega, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{\substack{i=0,\ldots,k(n) \\ j=0,\ldots,\ell(n)}} |M-M_{i,j}| \right) = 0.$$

Alors si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n(\beta)$ *est la fonction définie dans (2.1) relativement à β donné par (2.18) on a :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(\beta) = f \textit{ dans } V \textit{ pour la norme } \| \cdot \| \textit{ ou } \| \cdot \|_{\otimes} .$$

Démonstration. On a d'après le théorème 3.4 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \| \sigma_n(\beta) \|_{\otimes} \leqslant \| f \|_{\otimes}$$

Donc la suite $\{\sigma_n(\beta)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $(V, \| \cdot \|_{\otimes})$. On peut donc d'après le théorème 3.3 extraire une sous-suite notée $\{\sigma_{n_p}(\beta)\}_{n_p \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\lim_{n_p \to +\infty} \sigma_{n_p}(\beta) = v^* \in V \text{ dans } V\text{-faible } \otimes$$

Remarquant que pour tout $M \in \overline{\Omega}$

$$v \in V \to v(M) \in R$$

est linéaire continue pour la norme $\| \cdot \|_{\otimes}$ de V, on obtient

$$\lim_{n_p \to +\infty} [\sigma_{n_p}(\beta)]\,(M) = v^*(M) \text{ pour tout } M \in \overline{\Omega}.$$

D'autre part on a par construction

$$\forall i = 0,\dots,k(n_p),\ \ \forall j = 0,\dots,\ell(n_p),\ \ [\sigma_{n_p}(\beta)]\,(M_{i,j}) = f(M_{i,j}),$$

et donc d'après (2.19) on obtient $v^*(M) = f(M)$ pour tout $M \in \overline{\Omega}$, c'est-à-dire $v^* = f$.

Par conséquent pour la suite elle-même on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(\beta) = f \text{ dans V-faible } \otimes,$$

comme d'autre part $\| \sigma_n(\beta) \|_{\otimes} \leqslant \| f \|_{\otimes}$, on en déduit le résultat en utilisant le théorème 3.2. iii). □

En ce qui concerne l'estimation de l'erreur d'approximation, il résulte de travaux de différents auteurs cf. P.M. PRENTER [14] , M.H. SCHULTZ [15] , L. SCHUMAKER [16] etc..., que lorsque la fonction $f \in H^4(\Omega)$ on a, si la suite de triangulation $\mathcal{T}_n$ est régulière (au sens de Ciarlet-Raviart [7]),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |\sigma_n(\beta) - f|_{\ell,\Omega} = 0[h_n^{4-\ell}],\ \ \ell = 0,\dots,4,$$

où h_n désigne le maximum des diamètres des rectangles de la triangulation $\mathcal{T}_n$. Cependant lorsque f appartient seulement à V, on peut montrer en utilisant la technique du rectangle de référence, cf. ARCANGELI [2] , que l'on a, si la suite $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est régulière :

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma_n(\beta) - f|_{\ell,\Omega} = 0\ [h_n^{2-\ell}] \quad \ell = 0,1,2 \\[2ex] \left|\dfrac{\partial^4 \sigma_n(\beta)}{\partial x^2 \partial y^2} - \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_{0,\Omega} = 0[1] \end{array}\right.$$

quand $n \to +\infty$.

REFERENCES

[1] AHLBERG - NILSON - WALSH. *«The theory of splines and their applications».* Maths in Science and Engineering, vol 38, Academic Press, 1967.

[2] R. ARCANGELI. Thèse de Doctorat d'Etat, Toulouse 1974.

[3] N. ARONSZAJN, K.T. SMITH. *«Functional spaces and functional completion».* Ann. Inst. Fourier, 6 (1956), 125-185.

[4] M. ATTEIA. *«Fonctions splines et éléments finis».* R.A.I.R.O. Août 1975, R-2, p. 13-40.

[5] C. de BOOR. *«A practical Guide to Splines».* Applied Mathematical Sciences, vol. 27 Springer Verlag, 1978.

[6] P.G. CIARLET. *«The finite element method for elliptic problems».* Studies in Mathematics and its applications, North-Holland 1979.

[7] P.G. CIARLET et P.A. RAVIART. *«General Lagrange and Hermite interpolation in IR^n with applications in finite element methods».* Arch. Rational Mech. Anal. 46, 177-199 (1972).

[8] W. DAHMEN - R. de VORE et K. SCHERER. *«Multi-dimensional Spline approximation».* S.I.A.M. Numerical Analysis, juin 1980, vol. 17, Num. 3, pp. 380-402.

[9] C.F. DUCATEAU. Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, 1971.

[10] T.N.E. GREVILLE. *«Theory and applications of spline functions».* Academic Press, 1969.

[11] P.J. LAURENT. *«Approximation et Optimisation».* Hermann 1972.

[12] J.L. LIONS - E. MAGENES. *«Problèmes aux limites non homogènes et applications».* Vol. 1, Dunod, 1968.

[13] J. NECAS. *«Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques».* Masson 1967.

[14] P.M. PRENTER. *«Splines and variational methods».* A volume in Pure and Applied Mathematics, Wiley-Intersciences, 1975.

[15] M.H. SCHULTZ. *«Spline Analysis».* Prentice Hall, 1973.

[16] L. SCHUMAKER. *«Spline functions : Basis theory».* Wiley-Interscience, A volume in Pure and Applied Mathematics 1981.

(Manuscrit reçu le 1er septembre 1983)