

PIERRE BARAS

Non-unicité des solutions d'une équation d'évolution non-linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 5, n° 3-4 (1983), p. 287-302

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_287_0

© Université Paul Sabatier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NON-UNICITE DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION D'EVOLUTION NON-LINEAIRE

Pierre Baras ⁽¹⁾

(1) Laboratoire IMAG, B.P. 68, 38042 Grenoble Cédex - France.

Résumé : Soient $\gamma > 1$, et N un entier tels que $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf(\gamma, (\gamma+3)/2)$ et Ω une boule de \mathbb{R}^N . Nous montrons que l'équation $\frac{du}{dt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u$, $u(0) = u_0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ qui admet, pour u_0 dans $L^\gamma(\Omega)$ positive radiale décroissante une seule solution maximale u_m appartenant à $C([0, T_m[; L^\gamma(\Omega))$ a une infinité d'autres solutions de durée de vie $0 < T < T_m$ arbitraire, appartenant à $C([0, T[; L^q(\Omega))$ pour $q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$.

Summary : We prove a non-uniqueness result for a parabolic semi-linear equation. If $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < (\gamma, \frac{\gamma+3}{2})$ and Ω is a ball of \mathbb{R}^N , the equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u$, $u(0) = u_0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ possesses an infinite number of solutions such that $\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - u_0\|_q = 0$ where $1 \leq q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$.

INTRODUCTION

On considère l'équation d'évolution suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{du}{dt} - \Delta u = |u|^{\gamma-1}u & \text{sur } \Omega \times]0, T[\\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière Γ régulière.

Les conditions d'existence d'une solution locale ou globale de cette équation ont été étudiées par de nombreux auteurs (cf. [4]). Le problème abordé ici est celui de l'unicité de ces solutions. Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $u_0 = 0$, A. HARAUX et F.B. WEISLER (cf. [2]) ont montré l'existence d'une solution globale non triviale et positive pour des valeurs γ telles que $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \gamma+1$. Notre but est d'étendre ce résultat au cas où Ω est une boule de \mathbb{R}^N et u_0 positive, radiale, décroissante.

La méthode utilisée oblige à se restreindre au cas où γ vérifie :

$$(2) \quad 1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf(\gamma, (\gamma+3)/2) \quad (N=3, \gamma=2 \text{ par exemple}).$$

Etant donné u_0 appartenant à $L^\gamma(\Omega)$, on rappelle que le problème (1) a une unique solution maximale u telle que :

$$u \in C([0, T_m[; L^\gamma(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times]0, T_m[)$$

$$\text{si } T_m < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T_m} \|u(t)\|_p = +\infty \quad \forall p, p > N(\gamma-1)/2.$$

Nous montrons que pour chaque T , $0 < T < T_m$, il existe une autre fonction u solution du problème (1) avec :

$$u \in C([0, T[; L^q(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times]0, T[) \quad \forall q, 1 \leq q < N(\gamma-1)/2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - u_0\|_q = 0 \quad \forall q, 1 \leq q < N(\gamma-1)/2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_\gamma = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_p = +\infty \quad \forall p, p > N(\gamma-1)/2.$$

Dans une première partie nous établissons quelques résultats préliminaires et dans une seconde partie nous prouvons le résultat principal.

1. - RESULTATS PRELIMINAIRES

Nous supposons ici $\frac{N}{2}(\gamma-1) > 1$, Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N de frontière Γ régulière. Une solution sur $[0, T]$ de (1) est une fonction u de $L^\gamma(\Omega \times (0, T))$ telle que :

$$(3) \quad u(t) = e^{\Delta t} u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} |u|^{p-1} u(s) ds.$$

Lorsque u_0 est dans $L^1(\Omega)$, toute solution appartient à $C([0, T] ; L^1(\Omega))$, $e^{\Delta t}$ est le semi-groupe engendré par Δ , avec condition de Dirichlet nulle et a les propriétés régularisantes suivantes :

$$(4) \quad \| e^{\Delta t} u \|_q \leq c \frac{\| u \|_p}{t^{N(1/p-1/q)/2}} \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

$\| \cdot \|_p$ désigne la norme de $L^p(\Omega)$.

PROPOSITION 1. Soit $p > \frac{N}{2}(\gamma-1)$ et $u_0 \geq 0$ appartenant à $L^p(\Omega)$.

1a) Il existe $T_m > 0$ et u_m appartenant à $C([0, T_m[; L^p(\Omega)) \cap C^2(\Omega \times]0, T_m[)$ solution du problème (1). Si $T_m < +\infty$, $\lim_{t \rightarrow T_m} \| u_m(t) \|_p = +\infty$.

1b) Il existe une constante $c(p) > 0$ telle que :

$$(5) \quad T_m^{1 - \frac{N(\gamma-1)}{2p}} \| u_0 \|_p^{\gamma-1} \geq c(p).$$

1c) Il existe deux constantes strictement positives $c'(p)$ et c telles que si T vérifie :

$$(5') \quad T^{1 - \frac{N(\gamma-1)}{2p}} \| u_0 \|_p^{\gamma-1} \leq c'(p)$$

alors :

$$(6) \quad \| u_m(t) \|_q \leq c \frac{\| u_0 \|_p}{t^{N(1/p-1/q)/2}} \quad \text{pour } 0 < t \leq T \text{ et } \frac{N}{2}(\gamma-1) < p \leq q \leq \infty.$$

1d) Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si $\| u_0 \|_{N(\gamma-1)/2} \leq c_0$ alors :

$$T_m = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \| u_m(t) \|_\infty = 0.$$

1e) Si $p \geq \gamma$, pour tout $T < T_m$, u_m est la seule solution de (1) appartenant à $L^\infty([0, T], L^p(\Omega))$.

Démonstration. Soit la suite u_n définie par :

$$(7) \quad u_{n+1}(t) = e^{\Delta t} u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} (u_n(s))^\gamma ds \quad u_1(t) = e^{\Delta t} u_0$$

Soit (m,r) dans \mathbb{R}^{+2} tel que :

$$(8) \quad r > \frac{N}{2}(\gamma-1) ; r \geq \sup(m,\gamma) ; m \geq \frac{N}{2}(\gamma-1) ; \frac{N}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{r} \right) \gamma < 1.$$

(4) implique :

$$\| u_{n+1}(t) \|_r \leq c \frac{\| u_0 \|_m}{t^{N(1/m-1/r)/2}} + \int_0^t c \frac{\| u_n(s) \|_r^\gamma}{(t-s)^{N(\gamma-1)/2r}} ds.$$

Soit T vérifiant :

$$(9) \quad \frac{c^\gamma \gamma^\gamma}{(\gamma-1)^{\gamma-1}} \left(\int_0^1 \frac{d\sigma}{(1-\sigma)^{N(\gamma-1)/2r} \sigma^{N(1/m-1/r)\gamma/2}} \right) \| u_0 \|_m^{\gamma-1} T^{1-N(\gamma-1)/2m} < 1$$

On vérifie alors par récurrence que :

$$\| u_n(t) \|_r \leq c \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{\| u_0 \|_m}{t^{N(1/m-1/r)/2}} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } 0 < t \leq T$$

puisque $u_0 \geq 0$, la suite u_n est croissante, elle converge donc vers une fonction u vérifiant :

$$(10) \quad \| u(t) \|_r \leq c \frac{\| u_0 \|_m}{t^{N(1/m-1/r)/2}} \text{ pour } 0 < t \leq T$$

Démonstration de 1a). On fait $m = p, r = p\gamma$. (10) implique alors que u^γ est dans $L^1((0,T); L^p(\Omega))$. En passant à la limite dans (7), on vérifie que u satisfait (3) ; u est donc solution de (1) et appartient à $C([0,T[; L^p(\Omega))$. On prolonge u en une solution maximale continue dans $L^p(\Omega)$ notée u_m . Soit $[0, T_m[$ son intervalle de définition.

Si $\liminf_{t \rightarrow T_m} \| u(t) \|_p = A < +\infty$ et si $T_A > 0$ satisfait (9) dans lequel on a fait $\| u_0 \|_m = 2A$, on peut trouver t_0 dans $[T_m - T_A/2, T_m[$ tel que $\| u(t_0) \|_p \leq 2A$; la démonstration précédente affirme l'existence d'une solution de (1) de donnée initiale $u(t_0)$ et appartenant à $C([0, T_A] ; L^p(\Omega))$, on peut donc prolonger u à l'intervalle $[0, T_m + T_A/2]$, contradiction, et donc :

$$\lim_{t \rightarrow T_m} \| u(t) \|_p = +\infty.$$

Pour montrer que u_m appartient à $C^2(\bar{\Omega} \times]0, T_m[)$, admettons pour l'instant le 1c). Soit $\epsilon > 0$, puisque u_m appartient à $C([0, T_m[, L^p(\Omega))$, il existe $h > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, T_m - \epsilon[, h^{1-N(\gamma-1)/2p} \| u_m(t) \|_p^{\gamma-1} \leq c'(p).$$

(6) appliqué avec $q = +\infty$ et $u_0 = u(t_0)$ permet de conclure que $u_m(t)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(\Omega)$ sur tout intervalle de la forme $[t_0 + \inf(\epsilon, h)/2, t_0 + h]$ pour tout t_0 dans $[0, T_m - \epsilon]$. u_m appartient donc à $L^\infty(\Omega \times (\epsilon, T_m - \epsilon))$ pour tout $\epsilon > 0$ d'où le résultat (u_m a toute la régularité qu'autorise l'application $x \rightarrow x^\gamma$ (cf. [3])).

Remarque 1. On a montré ici que $u_m(x, t)$ est borné sur $\Omega \times [\epsilon, T - \epsilon]$ par une quantité ne dépendant que de la forme de u_m dans $L^\infty((0, T_m - \epsilon); L^p(\Omega))$ et de $p > N(\gamma - 1)/2$.

Démonstration du 1b). On fait encore $m = p$, $r = p\gamma$, comme T_m est supérieur à tout T vérifiant (9), on a (5).

Démonstration du 1c). Il suffit de démontrer (6) pour $q = p$ et $q = +\infty$. Pour $q = p$, on a :

$$\|u(t)\|_p \leq \|u_0\|_p + \int_0^t \|u(s)\|_p^\gamma ds$$

on conclut grâce à (9) et (10) où l'on a fait $m = p$, $r = p\gamma$.

Pour $q = +\infty$ et si $p > \frac{N}{2}\gamma$, (8) permet $r = +\infty$ et $m = p$ et (9) et (10) donnent encore le résultat.

Si $p \leq \frac{N}{2}\gamma$, soit a tel que :

$$0 < a < 1 \text{ et } a > \frac{N\gamma}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma} \right).$$

On définit une suite q_i en posant :

$$q_1 = p, \quad \frac{N}{2}\gamma \left(\frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{i+1}} \right) = a.$$

On vérifie alors qu'il existe un entier k tel que $q_k > 0$ et $q_{k+1} \leq 0$, on vérifie aussi que (q_i, q_{i+1}) pour $i = 1, 2, \dots, k-1$ et $(q_k, +\infty)$ satisfont (8).

Dans (9), le facteur de $\|u_0\|_m^{\gamma-1} T^{1-N(\gamma-1)/2m}$ reste borné lorsque (m, r) décrit $\{(q_i, q_{i+1})_{i \in \{1, \dots, k-1\}}, (q_k, +\infty)\}$ par un nombre noté b .

Soient $t > 0$ et $i \in \{1, \dots, k-1\}$, on a en appliquant (9) et (10) :

$$\left\| u \left(\frac{(i+1)t}{k+1} \right) \right\|_{q_{i+1}} \leq c_1 (t/k+1)^{a/\gamma} \left\| u \left(\frac{it}{k+1} \right) \right\|_{q_i}.$$

pour tout $t > 0$ vérifiant :

$$b \left\| u \left(\frac{it}{k+1} \right) \right\|_{q_i}^{\gamma-1} (t/k+1)^{1-N(\gamma-1)/2q_i} \leq 1$$

d'où, en regroupant les inégalités :

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq c_1 (k+1)^{N/2p} \frac{\|u_0\|_p}{t^{N/2p}}$$

pour tout t vérifiant une inégalité du type :

$$c \|u_0\|_p^{\gamma-1} t^{1-N(\gamma-1)/2p} \leq 1$$

où c est une constante convenable, d'où le résultat.

Démonstration du 1d). Soit $m = \frac{N}{2}(\gamma-1)$ et r vérifiant (8), (9) s'écrit $\|u_0\|_{N(\gamma-1)/2} \leq c(\gamma, r) = c_0$ et dans ce cas $u(t)$ est définie pour tout $t \geq 0$. D'après 1a), on a $u(t) = u_m(t)$ sur $[0, T_m[$, on aura $T_m = +\infty$ si on montre que $\|u(t)\|_p$ reste bornée pour tout $t \geq 0$, ce qui sera acquis en montrant que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t)\|_{\infty} = 0$. On a, d'après 1c):

$$\|u(t+h)\|_{\infty} \leq c' \frac{\|u(t)\|_r}{h^{N/2r}} \quad \text{dès que } h^{1-N(\gamma-1)/2} \|u(t)\|_r \leq c'(r)$$

ce qui autorise un choix de $h > 0$ indépendant de t ; en effet, d'après (10) (avec $m = \frac{N}{2}(\gamma-1)$):

$$\|u(t)\|_r \leq c \frac{\|u_0\|_{N(\gamma-1)/2}}{t^{N(1/m-1/r)/2}}$$

ce qui prouve que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t+h)\|_{\infty} = 0$ et que $\|u(t)\|_{\infty}$ est uniformément bornée sur $[2h, +\infty[$. $u(t)$ appartient donc à $C([0, +\infty[; L^p(\Omega))$ puisqu'on peut avoir choisi h tel que $2h < T_m$, d'où le 1d).

Démonstration de 1e). On suppose ici $p \geq \gamma$. Soit v une autre solution de (1) appartenant à $L^{\infty}((0, T); L^p(\Omega))$, et soit A un réel tel que :

$$\|u(t)\|_p \leq A \quad \text{et} \quad \|v(t)\|_p \leq A \quad \forall t \in [0, T].$$

On a :

$$u(t) - v(t) = \int_0^t e^{\Delta(t-s)} (u^{\gamma}(s) - v^{\gamma}(s)) ds$$

mais puisque $p \geq \gamma$:

$$\|u^{\gamma} - v^{\gamma}\|_p \leq \gamma \|u^{\gamma-1} + v^{\gamma-1}\|_{p/\gamma-1} \|u-v\|_p \leq 2\gamma A^{\gamma-1} \|u-v\|_p .$$

On a donc, grâce à (4) :

$$\| u(t) - v(t) \|_p \leq 2 c A^{\gamma-1} \frac{t^{1-N(\gamma-1)/2p}}{1-N(\gamma-1)/2p} \sup_{[0,t]} \| u-v \|_p$$

ce qui n'est possible pour t petit que si u = v.

Ω est maintenant une boule de \mathbb{R}^N . Si u_0 est positive radiale décroissante et vérifie les hypothèses de la proposition (1), u_m est aussi positive radiale décroissante puisque toutes les u_n le sont.

PROPOSITION 2. Si u est une solution positive radiale décroissante de (1), il existe des constantes c telles que :

$$(11) \quad u(t,x) \leq \frac{c(T',R)}{|x|^{2/\gamma-1}} \text{ pour } 0 \leq t \leq T' < T \text{ et } |x| \leq R$$

$$(12) \quad \| u(t) \|_q \leq c(T',q) \text{ pour } 1 \leq q < \frac{N(\gamma-1)}{2} \text{ et } 0 \leq t \leq T'$$

$$(13) \quad \int_0^{T'} \| u(t) \|_\gamma^\gamma dt \leq c(T') \text{ pour } T' < T.$$

En corollaire de cette proposition, on obtient des résultats de non-existence. Par exemple :

COROLLAIRE 1. Si u_0 est positive, radiale et décroissante et n'appartient pas à $L^q(\Omega)$ pour un $q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$, alors (1) n'a pas de solution positive.

COROLLAIRE 2. Le problème (1) n'a pas de solution positive si u_0 est une masse de Dirac à l'origine.

Démonstration de la proposition. On sait que si il existe u solution de (1) sur $[0,T]$ alors (cf. [4]) :

$$(14) \quad t^{1/\gamma-1} (e^{\Delta t} u_0) (x) < c(\gamma) \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0,T]$$

où $c(\gamma)$ est une constante ne dépendant que de γ . On a donc :

$$s^{1/\gamma-1} (e^{\Delta s} u(t)) (x) < c(\gamma) \quad \forall (x,s) \in \Omega \times [0,T-t]$$

(11) sera la conséquence du lemme suivant.

LEMME 1. Soit $\alpha \geq 0$, si v appartenant à $L^1(\Omega)$ est positive radiale décroissante et vérifie :

$$t^\alpha (e^{\Delta t} v) (x) \leq C \text{ pour tout } (x,t) \text{ dans } \Omega \times [0,T]$$

alors :

$$v(x) \leq C \frac{e^{kT/R^2}}{|x|^{2\alpha}} (R^2/T)^\alpha \text{ pour } |x| \leq R$$

où $k > 0$ ne dépend que de N et où $R \leq \frac{\text{diam } \Omega}{2}$.

Démonstration du lemme. Soit η une fonction régulière positive, radiale, décroissante à support compact telle que :

$$-\Delta \eta \leq k\eta, \quad \eta(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1$$

(une telle η existe si k est assez grand). En posant $\eta_\lambda(x) = \eta(\lambda x)$, on a :

$$-\Delta \eta_\lambda \leq k\lambda^2 \eta_\lambda$$

d'où :

$$(15) \quad e^{-k\lambda^2 t} \eta_\lambda(x) \leq (e^{\Delta t} \eta_\lambda)(x) \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [0, +\infty[$$

dès que $\text{supp } \eta_\lambda$ est inclus dans Ω , c'est-à-dire $\lambda \geq \frac{2}{\text{diam}(\Omega)}$.

L'hypothèse du lemme implique alors :

$$C \int_{\Omega} \eta_\lambda(x) dx \geq \int_0^t (e^{\Delta s} v)(x) \eta_\lambda(x) dx = t^\alpha \int_{\Omega} v(x) e^{\Delta t} \eta_\lambda(x) dx \geq t^\alpha e^{-k\lambda^2 t} \int_{\Omega} v(x) \eta_\lambda(x) dx$$

mais $v(x) \geq v\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ sur $\text{supp}(\eta_\lambda)$ d'où :

$$v\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq C t^{-\alpha} e^{k\lambda^2 t} \text{ pour } \lambda \geq \frac{2}{\text{diam}(\Omega)} \text{ et } 0 \leq t \leq T.$$

On obtient le lemme en posant :

$$|x| = \frac{1}{\lambda} \text{ et } t = \frac{T}{R^2} |x|^2$$

(12) se déduit de (11) par intégration.

Pour obtenir (13), on multiplie (3) par η_λ et on intègre, on a :

$$\int_{\Omega} (e^{\Delta t} u_0)(x) \eta_\lambda(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (e^{\Delta(t-s)} u(s)^\gamma)(x) \eta_\lambda(x) dx ds = \int_{\Omega} u(x,t) \eta_\lambda(x) dx$$

On en déduit que pour $\lambda \geq \frac{2}{\text{diam } \Omega}$, on a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} (u(x,s))^{\gamma} e^{-k\lambda^2(t-s)} \eta_{\lambda}(x) dx ds \leq \int_{\Omega} u(x,t) \eta_{\lambda}(x) dx.$$

En fixant $\lambda = \lambda_0 \geq \frac{2}{\text{diam } \Omega}$, $T' < T$ et $r_0 > 0$ tel que $\eta_{\lambda_0}(r_0) > 0$, on obtient :

$$e^{-k\lambda_0^2 T'} \eta_{\lambda_0}(r_0) \int_0^t \int_{r_0}^t (u(x,s))^{\gamma} dx ds \leq \int_{\Omega} u(x,t) \eta_{\lambda_0}(x) dx$$

Le membre de droite est majoré indépendamment de u et $t \in [0, T']$ d'après (11) d'où (13).

Démonstration des corollaires. Le corollaire (1) est une conséquence de (12) appliquée en $t = 0$.

Quand δ est une masse de Dirac à l'origine, $e^{\Delta t} \delta$ est positive radiale et décroissante et plus petite que la solution éventuelle, on aurait donc à cause de (12) $\|e^{\Delta t} \delta\|_q < +\infty$ pour tout q tel que : $1 \leq q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$ et $t \geq 0$. Ce qui est faux, d'où le corollaire 2.

PROPOSITION 3. Soient γ tel que $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf(\gamma, \frac{\gamma+3}{2})$ et $E_T = \{u \in C^2(\Omega \times]0, T[), u \text{ positive radiale décroissante telle qu'il existe } u_0 \in L^1(\Omega) \text{ telle que } u \text{ soit solution de (1) sur } (0, T)\}$. Pour tout $\delta > 0$, E_T est borné dans $C^2(\Omega \times]\delta, T-\delta[)$.

Démonstration. D'après les résultats de régularité classiques et [3], il suffit de montrer que E_T est borné dans $L^\infty(\Omega \times (\delta, T-\delta))$ pour tout $\delta > 0$. On procède par l'absurde, soit $\delta > 0$ et u_n une suite non bornée d'éléments de E_T . Les u_n vérifient (11), (12), (13) et d'après la compacité de l'opérateur «solution» (cf. [1]) forment donc un ensemble relativement compact dans $L^1(\Omega \times (0, T_1))$ donc, encore à cause de (13) dans $L^s(\Omega \times (0, T_1))$ pour tout s tel que $1 \leq s < \gamma$ et $T_1 < T$.

Pour la suite, on fixe s vérifiant $\frac{N}{2}(\gamma-1) < s < \inf(\gamma, (\gamma+3)/2)$. On peut donc extraire une suite notée encore u_n convergeant vers u presque partout et dans $L^s(\Omega \times (0, T_1))$; u vérifie encore (11), (12), (13). Recommencant le raisonnement pour une suite $T'_k \rightarrow T$, et par extraction diagonale, on peut supposer que les convergences ont lieu pour tout $T' < T$.

Soit $\delta > 0$. Puisque u_n converge vers u dans $L^s(\Omega \times (0, T-\delta/2))$, il existe t_1 et t_2 tels que :

$$t_1 \text{ appartient à } [0, \delta/4[\text{ et } \sup_n \|u_n(t_1)\|_s < \infty$$

$$t_2 \text{ appartient à } [T-\delta, T[\text{ et } \sup_n \|u_n(t_2)\|_s < \infty$$

1c) implique alors qu'il existe h , $0 < h < \delta/4$, indépendant de n tel que

$$\|u_n(t)\|_\infty \leq c \frac{\|u_n(t_i)\|_s}{(t-t_i)^{N/2s}} \quad \forall n \quad \forall t \in [t_i, t_i+h] \quad i=1,2$$

On peut donc trouver un nombre M tel que :

$$(16) \quad \|u_n(t)\|_\infty \leq M \quad \forall n \text{ et } \forall t \in [t_i+h/2, t_i+h] \quad i=1,2.$$

Si on pose :

$$E(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{\gamma+1} \int_{\Omega} |v|^{\gamma+1}(x) dx,$$

il existe alors A et $t'_2 \in [T-\delta, T[$ tels que pour tout n :

$$E(u_n(t'_2)) \geq A.$$

En multipliant par u_n puis par $\frac{du_n}{dt}$ et en intégrant, on obtient :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|_2^2 + \|\nabla u_n\|_2^2 = \int_{\Omega} u_n^{\gamma+1} \\ \frac{du_n}{dt} \Big|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_n\|_2^2 = \frac{1}{\gamma+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_n^{\gamma+1}. \end{array} \right.$$

On en déduit pour $0 < t_0 < t'_1 < T$:

$$\int_{t_0}^{t'_1} (t-t_0) \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_2^2 dt + (t'_1-t_0) E(u_n(t'_1)) = \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \int_{t_0}^{t'_1} \int_{\Omega} u_n^{\gamma+1} + \frac{1}{4} (\|u_n(t_0)\|_2^2 - \|u_n(t'_1)\|_2^2)$$

Lorsque $t_0 = t_1 + h/2$ et $t'_1 = t_1 + h$, d'après (14), le membre de droite reste uniformément borné. Il existe donc un nombre B tel que :

$$E(u_n(t'_1)) \leq B \quad \forall n$$

De plus, t'_1 appartient à l'intervalle $[0, \delta/2]$ (puisque t_1 et h sont inférieurs à $\delta/4$).

En intégrant (17) entre t'_1 et t'_2 , on obtient :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_n(t'_2)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u_n(t'_1)\|_2^2 = -2 \int_{t'_1}^{t'_2} E(u_n(s)) \, ds + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \int_{t'_1}^{t'_2} \int_{\Omega} u_n(s)^{\gamma+1} \, ds \\ & \int_{t'_1}^{t'_2} \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_2^2 \, dt = E(u_n(t'_1)) - E(u_n(t'_2)) \leq B - A \quad \forall n \end{aligned} \right.$$

(17) implique que $E(u_n(t))$ est décroissante, on déduit donc de (16) et de la première ligne de (18) qu'on a :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \int_{t'_1}^{t'_2} \int_{\Omega} u_n^{\gamma+1} \, dx \, ds \leq 2 TE(u_n(t'_1)) + \frac{1}{2} \|u_n(t'_2)\|_2^2 \leq 2TB + \frac{1}{2} |\Omega|^2 M^2$$

d'où :

$$\int_{t'_1}^{t'_2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_n^{(\gamma+3)/2} \, dx \, ds \leq \frac{\gamma+3}{2} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_2^2 \, ds \right)^{1/2} \left(\int_{t'_1}^{t'_2} \int_{\Omega} u_n^{\gamma+1} \, dx \, ds \right)^{1/2}$$

La suite u_n est donc uniformément bornée dans $L^\infty((\delta/2, T-\delta) : L^{(\gamma+3)/2})$. L'hypothèse (2) implique $N(\gamma-1)/2 < (\gamma+3)/2$; 1c) s'applique avec $p = (\gamma+3)/2$ et les mêmes arguments que dans la démonstration de 1a) prouvent que les u_n sont bornées indépendamment de n dans $L^\infty(\Omega \times (\delta, T-\delta))$ (cf. remarque n° 1).

II. - NON-UNICITE DES SOLUTIONS DE (1)

On se propose d'établir le théorème suivant :

THEOREME 1. Soient γ tel que $1 < \frac{N}{2}(\gamma-1) < \inf(\gamma, (\gamma+3)/2)$ et u_0 positive radiale décroissante appartenant à $L^\gamma(\Omega)$, soit u_m la solution maximale de (1) appartenant à $C([0, T_m] ; L^\gamma(\Omega))$.

(a) Pour chaque T dans $]0, T_m[$, il existe une fonction u solution de (1) distincte de u_m . u est positive radiale décroissante, $u \geq u_m$ et :

$$u \in C([0, T[; L^q(\Omega)) \cap C^2(\Omega \times]0, T[) \quad \forall q, 1 \leq q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$$

$$(19) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|u_0 - u(t)\|_q = 0 \quad \forall q, 1 \leq q < \frac{N}{2}(\gamma-1).$$

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_\gamma = +\infty$$

$$(21) \quad \lim_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_p = +\infty \quad \forall p, p > \frac{N}{2}(\gamma-1).$$

(b) Si $\|u_0\|_{N(\gamma-1)/2} \leq c_0$, $T_m = +\infty$ et il existe une fonction u solution globale de (1) distincte de u_m . u est positive, radiale décroissante et $u \geq u_m$. On a :

$$u \in C([0, +\infty[; L^q(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times]0, +\infty[) \quad \forall q, 1 \leq q < \frac{N}{2}(\gamma-1)$$

u vérifie (19), (20) et :

$$(22) \quad \|u(t)\|_{N(\gamma-1)/2} \geq c_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Soient u_0 vérifiant les hypothèses et η une fonction régulière positive radiale décroissante à support dans Ω . On pose $u_{0\alpha} = u_0 + \alpha\eta$ où α est un réel positif et on appelle $u_\alpha(t)$ la solution maximale unique définie sur $[0, T_m(\alpha)[$ vérifiant $u_\alpha(0) = u_{0\alpha}$ et appartenant à $C([0, T_m(\alpha)[; L^\gamma(\Omega)) \cap C^2(\bar{\Omega} \times]0, T_m(\alpha)[)$.

PROPOSITION 4. (4a) $\alpha \rightarrow T_m(\alpha)$ est décroissante continue de \mathbb{R}^+ vers $[0, T_m]$ ($T_m \leq +\infty$) $T_m(0) = T_m$ et $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_m(\alpha) = 0$.

(4b) $\alpha \rightarrow u_\alpha(x,t)$ est croissante continue de $[0, +\infty[$ vers $C(\dots; L^\gamma(\Omega))$. (i.e. $\forall I$ intervalle de \mathbb{R}_+ et $\forall T < \inf I T(\alpha)$, $\alpha \rightarrow u_\alpha(x,t)$ est continue de I vers $C([0, T], L^\gamma(\Omega))$).

Démonstration. $\alpha \rightarrow u_{0\alpha}$ et $u_0 \rightarrow u_m$ sont deux applications croissantes, $\alpha \rightarrow T_m(\alpha)$ et $\alpha \rightarrow u_\alpha(x,t)$ sont donc respectivement décroissante et croissante. Montrons qu'elles sont continues.

Lorsque $\alpha_n \uparrow \alpha$, $T(\alpha_n)$ et u_{α_n} convergent vers $T(\alpha^-)$ et u_{α^-} . Puisque $T(\alpha_n) \geq T(\alpha)$ les u_{α_n} appartiennent à $E_{T(\alpha_n)}$ et sont donc uniformément bornés dans $L^\infty(\Omega \times]\delta, T(\alpha^-) - \delta[)$ d'après la proposition 3. Comme sur $[0, \delta]$ pour $\delta < T(\alpha)$, u_{α_n} est majorée par $u_{\alpha'}$, on obtient que u_{α^-} , limite des u_{α_n} , est solution de (1) avec donnée initiale $u_{0\alpha}$ et appartient à $C(\Omega \times]0, T(\alpha^-)[)$ et $L^\infty(\Omega \times (0, T(\alpha^-) - \delta))$, $\forall \delta > 0$. On déduit alors de 1e) que $u_{\alpha^-} = u_{\alpha^-}$ sur $[0, T(\alpha)[$ et de la maximalité de $T(\alpha)$ que $T(\alpha^-) = T(\alpha)$. Si maintenant $\alpha_n \downarrow \alpha$ soient $T(\alpha_n^+)$ et $u_{\alpha_n^+}$ les limites de $T(\alpha_n)$ et u_{α_n} . Puisque u_{α_n} est une suite décroissante de fonction positive de $C([0, T]; L^\gamma(\Omega))$ pour $T < T(\alpha^+)$, on a immédiatement $u_{\alpha^+} \in L^\infty((0, T); L^\gamma(\Omega)) \quad \forall T < T(\alpha^+)$. On vérifie avec (3) par exemple, que u_{α^+} est solution de (1) de donnée initiale $u_{0\alpha}$. Admettons pour l'instant que $T(\alpha^+) = T(\alpha)$. Dans le cas $\alpha_n \uparrow \alpha$ comme dans le cas $\alpha_n \downarrow \alpha$, u_{α_n} est une suite monotone de fonction de $C([0, T]; L^\gamma(\Omega))$ qui converge vers un élément de $C([0, T[, L^\gamma(\Omega))$, la convergence a donc lieu dans cet espace pour tout $T < T(\alpha)$ d'où le 4b). Pour montrer que

$T(\alpha^+) = T(\alpha)$, on procède par l'absurde. Supposons $T(\alpha^+) < T(\alpha)$ et appelons $A = \sup_{[0, T(\alpha^+)]} \|u_{\alpha}(t)\|_{\gamma}$. Soit T_A un réel strictement positif vérifiant (5') dans laquelle on a fait $p = \gamma$, $T_m = T_A$ et $\|u_0\|_p = 2A$. Puisque $u_{\alpha_n}(t)$ converge vers $u_{\alpha}(t)$ dans $C([0, T]; L^{\gamma}(\Omega))$ pour tout $T < T(\alpha^+)$, il existe n et t_0 dans l'intervalle $[T(\alpha^+) - T_A/2, T(\alpha^+)]$ tels que $\|u_{\alpha_n}(t_0)\|_{\gamma} < 2A$.

La proposition (1) permet alors d'affirmer que cette u_{α_n} se prolonge à l'intervalle $[0, T(\alpha^+) + T_A/2]$. Mais elle n'est définie que sur $[0, T(\alpha_n)[$ et $T(\alpha_n) \leq T(\alpha^+)$ puisqu'ici $\alpha_n \geq \alpha$: contradiction.

Reste à montrer que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} T_m(\alpha) = 0$. Si ce n'était pas le cas, d'après (14), il existerait $t > 0$ tel que pour tout $\alpha \geq 0$:

$$t^{1/\gamma-1} (e^{\Delta t} u_0)(x) + \alpha t^{1/\gamma-1} (e^{\Delta t} \eta)(x) < c(\gamma) \quad \forall x \in \Omega$$

ce qui est impossible puisque $\eta \neq 0$ et $\eta \geq 0$ (on fait $\alpha \rightarrow +\infty$). 4a) est établi.

Démonstration du théorème (a). Soit maintenant η_n une suite de fonctions régulières, positives, radiales, décroissantes telles que $\text{supp } \eta_n = B(0, \frac{1}{n}) = \{x \mid |x| < \frac{1}{n}\}$, et T fixé dans $]0, T_m[$. D'après la proposition 4, il existe $\alpha_n > 0$ tel que la solution maximale u_n de (1) de donnée initiale $u_0^n = u_0 + \alpha_n \eta_n$ et appartenant à $C([0, T[; L^{\gamma}(\Omega))$ ait une durée de vie égale à T . Soit $\delta_k > 0$ tendant vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, la proposition 3 implique que les u_n sont uniformément bornés dans $C^2(\bar{\Omega} \times [\delta_k, T - \delta_k])$ pour tout k . Par extraction diagonale, on peut donc extraire une sous-suite encore notée u_n qui converge vers u dans $C^1(\bar{\Omega} \times [\delta, T - \delta])$ pour tout $\delta > 0$. On a par passage à la limite :

$$(23) \quad u(t) = e^{\Delta(t-s)} u(s) + \int_s^t e^{\Delta(t-\sigma)} (u(\sigma))^{\gamma} d\sigma.$$

Enfin u étant limite des u_n vérifie aussi (11), (12) et (13) grâce au lemme de Fatou.

A cause de (12) et parce que $e^{\Delta t}$ est compact pour $t > 0$, il existe L dans $L^q(\Omega)$ et une suite $s_n \rightarrow 0$ tels que :

- $u(s_n)$ converge faiblement vers L dans $L^q(\Omega)$
- $e^{\Delta(t-s_n)} u(s_n)$ converge vers $e^{\Delta t} L$ dans $L^q(\Omega)$.

Comme u^{γ} appartient à $L^1(\Omega \times (0, T'))$ pour tout $T' < T$ (c'est (13)), on a, en faisant $s = s_n \rightarrow 0$ dans (24) :

$$(24) \quad u(t) = e^{\Delta t} L + \int_{\Omega}^t e^{\Delta(t-s)} (u(s))^{\gamma} ds.$$

On va montrer que $L = u_0$ pp x dans Ω . On a pour Φ fonction C^{∞} à support compact inclus dans Ω et puisque u_n est solution de (1) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_n(x,t)\Phi(x)dx - \int_{\Omega} u_0^n(x)\Phi(x)dx + \int_0^t \int_{\Omega} u_n(x,s)(-\Delta\Phi)dx ds = \\ = \int_0^t \int_{\Omega} (u_n(x,s))^{\gamma}\Phi(x)dx ds. \end{aligned}$$

Si $\Phi = 0$ sur une boule de centre 0, on peut, grâce à (11) et au théorème de Lebesgue, passer à la limite. On obtient :

$$\int_{\Omega} u(x,t)\Phi(x)dx - \int_{\Omega} u_0(x)\Phi(x)dx + \int_0^t \int_{\Omega} u(x,s)(-\Delta\Phi)(x)dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} u(x,s)^{\gamma}\Phi(x)dx ds$$

Par ailleurs, (23) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x,t)\Phi(x)dx - \int_{\Omega} u(x,s_n)\Phi(x)dx + \int_{s_n}^t \int_{\Omega} u(x,s)(-\Delta\Phi)(x)dx ds = \\ = \int_{s_n}^t \int_{\Omega} u(x,s)^{\gamma}\Phi(x)dx ds. \end{aligned}$$

En comparant ces deux égalités après être passé à la limite dans la seconde, on constate :

$$\int_{\Omega} u_0(x)\Phi(x)dx = \int_{\Omega} L(x)\Phi(x)dx$$

pour toute fonction Φ nulle sur un voisinage de 0, d'où $u_0(x) = L(x)$ presque partout. u est donc solution de (1), $u(0) = u_0$. De plus, (24) implique maintenant $\|u_0 - u(t)\|_1 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ ce qui, avec (12), donne (19).

Reste à montrer (20) et (21). $u \geq u_m$ est une conséquence de $u_n \geq u_m \forall n$. Commençons par montrer (21). S'il existe p , $N(\gamma-1)/2 < p < (\gamma+3)/2$, tel que $\liminf_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_p = A < +\infty$, alors puisque u_n converge vers u dans $C([\delta, T-\delta], L^2(\Omega)) \forall \delta > 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n(\epsilon)$ et $t(\epsilon)$ appartenant à l'intervalle $[T-\epsilon, T]$ tels que :

$$\|u_{n(\epsilon)}(t(\epsilon))\|_p \leq 2A.$$

Soit T_A satisfaisant (5') dans lequel on a fait $\|u_0\|_p = 2A$, la proposition 1 permet d'affirmer que $u_{n(\epsilon)}$ se prolonge à $[0, T + T_A - \epsilon[$. Mais T_A ne dépend pas de ϵ , pour ϵ assez petit, $u_{n(\epsilon)}$ se prolongerait au-delà de T : contradiction. On a $\lim_{t \rightarrow T} \|u(t)\|_p = +\infty$ et u est donc distincte de u_m .

Démontrons maintenant (20). Si $\liminf_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_\gamma < +\infty$, 1c) appliqué avec $p = q = \gamma$ implique $\limsup_{t \rightarrow 0} \|u(t)\|_\gamma < +\infty$. $u(t)$ resterait bornée dans $L^\gamma(\Omega)$ au voisinage de $t = 0$, on aurait donc, d'après 1e), $u = u_m$ ce qui n'est pas le cas, d'où le (20).

Démonstration du théorème (b). D'après le 1d), il existe une constante c_0 telle que si $\|u_0\|_{N(\gamma-1)/2} \leq c_0$, u_m est une solution globale de (1). Reprenons la construction faite au début. Pour chaque fonction η , la proposition 4 permet d'affirmer l'existence d'un unique β tel que si $\beta \geq \alpha$, $T_m(\alpha) = +\infty$ et si $\beta < \alpha$, $T_m(\alpha) < +\infty$. u_β est une solution globale de (1). On va montrer que :

$$(25) \quad \forall t \geq 0, \quad \|u_\beta(t)\|_{N(\gamma-1)/2} \geq c_0.$$

En effet, si il existe t_0 tel que : $\|u_\beta(t_0)\|_{N(\gamma-1)/2} < c_0$, alors, d'après 1d), $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_\beta(t)\|_{N(\gamma-1)/2} = 0$ et d'après la proposition 4, il existerait $\alpha_1 > \beta$ tel que $\|u_{\alpha_1}(t)\|_{N(\gamma-1)/2} < c_0$, u_{α_1} serait une solution globale de (1) (toujours à cause de 1d)), ce qui est en contradiction avec la définition de β .

On construit alors comme précédemment $u_{0n} = u_0 + \beta_n \eta_n$, où β_n est le nombre qui vient d'être défini correspondant à η_n , on obtient ainsi une suite u_n de solutions globales de (1) appartenant à $C([0, +\infty[; L^\gamma(\Omega))$ et à $C^2(\bar{\Omega} \times [0, +\infty[)$. Soit $T > 0$, les mêmes arguments que dans (a) permettent d'affirmer qu'on peut extraire une sous-suite notée $\{u_n^1\}$ telle que $u_n^1 \rightarrow u^1$ dans $C([\delta, T - \delta]; L^m(\Omega))$ pour tout $\delta > 0$, $1 \leq m < (\gamma+3)/2$, u^1 a les mêmes propriétés que u sauf (20) et (21). u^1 vérifie (25) puisque l'hypothèse (2) implique que la convergence de u_n^1 vers u^1 a aussi lieu dans $C([\delta, T - \delta]; L^{N(\gamma-1)/2}(\Omega))$.

De même, on peut extraire de $\{u_n^1\}$ une sous-suite $\{u_n^2\}$ ayant les mêmes propriétés que u_n^1 mais qui converge sur $[\delta, 2T - \delta]$ $\forall \delta > 0$ vers une fonction u^2 avec les mêmes propriétés que u^1 mais sur $(0, 2T)$ et égale à u^1 sur $[0, T]$. En itérant le procédé, on obtient une solution globale de (1) ayant les propriétés demandées. En effet, u vérifie (22) puisque pour tout $t \geq 0$, il existe n tel que $u(t) = u^n(t)$, $u^n(t)$ vérifiant (25). u est donc distincte de u_m , on en déduit (20) de la même façon que dans le a). La démonstration du théorème est terminée.

REFERENCES

- [1] P. BARAS. «*Compacité de l'opérateur $f \rightarrow u$ solution d'une équation non linéaire $(\frac{du}{dt} + Au \ni f$)*». Note au C.R.A.S., t. 286, série A, (1978), p. 1113-1116.
- [2] A. HARAUX, F.B. WEISSLER. «*Non-uniqueness for a semi-linear initial value problem*». Indiana University Mathematics Journal, vol. 31, n^o 2, (1982), p. 167-189.
- [3] A. HARAUX, M. KIRANE. «*Estimations C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires*». Université Pierre et Marie Curie. Paris V.
- [4] F.B. WEISSLER. «*Local existence and non-existence for semilinear parabolic equations in L^p* ». Indiana University Mathematics Journal, vol. 29, n^o 1, (1980), p. 79-102.

(Manuscrit reçu le 28 octobre 1982)