

BENOÎT PERTHAME

**Inéquations quasi-variationnelles et équations de Hamilton-
Jacobi-Bellman dans R^N**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 5, n° 3-4 (1983), p. 237-257

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_3-4_237_0

© Université Paul Sabatier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES ET EQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN DANS \mathbb{R}^N

Benoît Perthame (1)

(1) E.N.S. 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : Nous étudions dans cet article l'existence et l'unicité des solutions d'inéquations quasi-variationnelles pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman : On cherche u solution de

$$\text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i), u - Mu \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

où $(A^i)_{1 \leq i \leq m}$ sont des opérateurs uniformément elliptiques du 2ème ordre et où $Mu(x) = k + \inf_{\xi \geq 0} u(x+\xi)$. Nous résolvons ainsi un problème mixte de contrôle impulsif

et de contrôle continu de diffusions dans \mathbb{R}^N .

Summary : We study in this paper the existence and uniqueness of solutions of quasi-variational inequalities for Hamilton-Jacobi-Bellman equations : we look for u solution of

$$\text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i), u - Mu \right) = 0 \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^N, u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$$

where $(A^i)_{1 \leq i \leq m}$ are uniformly second-order elliptic operators and $Mu(x) = k + \inf_{\xi \geq 0} u(x+\xi)$.

This solves a mixed problem of impulse and continuous control of diffusion processes in \mathbb{R}^N .

INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous intéressons à la résolution des inéquations quasi-variationnelles pour les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman c'est-à-dire à la résolution de problèmes du type :

$$(1) \quad \text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i), u - Mu \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

où les opérateurs $(A^i)_{1 \leq i \leq m}$ sont uniformément elliptiques du second ordre à coefficients réguliers (les hypothèses précises sont détaillées ci-dessous) et où l'opérateur M est défini sur $C_b(\mathbb{R}^N)$ par :

$$(2) \quad Mu(x) = k + \inf_{\xi \geq 0} u(x + \xi),$$

où $k > 0$ est donné et $\xi \geq 0$ signifie : $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ avec $\xi_i \geq 0$ pour tout i . Enfin les fonctions $(f^i)_{1 \leq i \leq m}$ sont des données régulières.

L'étude de (1) (avec M donné par (2)) est motivée par le contrôle stochastique. Rappelons que les inéquations quasi-variationnelles i.e. (1) dans le cas où $m = 1$, ont été introduites par A. Bensoussan et J.L. Lions [1], [2] en vue de résoudre les problèmes de contrôle impulsif stochastique. D'autre part si l'obstacle Mu n'est pas présent dans (1) (i.e. si $k = +\infty$) alors (1) se réduit aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman intervenant en contrôle stochastique continu (cf. N.V. Krylov [9], P.L. Lions [11], [12]) : ce problème a été résolu par P.L. Lions [12], L.C. Evans et P.L. Lions [7]. Dans le cas général, (1) correspond à un problème mixte de contrôle impulsif et continu de diffusions dans \mathbb{R}^N : nous détaillerons cette interprétation dans [16].

Signalons également que la formulation même du problème (de par la non-linéarité due au Max) nécessite la recherche de solutions «régulières» i.e. appartenant à $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Ceci correspond dans le cas particulier où $m = 1$ à l'existence de solutions régulières des I.Q.V. (ou à la régularité des solutions faibles déterminées dans [1], [2]), rappelons que ce problème a été résolu par L.Caffarelli et A. Friedman [4], [5], U. Mosco [15] ...

Nous montrons dans ce qui suit que (1) admet une unique solution (cf. section I pour un énoncé précis). Nous indiquons également dans la section V quelques extensions, notamment au cas d'opérateurs M plus généraux (nous utiliserons une représentation des opérateurs M introduite dans P.L. Lions et B. Perthame [14]).

Pour résoudre (1), nous étudierons tout d'abord (cf. section II) l'existence et l'unicité pour le problème de l'obstacle associé aux équations de H.J.B. :

$$(3) \quad \text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i), u - \psi \right) = 0, \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

où ψ est donnée. De tels problèmes ont été étudiés par S. Lenhart [10] dans le cas où $\psi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Il nous sera ici nécessaire de traiter le cas d'obstacles ψ plus généraux (cf. II). Nous montrons ensuite (cf. section III) l'unicité d'une solution de (1) : pour cela nous adaptons un argument dû à B. Hanouzet et J.L. Lions [8]. Enfin la section IV est consacrée à la preuve de l'existence par des techniques d'estimations a priori fortement inspirées de P.L. Lions [12] et de L.C. Evans et P.L. Lions [7] : nous étendons légèrement la méthode introduite dans [7], [12] afin de pouvoir montrer des estimations a priori uniformes pour la suite construite par le procédé itératif introduit dans [1], [2], utilisé dans la résolution des I.Q.V. .

Signalons que dans une étude ultérieure (B. Perthame [16]) nous traiterons le cas où (1) est posé dans un ouvert borné de \mathbb{R}^N avec des conditions aux limites de Dirichlet, l'interprétation probabiliste de (1) et le cas d'opérateurs A^i dégénérés.

I. - NOTATIONS ET RESULTAT PRINCIPAL

Dans tout ce qui suit nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(4) \quad a_{jk}^i, b_j^i, c^i \text{ et } f^i \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

$$(5) \quad \exists \nu > 0, \forall i, 1 \leq i \leq m, \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N,$$

$$\sum_{j,k} a_{jk}^i \xi_j \xi_k \geq \nu |\xi|^2,$$

$$(6) \quad \exists \lambda_0 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \quad c^i(x) \geq \lambda_0.$$

Nous noterons A^i l'opérateur défini par :

$$A^i = - \sum_{j,k} a_{jk}^i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_j b_j^i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c^i(x).$$

Sous les hypothèses (4)-(6) nous avons le :

THEOREME 1. *Il existe une unique solution de (1) appartenant à $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$.*

Par la suite nous noterons D_+^2 le cône des fonctions ψ semi-concaves sur \mathbb{R}^N c'est-à-dire des fonctions ψ bornées vérifiant :

$$\exists C > 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \leq C \quad \text{dans } D'(\mathbb{R}^N), \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^N : |\chi| = 1.$$

Cette condition est d'ailleurs équivalente au fait suivant :

$$\psi(x) - \frac{1}{2} C |x|^2 \text{ est concave sur } \mathbb{R}^N.$$

Nous noterons pour une telle fonction :

$$(7) \quad \|\psi\|_{2,+} = \inf \left\{ C \geq 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \leq C, \forall x \in \mathbb{R}^N, |x|=1 \right\}.$$

Remarquons également que si $\psi \in D_+^2$ alors nécessairement $\psi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ et :

$$\|D\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \|\psi\|_{2,+}^{1/2} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{1/2}.$$

Nous utiliserons fréquemment la convention de sommation par rapport à l'indice répété.

II. - LE PROBLEME DE L'OBSTACLE

PROPOSITION 1. Soit $\psi \in D_+^2$; sous les hypothèses (4)-(6) il existe une unique solution de (3).

Remarque. Le cas $\psi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ est traité dans S. Lenhart [10]. Il nous est nécessaire de généraliser ce résultat car même si $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$, $Mu \notin W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$; par contre $Mu \in D_+^2$.

Démonstration. La démonstration de cette proposition s'obtient facilement à l'aide des estimations introduites dans [7], [12]. Pour cela nous introduisons le système pénalisé suivant :

1. - Le problème pénalisé

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^1 u_\epsilon^1 + \beta_\epsilon(u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2) + \beta_\epsilon(u_\epsilon^1 - \psi) = f^1, \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ A^2 u_\epsilon^2 + \beta_\epsilon(u_\epsilon^2 - u_\epsilon^3) + \beta_\epsilon(u_\epsilon^2 - \psi) = f^2, \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \\ \vdots \\ A^m u_\epsilon^m + \beta_\epsilon(u_\epsilon^m - u_\epsilon^1) + \beta_\epsilon(u_\epsilon^m - \psi) = f^m, \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, \end{array} \right.$$

où $\beta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \beta$ pour $\epsilon > 0$, avec $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$, β est croissante convexe, $\beta(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $\beta(t) > 0$ si $t > 0$. De plus nous confondons u_ϵ^1 et u_ϵ^{m+1} .

Comme les estimations a priori démontrées ci-dessous ne dépendent que des normes $W^{2,\infty}$ des coefficients a_{jk}^i, b_j^i, c^i et f^i et de $\|\psi\|_{2,+}$, nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que ces fonctions sont régulières ($C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$) ; le cas général s'en déduisant par un passage à limite semblable à celui du 4). On obtient facilement le :

LEMME 1. Il existe une unique solution $(u_\epsilon^i)_{1 \leq i \leq m} \in (C_b^4(\mathbb{R}^N))^m$ de (8), de plus :

$$(9) \quad \|u_\epsilon^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} \frac{\|f^i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\lambda_0}, \|\psi\|_{L^\infty} \right).$$

La proposition (1) se démontre alors par l'obtention d'estimations $W^{2,\infty}$.

2. - Estimation $W^{1,\infty}$

Pour $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, notons $Z[f]$ la fonction définie par :

$$(10) \quad Z[f](x) = |Df(x)|^2 + \mu_0(C_0 - f(x))^2,$$

où C_0 et μ_0 sont des constantes fixées ultérieurement. On obtient des majorations de $\|u_\epsilon^i\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, indépendamment de ϵ , grâce au :

LEMME 2. Il existe $\mu_0 > 0$ (dépendant de a_{jk}^i, b_j^i et c^i uniquement) tel que, si

$$C_0 \geq \text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} \frac{\|f^i\|_{L^\infty}}{\lambda_0}, \|\psi\|_{L^\infty} \right)$$

alors :

$$(11) \quad \|Z[u_\epsilon^i]\|_{L^\infty} \leq \text{Max} \left(C, \|Z[\psi]\|_{L^\infty} \right),$$

où $C > 0$, ne dépend que du choix de C_0 et des coefficients a_{jk}^i, b_j^i, c^i et f^i .

Ce lemme se démontre comme le résultat analogue de [12] ; un calcul facile donne :

$$(12) \quad -a_{jk}^i \frac{\partial^2 Z[u_\epsilon^i]}{\partial x_j \partial x_k}(x) \leq -2\mu_0 \nu |Du_\epsilon^i(x)|^2 + C |Du_\epsilon^i(x)|^2 + C\mu_0 \\ - \beta'_\epsilon(u_\epsilon^i - u_\epsilon^{i+1}) \{Z[u_\epsilon^i] - Z[u_\epsilon^{i+1}]\}(x) \\ - \beta'_\epsilon(u_\epsilon^i - \psi) \{Z[u_\epsilon^i] - Z[\psi]\}(x).$$

Le principe du maximum montre alors que s'il existe un point x_0 et un indice i_0 tels que :

$$(13) \quad \sup_{i,x} Z [u_\epsilon^i] (x) = \delta = Z [u_\epsilon^{i_0}] (x_0),$$

nous savons :

$$-a_{jk}^{i_0} \frac{\partial^2 Z [u_\epsilon^{i_0}]}{\partial x_j \partial x_k} (x_0) \geq 0.$$

La formule (12) donne alors le résultat par un choix convenable de μ_0 . Le problème est que la borne supérieure dans (13) n'est pas toujours atteinte car u_ϵ^i n'est pas définie sur un compact mais sur \mathbb{R}^N entier. Nous sommes alors amenés à poser :

$$Z_\alpha^i(x) = e^{-\alpha |x|^2} Z [u_\epsilon^i] (x),$$

et on vérifie que :

$$(14) \quad e^{\alpha |x|^2} \left(-a_{jk}^i \frac{\partial^2 Z_\alpha^i}{\partial x_j \partial x_k} \right) (x) = -a_{jk}^i \frac{\partial^2 Z [u_\epsilon^i]}{\partial x_j \partial x_k} (x) + \\ + (a_{jk}^i + a_{kj}^i) (2\alpha x_k) \frac{\partial [u_\epsilon^i]}{\partial x_j} (x) - a_{jk}^i (4\alpha^2 x_j x_k) Z [u_\epsilon^i] (x) + 2\alpha a_{jk}^i \delta_{jk} Z [u_\epsilon^i] (x).$$

Puisque Z_α^i tend vers 0 quand x tend vers l'infini nous avons maintenant :

$$\exists x_\alpha \in \mathbb{R}^N, \quad \exists i_\alpha \text{ tels que : } \max_{x,i} Z_\alpha^i(x) = Z_\alpha^{i_\alpha}(x_\alpha) = \delta_\alpha.$$

Mais on a évidemment :

$$\delta_\alpha \rightarrow \delta, \quad \alpha \rightarrow 0$$

et donc :

$$\alpha |x_\alpha|^2 \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0$$

Il s'ensuit d'après (14) que :

$$0 \leq -a_{jk}^{i_\alpha} \frac{\partial^2 Z [u_\epsilon^{i_\alpha}]}{\partial x_j \partial x_k} (x_\alpha) + o(\alpha),$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq 2\mu_0 \nu |Du_\epsilon^i(x_\alpha)|^2 + C |Du_\epsilon^i(x_\alpha)|^2 + C\mu_0 \\
 &\quad - \beta'_\epsilon (u_\epsilon^i - u_\epsilon^{i+1}) \{ Z[u_\epsilon^i] - Z[u_\epsilon^{i+1}] \} (x_\alpha) \\
 &\quad - \beta'_\epsilon (u_\epsilon^i - \psi) \{ Z[u_\epsilon^i] - Z[\psi] \} (x_\alpha) + o(\alpha),
 \end{aligned}$$

i.e. :

$$Z[u_\epsilon^i](x_\alpha) \leq \text{Max}(C, Z[\psi](x_\alpha)) + o(\alpha).$$

Quand α tend vers 0^+ , nous obtenons le résultat.

Remarque. Dans toutes les estimations qui suivent la même difficulté apparaîtra et pourra être traitée par le même argument de troncature. Aussi ne le répéterons-nous pas et supposons toujours que les extrema sont atteints.

3. - Estimations $W^{2,\infty}$

Comme précédemment nous adaptions convenablement les méthodes de P.L. Lions [12] et L.C. Evans et P.L. Lions [7]. Introduisons l'ensemble V des matrices α , symétriques, de dimension $N \times N$, telles que :

$$\alpha_{ij} \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$\|\alpha\| \leq \sup_{i,x} \| (a_{jk}^i)(x) \| \quad (\text{norme de la matrice } (a_{jk}^i)_{j,k}).$$

Supposons de plus, pour simplifier les notations, que $\nu = 1$. Soient $\alpha \in V$ et $K \geq 0$; notons, pour $f \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $W_K^\alpha[f]$ la fonction définie par :

$$(15) \quad W_K^\alpha[f](x) = \|D^2f(x)\|^2 + 2N^2K \text{tr}(\alpha \cdot D^2f)(x) + \mu |Df(x)|^2,$$

où μ est fixé dans la démonstration du lemme ci-dessous (μ dépend uniquement de a_{jk}^i, b_j^i, c^i).

LEMME 3. Pour tout K vérifiant : $K \geq \sup_{i,x} \|D^2u_\epsilon^i(x)\|$, pour tout $\alpha \in V$, nous avons :

$$(16) \quad \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \|W_K^\alpha[u_\epsilon^i]\|_{L^\infty} \leq \text{Max} \left(C + CK + \frac{K^2}{2}, C + C \|\psi\|_{2,+} + K \right),$$

où C ne dépend que de $a_{jk}^i, b_j^i, c^i, f^i$ et $\|\psi\|_{W^{1,\infty}}$.

Démonstration. On suppose que :

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^N, \exists i_1, \quad \text{Max}_{1 \leq i \leq m} W_K^\alpha [u_\epsilon^i] = W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}](x_1),$$

(rappelons que si ce n'est pas le cas on considère la fonction définie par : $e^{-\beta \|x\|^2} W_K^\alpha [u_\epsilon^i]$ et on adapte le raisonnement du lemme 2).

Par un calcul facile et le principe du maximum on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq -a_{jk}^{i_1}(x_1) \frac{\partial^2 W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}](x_1)}{\partial x_j \partial x_k} \\ &\leq -\mu \|D^2 u_\epsilon^{i_1}(x_1)\|^2 + C \|D^2 u_\epsilon^{i_1}(x_1)\|^2 + CK^2 + C\mu \\ &\quad - \beta'_\epsilon (u_\epsilon^{i_1} - u_\epsilon^{i_1+1}) \{ W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}] - W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1+1}] \}(x_1) \\ &\quad - \beta'_\epsilon (u_\epsilon^{i_1} - \psi) \{ W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}] - \text{tr} [(D^2 u_\epsilon^{i_1} + 2N^2 K\alpha) \cdot D^2 \psi] \\ &\quad - \mu (D\psi, Du_\epsilon^{i_1}) \}(x_1). \end{aligned}$$

Mais en choisissant μ convenablement, et en remarquant que la matrice $(D^2 u_\epsilon^{i_1} + 2N^2 K\alpha)$ est positive, il vient :

ou bien :

$$\begin{aligned} W_K^\alpha [u_\epsilon^{i_1}](x_1) &\leq \text{tr} \{ (D^2 u_\epsilon^{i_1} + 2N^2 K\alpha) \cdot D^2 \psi \}(x_1) + \mu (D\psi, Du_\epsilon^{i_1})(x_1) \\ &\leq CK \|\psi\|_{2,+} + C\mu, \end{aligned}$$

ou bien :

$$(\mu - C) \|D^2 u_\epsilon^{i_1}(x_1)\|^2 \leq CK^2 + C\mu,$$

d'où, dans tous les cas, l'inégalité (16).

Les estimations $W^{2,\infty}$ s'obtiennent à partir du lemme 3 grâce à un choix convenable de α et K (comme dans [7]) :

$$(17) \quad K_\epsilon = \sup_{i,x} \|D^2 u_\epsilon^i(x)\|,$$

On choisit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et i_0 tels que :

$$(18) \quad \|D^2 u_\epsilon^{i_0}(x_0)\|^2 \geq \frac{3}{4} K_\epsilon^2,$$

la matrice symétrique $D^2 u_\epsilon^i(x_0)$ est diagonalisable dans une base orthonormée B et on note α la matrice :

$$(19) \quad \alpha = (a_{jk}^i(x_0)\delta_{jk}) \quad \text{dans la base } B.$$

D'après le choix de α nous avons, dans la base B :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\alpha \cdot D^2 u_\epsilon^i(x_0)) &= a_{jj}^i \frac{\partial^2 u_\epsilon^i}{\partial x_j \partial x_j}(x_0) = \left\{ -f^i + b_j^i \frac{\partial u_\epsilon^i}{\partial x_j} + c^i u_\epsilon^i + \beta_\epsilon (u_\epsilon^i - u_\epsilon^{i+1}) \right\}(x_0) \\ &\geq -C, \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} (20) \quad \frac{3}{4}K_\epsilon^2 - CK_\epsilon - C &\leq W_K^\alpha [u_\epsilon^i](x_0) \\ &\leq \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \|W_K^\alpha [u_\epsilon^i](x)\|_{L^\infty} \\ &\leq \text{Max} \left(C + CK_\epsilon + \frac{K_\epsilon^2}{2}, C + CK_\epsilon \|\psi\|_{2,+} \right), \end{aligned}$$

d'où :

$$K_\epsilon \leq C,$$

avec C constante ne dépendant que de $a_{jk}^i, b_j^i, c^i, f^i$ et $\|\psi\|_{2,+}$. Et finalement :

$$\|D^2 u_\epsilon^i\|_{L^\infty} \leq C \quad \forall i, 1 \leq i \leq m.$$

4. - Passage à la limite

Pour obtenir (3) à partir de (8) il suffit de faire tendre ϵ vers 0. Ce passage à la limite se fait exactement comme dans [6], nous ne le reprenons donc pas ici et la proposition (1) est démontrée.

III. - UNICITE DE LA SOLUTION DE (1)

Adaptons la démonstration dûe à B. Hanouzet et à J.L. Joly [8]. Nous nous ramenons au cas où les fonctions f^i et ψ sont non-négatives par addition de constantes à u et f^i . Il vient alors :

LEMME 4. *Toute solution de (1) (ou de (3)) est non-négative.*

Démonstration. Pour (1) par exemple. Soit u une solution de (1). On peut supposer (cf. remarque du II.2) que :

$$\exists x_0, u(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} u(x) = \delta.$$

Mais alors :

$$Mu(x_0) = k + \inf_{\xi \geq 0} u(x_0 + \xi) = \delta + k > u(x_0),$$

il s'ensuit que dans une boule B de centre x_0 , on a :

$$\max_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i) = 0 \quad \text{p.p. dans } B.$$

Mais le principe du maximum de Bony [3] montre alors que si $\delta > 0$:

$$\forall i, \liminf_{x \rightarrow x_0} \text{ess} (A^i u(x)) \leq \lambda_0 \delta < 0,$$

d'où une contradiction et $\delta \geq 0$.

Grâce à ce résultat nous sommes ramenés à montrer l'unicité des solutions positives de (1). Pour cela construisons un opérateur T , qui à $\omega \in D_+^2$, $\omega \geq 0$, associe $u = T(\omega)$, solution de (3) avec $\psi = M(\omega)$. (Remarquons que si $\omega \in D_+^2$, $M\omega \in D_+^2$; un résultat analogue est montré dans le V). On vérifie facilement que T est croissant et concave.

Notons alors u^0 la solution de :

$$(21) \quad \max_{1 \leq i \leq m} (A^i u^0 - f^i) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, u^0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N);$$

l'existence de u^0 est montrée dans [7], [12]. Choisissons $\mu_1 \in]0,1[$ tel que :

$$(22) \quad \mu_1 \|u^0\|_{L^\infty} \leq k.$$

Nous pouvons établir, comme dans [8], le :

LEMME 5. Soient $\theta \in [0,1]$, φ et ψ deux fonctions positives de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ vérifiant $\psi - \varphi \leq \theta\psi$, alors :

$$T(\psi) - T(\varphi) \leq \theta(1-\mu_1)T(\psi).$$

Démonstration. L'hypothèse du lemme s'écrit :

$$(1-\theta)\psi + \theta \cdot 0 \leq \varphi,$$

la concavité et la croissance de T donnent donc :

$$(1-\theta) T(\psi) + \theta T(0) \leq T(\varphi).$$

Il reste à montrer que :

$$-T(0) \leq -\mu_1 T(\varphi),$$

Or on a aisément :

$$u^0 \geq T(\varphi),$$

il suffit donc de vérifier que :

$$T(0) \geq \mu_1 u^0.$$

Mais la solution v de :

$$(23) \quad \text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i v - f^i), v - \mu_1 \|u^0\|_{L^\infty} \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, v \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

vérifie $v \leq T(0)$ grâce au choix de μ_1 en (22) et par croissance de T. De plus en comparant (23) et :

$$\text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^1(\mu_1 u^0) - f^i), \mu_1 u^0 - \mu_1 \|u^0\|_{L^\infty} \right) \leq 0,$$

on obtient que :

$$\mu_1 u \leq v,$$

d'où l'inégalité du lemme 5.

PROPOSITION 2. *La solution de (1), si elle existe, est unique.*

Démonstration. D'après le lemme 4, deux éventuelles solutions u et v de (1) sont positives, donc :

$$u - v \leq u,$$

en appliquant le lemme 5, il vient :

$$Tu - Tv \leq (1 - \mu_1)Tu,$$

Comme $Tu = u$ et $Tv = v$, nous obtenons :

$$u - v \leq (1 - \mu_1)^p u, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

i.e. : $u \leq v$.

De même $v \leq u$, d'où le résultat.

Remarque. Cette démonstration est tout à fait semblable à celle de B. Hanouzet et J.L. Joly [8].

IV. - EXISTENCE

On se ramène comme précédemment au cas où $f^i \geq 0$. On utilise alors la méthode itérative introduite dans [1], [2]. Soit u^0 la solution de (21), on construit par récurrence la suite $(u^n) : u^{n+1} = T u^n$ pour $n \geq 0$. On montre facilement que $u^n \geq 0$, u^n décroît avec n vers une fonction u . L'étape fondamentale est alors d'obtenir des estimations $W^{1,\infty}$ puis $W^{2,\infty}$ et de passer à la limite lorsque n tend vers l'infini.

1. - Estimations $W^{1,\infty}$

Puisque la suite u^n est décroissante et positive, nous avons :

$$\|u^n\|_{L^\infty} \leq \|u^0\|_{L^\infty},$$

on peut alors choisir $C_0 = k + \|u^0\|_{L^\infty}$ dans le lemme 2 et il existe donc $C > 0$ tel que :

$$\|Z[u^{n+1}]\|_{L^\infty} \leq \text{Max} \left(C, \|Z[Mu^n]\|_{L^\infty} \right).$$

On conclut alors en utilisant le :

LEMME 6.

$$\|Z[Mu]\|_{L^\infty} \leq \|Z[u]\|_{L^\infty}, \quad \forall u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), 0 \leq u \leq C_0.$$

Démonstration. Soient $u_n \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ une suite de fonctions telles que :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \quad \text{dans } C_b(\mathbb{R}^N),$$

$$\|Z[u_n]\|_{L^\infty} \leq \|Z[u]\|_{L^\infty}.$$

En notant (e_1, \dots, e_N) la base canonique de \mathbb{R}^N , il vient :

$$Z[Mu_n](x) = \sum_{i=1}^n \left(\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\inf_{\xi \geq 0} u_n(x+he_i+\xi) - \inf_{\xi \geq 0} u_n(x+\xi)}{h} \right)^2$$

$$+ \mu_0 \left| C_0 - k - \inf_{\xi \geq 0} u_n(x+\xi) \right|^2$$

$$\leq \liminf_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sup_{\xi \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_n(x+he_i+\xi) - u_n(x+\xi)}{h} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \mu_0 (C_0 - u_n(x+\xi))^2 \right\}$$

car on a bien sûr :

$$0 \leq C_0 - k - \inf_{\xi \geq 0} u_n(x+\xi) \leq C_0 - \inf_{\xi \geq 0} u_n(x+\xi),$$

et :

$$0 \leq \frac{1}{h} \left(\inf_{\xi \geq 0} u_n(x+he_i+\xi) - \inf_{\xi \geq 0} u_n(x+\xi) \right).$$

Nous avons donc :

$$Z[Mu_n](x) \leq \liminf_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sup_{\substack{\xi \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 1}} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x+\xi+\theta he_i) \right)^2 + \mu_0 [C_0 - u_n(x+\xi)]^2 \right\}$$

$$\leq \|Z[u_n]\|_{L^\infty}.$$

Remarquant alors que :

$$Mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Mu \quad \text{dans } C_b(\mathbb{R}^N),$$

il vient :

$$\begin{aligned} \|Z[Mu]\|_{L^\infty} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Z[Mu_n]\|_{L^\infty} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|Z[u_n]\|_{L^\infty} \\ &\leq \|Z[u]\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

d'où le lemme 6.

2. - Estimations $W^{2,\infty}$

Nous utiliserons, pour obtenir ces estimations, un lemme préliminaire :

LEMME 7. Soient α une matrice positive, $\beta \in \mathbb{R}^N$ et $v \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, on a :

$$(24) \quad \text{tr}(\alpha \cdot D^2(Mv)) + \beta \cdot D(Mv) \leq \| \text{tr}(\alpha \cdot D^2v) + \beta \cdot Dv \|_{L^\infty} \text{ dans } D'(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration. Comme pour le lemme 6, soit $v_n \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$ une suite de fonctions telles que :

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v \quad \text{dans } C_b(\mathbb{R}^N),$$

$$\| \text{tr}(\alpha \cdot D^2v_n) + \beta \cdot Dv_n \|_{L^\infty} \leq \| \text{tr}(\alpha \cdot D^2v) + \beta \cdot Dv \|_{L^\infty}.$$

On montre d'abord le résultat pour les fonctions v_n ; pour cela choisissons une base orthonormée (x_1, \dots, x_N) de \mathbb{R}^N où α est diagonale, notons $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N}$ cette diagonale et, quitte à changer x_i en $-x_i$, supposons $\beta \geq 0$. Soit alors P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^N à (x_1, \dots, x_N) :

$$[\text{tr}(\alpha \cdot D^2(Mv_n)) + \beta \cdot D(Mv_n)](x)$$

$$\leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left\{ \alpha_i \frac{\inf_{P\xi \geq 0} v_n(x+h\chi_i+\xi) + \inf_{P\xi \geq 0} v_n(x-h\chi_i+\xi) - 2 \inf_{P\xi \geq 0} v_n(x+\xi)}{h^2} + \beta_i \frac{\inf_{P\xi \geq 0} v_n(x+h\chi_i+\xi) - \inf_{P\xi \geq 0} v_n(x+\xi)}{h} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sup_{P\xi \geq 0} \left\{ \alpha_i \frac{v_n(x+h\chi_i+\xi) + v_n(x-h\chi_i+\xi) - 2v_n(x+\xi)}{h^2} \right. \\ &\quad \left. + \beta_i \frac{v_n(x+h\chi_i+\xi) - v_n(x+\xi)}{h} \right\} \\ &\leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \sup_{P\xi \geq 0} \left\{ \alpha_i \cdot \sup_{|\theta| < 1} \frac{\partial^2 v_n}{\partial \chi_i^2} (x+\theta h\chi_i+\xi) + \beta_i \cdot \sup_{|\theta| < 1} \frac{\partial v_n}{\partial \chi_i} (x+\theta h\chi_i+\xi) \right\} \\ &\leq \| \text{tr}(\alpha \cdot D^2 v_n) + \beta \cdot Dv_n \|_{L^\infty} \end{aligned}$$

En passant à la limite dans le premier membre de l'inégalité on obtient alors :

$$\text{tr}(\alpha \cdot D^2(Mv)) + \beta \cdot D(Mv) \leq \| \text{tr}(\alpha \cdot D^2 v) + \beta \cdot Dv \|_{L^\infty} \text{ dans } D'(R^N)$$

et le lemme 7 est démontré.

Il est alors facile de raffiner le lemme 3 pour obtenir le :

LEMME 3'. *Sous les hypothèses et avec les notations du lemme 3, si de plus $\psi = Mv$ où $v \in W^{2,\infty}(R^N)$, on a :*

$$(25) \quad \| W_K^\alpha [u_\epsilon^i] \|_{L^\infty} \leq \text{Max} \left(C + CK + \frac{K^2}{2}, \| W_K^\alpha [v] \|_{L^\infty} \right).$$

Démonstration. Soit $\psi_n \in C_b^\infty(R^N)$ une suite d'obstacles réguliers tels que :

$$\psi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \psi \text{ dans } C_b(R^N).$$

On peut supposer que pour toute matrice α et pour tout vecteur β tels que :

$$\exists K(\alpha, \beta) \geq 0, \text{tr}(\alpha \cdot D^2 \psi) + \beta \cdot D\psi \leq K(\alpha, \beta) \text{ dans } D'(R^N),$$

on ait :

$$(26) \quad \text{tr}(\alpha \cdot D^2 \psi_n) + \beta \cdot D\psi_n \leq K(\alpha, \beta).$$

On montre alors (25) pour la solution du problème (8) associé à ψ_n et le cas de ψ s'en déduit facilement par passage à la limite. On reprend, pour cela, la démonstration du lemme 3, mais dans le cas où :

$$W_K^\alpha [u_\epsilon^i] (x_1) \leq \text{tr} [(D^2 u_\epsilon^i + 2NK\alpha) \cdot D^2 \psi_n] (x_1) + \mu(D\psi_n, Du_\epsilon^i) (x_1),$$

il vient :

$$W_K^\alpha [u_\epsilon^i] (x_1) \leq \|\text{tr} [(D^2 u_\epsilon^i + 2NK\alpha) \cdot D^2 v] + \mu(Du_\epsilon^i, Dv)\|_{L^\infty},$$

d'après (26) et le lemme 7. Finalement on obtient :

$$W_K^\alpha [u_\epsilon^i] (x_1) \leq \|W_K^\alpha [v]\|_{L^\infty}.$$

Dans l'autre cas la démonstration reste identique à celle du II.3, et dans tous les cas nous obtenons (25).

Nous pouvons alors obtenir l'estimation $W^{2,\infty}$ grâce à la méthode utilisée dans le paragraphe II.3 : notons R la plus grande valeur de X telle que :

$$3/4 X^2 - CX + C \leq C + CX + \frac{X^2}{2},$$

inégalité introduite dans le II.3 (cf. (20)). Établissons par récurrence le résultat suivant :

LEMME 8. Pour $p \geq 1$ et pour $0 < \epsilon \leq 1$, notons $(u_{p,\epsilon}^i)_{1 \leq i \leq m}$ la solution de (8) avec $\psi = M u^{p-1}$, alors :

$$(27) \quad \forall K \geq R, \forall \alpha \in V : \|W_K^\alpha [u_{p,\epsilon}^i]\|_{L^\infty} \leq C + CK + \frac{K^2}{2}$$

Remarquons avant de montrer ce lemme que s'il est vrai à l'ordre $p-1$ alors : $\|D^2 u_{p,\epsilon}^i\|_{L^\infty} \leq R$; en effet si ce n'est pas le cas on choisit $K_\epsilon = \text{Max}_{1 \leq i \leq m} \|D^2 u_{p,\epsilon}^i\|_{L^\infty} > R$

et α comme en II.2 (19). Appliquant alors le lemme 8 à l'ordre $p-1$ et le lemme 3' nous obtenons une inégalité analogue à (20), d'où une contradiction. Remarquons également que ce lemme est vrai pour $p=0$ et $\psi = +\infty$ d'après [7].

Démonstration. Supposons le résultat vrai à l'ordre $p-1$, d'après la Remarque ci-dessus $\|D^2 u_{p,\epsilon}^i\| \leq R \quad \forall \epsilon, \forall i$. L'hypothèse sur K du lemme 3' est donc automatiquement vérifiée pour $K \geq R$, et (27) n'est que (25) avec $\psi = u^{p-1}$.

En particulier nous avons donc établi :

$$\exists C \geq 0, \quad \|u^n\|_{W^{2,\infty}(R^N)} \leq C.$$

3. - Passage à la limite

Encore une fois le passage à la limite ne pose aucun problème, il se fait comme dans [6], à l'aide du crochet d'accrétivité. On obtient facilement :

$$u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{W^{1,\infty}} u \in W^{2,\infty},$$

d'autre part le lemme 5 montre que :

$$u^n - u^{n+1} \leq (1-\mu_1)^n \|u^0\|_{L^\infty},$$

ce qui prouve que :

$$u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ dans } C_b(\mathbb{R}^N),$$

et donc :

$$Mu^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Mu \text{ dans } C_b(\mathbb{R}^N).$$

Nous sommes donc dans la situation de [6] et le théorème 1 s'en déduit :

$$\text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i), u - Mu \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

V. - EXTENSIONS

Le théorème 1 s'étend facilement au cas d'opérateur M plus généraux que celui présenté ci-dessus. L'interprétation et la représentation de ces opérateurs est donnée dans P.L. Lions et B. Perthame [14].

Remarquons que l'opérateur donné par (2) vérifie :

$$(28) \quad M \text{ est croissant : } u \leq v \Rightarrow M[u] \leq M[v],$$

$$(29) \quad M \text{ est concave : } M[\theta u + (1-\theta)v] \geq \theta M[u] + (1-\theta)M[v],$$

$$(30) \quad M[u+\lambda] = M[u] + \lambda \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, u \in C_b(\mathbb{R}^N),$$

$$(31) \quad M[u](x+h) = M[u(\cdot+h)](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall h \in \mathbb{R}^N,$$

$$(32) \quad M[0] \geq k > 0.$$

Soit alors un opérateur sur $C_b(\mathbb{R}^N)$, encore noté M , vérifiant (28)-(31). D'après [14] on a la représentation suivante :

$$(33) \quad M[u] = \inf_{\alpha} [C(\alpha) + u * P_{\alpha}],$$

où les P_{α} sont des mesures de probabilités sur \mathbb{R}^N . Le problème (1) pour un tel opérateur M correspond alors à un problème de contrôle continu de diffusions et de contrôle impulsionnel, la loi de l'amplitude des impulsions étant donnée par P_{α} . On démontre que ce problème a une solution grâce au :

THEOREME 2. *Si M est donné par (33), et sous les hypothèses (4)-(6) et (32), il existe une unique solution de :*

$$\text{Max} \left(\text{Max}_{1 \leq i \leq m} (A^i u - f^i), u - Mu \right) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N, u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Remarque. Pour montrer l'unicité (cf. III) il nous est nécessaire de supposer (32) i.e. $\inf_{\alpha} C(\alpha) > 0$ dans (33). Par contre l'existence, dans le théorème 2, ne nécessite pas cette hypothèse.

Le point principal de la démonstration est d'obtenir à nouveau les lemmes 6 et 7. Pour cela notons :

$$v_{(h)}(\cdot) = v(\cdot + h),$$

et (comme dans le lemme 7) soient $\alpha_i \geq 0$ et $\beta_i \geq 0$, pour $i \leq N$. Montrons alors le lemme 7 : soit $h > 0$:

$$\begin{aligned} & \alpha_i \frac{Mv_{(h\chi_i)} + Mv_{(-h\chi_i)} - 2Mv}{h^2} + \beta_i \frac{Mv_{(h\chi_i)} - Mv}{h} \\ & \leq \frac{1}{h^2} \left((\alpha_i + \beta_i h) Mv_{(h\chi_i)} + \alpha_i Mv_{(-h\chi_i)} - (Mv) \left(2 \text{tr } \alpha + \sum_{i=1}^N \beta_i h \right) \right) \\ & \leq \left(\frac{2 \text{tr } \alpha}{h^2} + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \beta_i \right) \left[M \left(\frac{\alpha_i + \beta_i h}{2 \text{tr } \alpha + h \sum_{i=1}^N \beta_i} v_{(h\chi_i)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\alpha_i}{2 \text{tr } \alpha + h \sum_{i=1}^N \beta_i} v_{(-h\chi_i)} \right) - Mv \right] \quad (\text{par concavité de } M) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{2 \operatorname{tr} \alpha}{h^2} + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \beta_i \right) \left\| \frac{\alpha_i + \beta_i h}{2 \operatorname{tr} \alpha + h \sum_{i=1}^N \beta_i} v(h\chi_i) + \frac{\alpha_i}{2 \operatorname{tr} \alpha + h \sum_{i=1}^N \beta_i} v(-h\chi_i) - v \right\|_{L^\infty}$$

(car $\|Mu - Mv\| \leq \|u - v\|$ cf. [14])

$$\leq \left\| \alpha_i \frac{v(x+h\chi_i) + v(x-h\chi_i) - 2v(x)}{h^2} + \beta_i \frac{v(x+h\chi_i) - v(x)}{h} \right\|_{L^\infty}$$

et quand $h \rightarrow 0$ nous obtenons le résultat désiré.

Remarques. 1) Notons que l'on peut traiter de la même façon le cas d'une infinité d'opérateurs A^i .

2) On peut également obtenir des résultats de régularité $W_{loc}^{2,\infty}$ grâce à la méthode de L. Caffarelli et A. Friedman [4], [5]. Celle-ci permet de traiter le cas d'obstacles plus généraux que (2) (par exemple $Mu(x) = k(x) + \inf_{\xi \geq 0} [u(x+\xi) + Co(\xi)]$) mais semble mal adaptée pour des obstacles implicites aussi généraux que (33) comme par exemple :

$$Mu(x) = k + \int_B u(x+\xi) dP(\xi).$$

REFERENCES

- [1] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS. C.R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), p. 1189-1192.
- [2] A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS. «*Contrôle impulsif et Inéquations quasi-variationnelles*» Dunod, Paris (1982).
- [3] J.M. BONY. «*Principe du maximum dans les espaces de Sobolev*». C.R. Acad. Sc. Paris, 265 (1967), p. 333 à 335.
- [4] L. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN. Comm. in P.D.E., 3(8) (1978), p. 745-753.
- [5] L. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN. Comm. in P.D.E., 4(3) (1979), p. 279-291.
- [6] L.C. EVANS et A. FRIEDMAN. «*Optimal Switching and the Dirichlet problem for Bellman equations*». Trans. Amer. Math. Soc., 253, 1979, p. 365-389.
- [7] L.C. EVANS et P.L. LIONS. «*Résolutions des équations de H.J.B. pour les opérateurs uniformément elliptiques*». C.R. Acad. Sc. Paris. 290 (1980), p. 1049-1052.
- [8] B. HANOZET et J.L. JOLY. «*Convergence uniforme des itérés définissant la solution faible d'une I.Q.V.*». C.R. Acad. Sc. Paris, 286 (1978).
- [9] N.V. KRYLOV. «*On control of the solution of a stochastic integral equation*». Th. Proba. and appl. 17 (1972), p. 114-131.
- [10] S. LEHNART. «*Partial differential equations for dynamical programming*». Thèse-Univ. of Kentucky-Lexington (1981).
- [11] P.L. LIONS. «*Control of diffusion processes in R^N* ». Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), p. 121-147.
- [12] P.L. LIONS. «*Résolution analytique des problèmes de Bellman-Dirichlet*». Acta Mathematica, 146 (1981) p. 151-166.
- [13] P.L. LIONS et J.L. MENALDI. «*Control of stochastic integrals and equations of H.J.B.*». S.I.A.M. J. Control, optim., 20 (1982), p. 82-95.
- [14] P.L. LIONS et B. PERTHAME. «*Une remarque sur les opérateurs non-linéaires intervenant dans les inéquations quasi-variationnelles*». A paraître.
- [15] U. MOSCO. «*Implicit variational problems and quasi-variational inequalities. In Non linear operators and the Calculus of Variations*». Bruxelles, 1975, Springer Berlin (1976).

- [16] B. PERTHAME. Thèse de 3ème cycle, Univ. Paris VI, (1983).

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1982)