ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ANTONIO DE BIVAR-WEINHOLTZ
RÉMI PIRAUX

Formule de Trotter pour l'opérateur $-\Delta + q^{+} - q^{-} + iq'$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 5, nº 1 (1983), p. 15-37
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1983_5_5_1_15_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol V, 1983, P. 15 à 37

FORMULE DE TROTTER POUR L'OPERATEUR $-\Delta + q^+ - q^- + iq'$

Antonio de Bivar-Weinholtz *(1)* **et Rémi Piraux** *(2)*

(1) C.M.A.F., 2 av. Gama Pinto, 1699 Lisboa Codex - Portugal.
(2) 102, Bd Kellermann, 75013 Paris - France.

Résumé : On démontre la convergence de la formule de Trotter pour $(e^{-t\bar{A}})_{t \geqslant 0}$, où A est une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur de Schrödinger $(-\Delta - q^-) + (q^+ + iq')$ (q^+, q^-, q', fonctions réelles définies dans Ω, q^+, $q^- \geqslant 0$). On montre simultanément que A est fermable et $\bar{A}$ m-accrétif. Dans § 2 on suppose que q^+, $q' \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega)$; dans § 3, que $q^+ \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega)$ ($p = \frac{N}{2}$, si $N \geqslant 3$, $p > 1$ si $N = 1, 2$) et $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$, $\epsilon > 0$ arbitraire.

Summary : We prove the convergence of the Trotter product formula for $(e^{-t\bar{A}})_{t \geqslant 0}$, A being a realization in $L^2(\Omega)$ of the Schrödinger operator $(-\Delta - q^-) + (q^+ + iq')$ (q^+, q^-, q' real valued functions definied on Ω, q^+, $q^- \geqslant 0$). We simultaneously show that A is closable and $\bar{A}$ m-accretive. In § 2 we suppose q^+, $q' \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega)$; in § 3, $q^+ \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega)$ ($p = \frac{N}{2}$, if $N \geqslant 3$, $p > 1$ if $N = 1, 2$) and $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$, $\epsilon > 0$ arbitrarily small.

1. - INTRODUCTION. RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS

Soit Ω un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^N$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$. On définit une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ par :

$$D(A) = \left\{u \in H^1_0(\Omega) : V u \in L^1_{loc}(\Omega), -\Delta u + Vu \in L^2(\Omega)\right\}$$

. $\forall\, u \in D(A),\ Au = -\Delta u + V u$

On note :

$$q = \mathrm{Re}(V),\ q' = \mathrm{Im}(V),\ q^+ = \max(q,0),\ q^- = \max(-q,0),$$

et on fait les hypothèses suivantes :

$$(1)\qquad .\ q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega) \quad \text{où} \quad \begin{cases} p = \dfrac{N}{2} & \text{si } N \geqslant 3 \\ p > 1 & \text{si } N = 2 \\ p = 1 & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

(2) . Si $N \geqslant 2$ ou bien $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$, ou bien $q^- \in L^{\frac{N}{2}+\epsilon}(\Omega)$ (pour un $\epsilon > 0$ arbitraire).

Le résultat suivant est alors connu (Théorème 3.1 de [3]) :

THEOREME 1.1. (Brézis-Kato) : A *est fermable dans* $L^2(\Omega)$ *et il existe* $\lambda_1 > 0$ *tel que* $\bar{A} + \lambda_1$ *soit* m-*accrétif. En plus si* $u \in D(\bar{A})$, *alors* $u \in H^1_0(\Omega)$, $q\,|u|^2 \in L^1(\Omega)$ *et :*

$$\mathrm{Re}(\bar{A}u,u) = \int_\Omega |Du|^2 + \int_\Omega q\,|u|^2.$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire :

(3) . $|q'(x)| \leqslant M q^+(x) + h(x)$ p.p. dans Ω où $M \geqslant 0$ et :

$$h \in L^r_{loc}(\Omega) \text{ avec } \begin{cases} r = \dfrac{2N}{N+2} & \text{si } N \geqslant 3 \\ r > 1 & \text{si } N = 2 \\ r = 1 & \text{si } N = 1 \end{cases}$$

alors A est fermé dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire, $A = \bar{A}$. En particulier, si $q' = 0$ alors A est auto-adjoint.

Dans le cas où $q \geqslant 0$ et $V \in L^r_{loc}(\Omega)$ (r défini dans (3)) Kato (Théorème II de [6]) démontre la convergence de la formule de Trotter :

$$(4)\qquad \forall\, u \in L^2(\Omega),\ \forall\, T > 0\ \ e^{-t\bar{A}}u = \lim\, (e^{\frac{t}{n}\Delta}\, e^{-\frac{t}{n}V})^n\, u,$$

uniformément en $t \in [0,T]$.

Dans le § 2 on détaille la démonstration du résultat présenté en [1] , c'est-à-dire, on généralise le résultat de Kato en démontrant la formule de Trotter sous les hypothèses plus faibles $q(x) \geqslant \alpha \in \mathrm{IR}$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, et simultanément on obtient une nouvelle démonstration, dans ce cas particulier, du résultat de Brézis et Kato (Théorème 1 ci-dessus).

Dans le § 3 on démontre un résultat similaire dans le cas où $q^- \neq 0$ vérifie l'hypothèse (1) et $q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$ ($\epsilon > 0$ arbitraire) : on obtient dans ce cas la formule (4) avec Δ remplacé par $\Delta + q^-$.

2. - CAS D'UN POTENTIEL A PARTIE REELLE BORNEE INFERIEUREMENT

On suppose que $q(x) \geqslant -\alpha \in \mathrm{IR}$ p.p. dans Ω ($V \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifie donc (1) et (2), car $q^- \in L^\infty(\Omega)$). On a alors le :

THEOREME 2.1. A *est fermable et* $\bar{A} + \alpha$ *est* m-*accrétif. Le semi-groupe fortement continu* $(e^{-t\bar{A}})_{t \geqslant 0}$ *engendré par* $\bar{A}$ *est donné par la formule de Trotter :*

$$\forall u \in L^2(\Omega), \forall T > 0, e^{-t\bar{A}} u = \lim (e^{\frac{t}{n}\Delta} e^{-\frac{t}{n}V})^n u \tag{5}$$

uniformément en $t \in [0,T]$ (*pour* $\| \, . \, \|_{L^2(\Omega)}$).

Démonstration du Théorème 2.1. On peut supposer $q \geqslant 0$; on s'y ramène en appliquant leThéorème à $q + \alpha$.

Première étape. A est accrétif. On suit [3] : on considère $u \in D(A)$ et on pose $T = V u$. Alors :

$$. \ T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$$

$$. \ \mathrm{Re}(T\bar{u}) = q \, |u|^2 \geqslant 0 \, ;$$

donc, d'après le résultat de [2], $q \, |u|^2 \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_\Omega q \, |u|^2 = \mathrm{Re} < T,u > = \mathrm{Re} < Au + \Delta u, u >$$

d'où :

$$\mathrm{Re}(Au,u) = \int_\Omega |Du|^2 + \int_\Omega q \, |u|^2 \geqslant 0.$$

Deuxième étape. Si $\lambda > 0$, $\mathrm{Im}(\lambda + A) \supset L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^{-1} u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{6}$$

On pose :

$$W_{t,\lambda} = t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^{-1} e^{t(\Delta-\lambda)} ;$$

d'après le Théorème spectral $e^{t(\Delta-\lambda)}$ admet un inverse (non borné) qu'on note $e^{t(\lambda-\Delta)}$. On démontre facilement le .

LEMME 2.1. *Soient* $(U_t)_{t>0}$, $(V_t)_{t>0}$ *des familles d'opérateurs bornés définis sur un espace de Banach* X, *tels que* U_t *admette un opérateur inverse (non borné)* U_t^{-1} *et que l'on ait :*

$$|U_t| \leqslant e^{-\lambda t}, \quad |V_t| \leqslant 1.$$

Alors $(U_t^{-1} - V_t)^{-1}$ *est un opérateur défini sur* X. *On a :*

$$(U_t^{-1} - V_t)^{-1} = (1 - U_t V_t)^{-1} U_t .$$

Si de plus $\lim_{t \to 0^+} U_t x = x$, *alors :*

$$\lim_{t \to 0^+} (t(1 - U_t V_t)^{-1} - t(U_t^{-1} - V_t)^{-1})x = 0.$$

Alors si on applique le Lemme 1 à $U_t = e^{t(\Delta - \lambda)}$, $V_t = e^{-tV}$, on a :

$$W_{t,\lambda} = t(e^{t(\lambda-\Delta)} - e^{-tV})^{-1}$$

$$\lim_{t \to 0^+} (t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^{-1} - W_{t,\lambda})u = 0$$

donc, pour montrer (6) il suffit de montrer :

$$W_{t,\lambda} u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{7}$$

Dans la suite on utilisera le :

LEMME 2.2. *a) Si* $v \in L^2(\Omega)$ *alors* $W_{t,\lambda} v \in H_o^1(\Omega)$ *et il existe* $C_\lambda > 0$ *tel que :*

$$\forall v \in L^2(\Omega) \; \| W_{t,\lambda} v \|_{H_o^1(\Omega)} \leqslant C_\lambda \| v \|_{L^2(\Omega)}$$

b) $\forall\, v \in L^2(\Omega)\ |W_{t,\lambda} v| \leqslant t(e^{t(\lambda-\Delta)} - 1)^{-1}\, |v|$ p.p. dans Ω.

c) $\forall\, v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\ \| W_{t,\lambda} v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda} \| v \|_{L^s(\Omega)}$ si $s = 2, \infty$.

(Démonstration à la fin du § 2).

On vérifie que pour montrer (7) il suffit d'avoir la convergence dans $L^2_{loc}(\Omega)$. En effet pour tout compact K de Ω :

$$. \ \| W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \|_{L^2(K)} +$$

$$+ \| (\lambda + A)^{-1} u \|_{L^2(\Omega \setminus K)} + \| W_{t,\lambda} u \|_{L^2(\Omega \setminus K)},$$

et d'après le Lemme 2.b) :

$$\| W_{t,\lambda} u \|_{L^2(\Omega \setminus K)} \leqslant \| t(e^{t(\lambda - \Delta)} - 1)^{-1} |u| \|_{L^2(\Omega \setminus K)}.$$

Donc, comme :

$$t(e^{t(\lambda - \Delta)} - 1)^{-1} |u| \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} (\lambda - \Delta)^{-1} |u| \text{ dans } L^2(\Omega)$$

la convergence de $W_{t,\lambda} u$ vers $(\lambda + A)^{-1} u$ dans $L^2_{loc}(\Omega)$ entraîne :

$$\limsup_{t \to 0^+} \| W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| (\lambda + A)^{-1} u \|_{L^2(\Omega \setminus K)} +$$

$$+ \| (\lambda - \Delta)^{-1} |u| \|_{L^2(\Omega \setminus K)}$$

pour tout compact K de Ω. On peut donc conclure :

$$\limsup_{t \to 0^+} \| W_{t,\lambda} u - (\lambda + A)^{-1} u \|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

d'où (7). D'après le Théorème de Rellich il suffit donc de montrer qu'on a :

(8) $$W_{t,\lambda} u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } H^1_o(\Omega) \text{ faible.}$$

Soit $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; d'après le Lemme 2.a), si $t'_n \underset{n}{\longrightarrow} 0^+$, on peut extraire une sous-suite w_{t_n} de $w_{t'_n} = W_{t'_n,\lambda} u$ telle que :

(9) $$w_{t_n} \underset{n}{\longrightarrow} w \text{ dans } H^1_o(\Omega) \text{ faible et p.p. dans } \Omega.$$

On va montrer que $w = (\lambda + A)^{-1} u$. On a :

$$t_n^{-1}(1 - e^{t_n(\Delta-\lambda)} e^{-t_n V})w_{t_n} = e^{t_n(\Delta-\lambda)} u,$$

donc, pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, si on note $(.\,,.)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$:

$$(10)\qquad \left(\frac{1-e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n}, \phi\right) + \left(\frac{1-e^{t_n(\Delta-\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V} w_{t_n}, \phi\right) = (e^{t_n(\Delta-\lambda)} u, \phi)$$

d'après (9) :

$$.\ \frac{1-e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi} \xrightarrow[n]{} V w \bar{\phi} \text{ p.p. dans } \Omega$$

d'autre part :

$$.\left|\frac{1-e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi}\right| \leqslant \lambda^{-1} \| u \|_{L^\infty(\Omega)} |V| |\phi|,$$

d'après le Lemme 2.c). Etant donné que $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, le Théorème de Lebesgue donne :

$$(11)\quad V w \bar{\phi} \in L^1(\Omega) \text{ et } \left(\frac{1-e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n}, \phi\right) = \int_\Omega \frac{1-e^{-t_n V}}{t_n} w_{t_n} \bar{\phi} \xrightarrow[n]{} \int_\Omega V w \bar{\phi}.$$

De plus :

$$e^{-t_n \bar{V}} \frac{1-e^{t_n(\Delta-\lambda)}}{t_n} \phi \xrightarrow[n]{} (\lambda - \Delta)\phi \text{ dans } L^2(\Omega) :$$

donc, puisque $w_{t_n} \xrightarrow[n]{} w$ dans $L^2(\Omega)$ faible :

$$(12)\quad \left(\frac{1-e^{t_n(\Delta-\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V} w_{t_n}, \phi\right) = \left(w_{t_n}, e^{-t_n \bar{V}} \frac{1-e^{t_n(\Delta-\phi)}}{t_n} \phi\right) \xrightarrow[n]{} (w, (\lambda-\Delta)\phi).$$

Finalement :

$$(13)\qquad (e^{t_n(\Delta-\lambda)} u, \phi) \xrightarrow[n]{} (u, \phi)$$

On obtient alors de (10) - (13), $V w \in L^1_{loc}(\Omega)$ et :

$$.\ \langle V w + (\lambda - \Delta)w, \bar{\phi} \rangle_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}} = \langle u, \bar{\phi} \rangle_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}}.$$

Donc, dans $\mathscr{D}'(\Omega)$:

$$-\Delta w + V w = u - \lambda w \in L^2(\Omega) ;$$

par conséquent $w \in D(A)$ et :

$$w = (\lambda + A)^{-1} u.$$

w étant indépendant de la sous-suite t_n, on déduit (8) de (9), ce qui termine la deuxième étape.

Troisième étape. D(A) est dense dans $L^2(\Omega)$. Soit $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et t_n une suite de réels positifs vérifiant :

$$(14) \qquad nt_n \underset{n}{\longrightarrow} 0^+ \text{ et } \| W_{t_n,n}u - (n + A)^{-1} u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

D'après le Lemme 2.c), on a :

$$\| n\, W_{t_n,n}u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^2(\Omega)},$$

donc, pour une sous-suite, on a :

$$u_n = n\, W_{t_n,n}u \underset{n}{\longrightarrow} f \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

On va montrer que $f = u$, ce qui, d'après (14) prouvera la densité de D(A) dans $L^2(\Omega)$. D'après la définition de $W_{t_n,n}$ on a pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$(15) \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n}\, u_n, \phi\right) + \left(u_n, e^{-t_n \bar{V}}\, \frac{1 - e^{t_n(\Delta - n)}}{n\, t_n}\, \phi\right) = (e^{t_n(\Delta - n)} u, \phi)$$

mais du Lemme 2.c) on déduit que :

$$\| u_n \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^\infty(\Omega)},$$

donc :

$$(16) \qquad \left| \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{-t_n V}}{t_n}\, u_n, \phi\right)\right| \leqslant \frac{1}{n} \int_\Omega |V|\, |\phi|\, \| u \|_{L^\infty(\Omega)} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

d'autre part :

$$(17) \qquad \frac{1 - e^{t_n(\Delta - n)}}{nt_n}\, \phi = \frac{1 - e^{-nt_n}}{nt_n}\, \phi + \frac{e^{-nt_n}}{n}\, \frac{1 - e^{t_n \Delta}}{t_n}\, \phi \underset{n}{\longrightarrow} \phi,$$

dans $L^2(\Omega)$, et évidemment :

$$(18) \qquad (e^{t_n(\Delta - n)} u, \phi) \underset{n}{\longrightarrow} (u, \phi)$$

de (15) - (18) on déduit donc que :

$$\forall\, \phi \in \mathscr{D}(\Omega) < f,\bar{\phi} >_{\mathscr{D}'\times\mathscr{D}} = < u,\bar{\phi} >_{\mathscr{D}'\times\mathscr{D}}, \text{ d'où } f = u.$$

Quatrième étape. Conclusion. D'après les étapes 2 et 3 et le Théorème 3.4 de [5] A est fermable et $\bar{A}$ m-accrétif. La démonstration de (5) repose alors sur un Lemme de Chernoff (Théorème 1.1 de [4]), d'après lequel il suffit de montrer que :

$$(*) \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega) \;\; t(1 - e^{t(\Delta-1)}\, e^{-tV})^{-1}\, u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (1 + A)^{-1}\, u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Or :

$$\| t(1 - e^{t(\Delta-1)}e^{-tV})^{-1} \|_{\mathscr{L}(L^2)} = \left\| t \sum_{n\geqslant 0} (e^{t(\Delta-1)}e^{-tV})^n \right\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leqslant$$

$$\leqslant t \sum_{n\geqslant 0} e^{-nt} = \frac{t}{1 - e^{-t}} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

Les opérateurs du premier membre de (6) sont donc uniformément bornés en norme pour $t \to 0^+$; $L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ étant dense dans $L^2(\Omega)$, la deuxième étape permet alors de déduire (*). ■

Démonstration du Lemme 2.

a) Soit $v \in L^2(\Omega)$, alors :

$$W_{t,\lambda} v = t(e^{t(\lambda-\Delta)} - e^{-tV})^{-1}\, v \in D(e^{t(\lambda-\Delta)}) \subset \mathrm{Im}(e^{t\Delta}) \subset D(\Delta) \subset H_0^1(\Omega)$$

et :

$$v = t^{-1}(e^{t(\lambda-\Delta)} - e^{-tV})W_{t,\lambda}\, v\,;$$

par conséquent :

$$\left(\frac{e^{t(\lambda-\Delta)} - 1}{t}\, W_{t,\lambda}\, v, W_{t,\lambda}\, v\right) + \left(\frac{1 - e^{-tV}}{t}\, W_{t,\lambda}\, v, W_{t,\lambda}\, v\right) = (v, W_{t,\lambda}\, v).$$

Or, d'après le Théorème spectral et puisque $W_{t,\lambda}\, v \in D(\Delta)$:

$$\left(\frac{e^{t(\lambda-\Delta)} - 1}{t}\, W_{t,\lambda}\, v, W_{t,\lambda}\, v\right) \geqslant ((\lambda-\Delta)W_{t,\lambda}\, v, W_{t,\lambda}\, v) \geqslant C'_\lambda \,\| W_{t,\lambda}\, v \|^2_{H_0^1(\Omega)}\,;$$

d'autre part, de Re $V \geqslant 0$ on déduit :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{-tV}}{t}\, W_{t,\lambda}\, v, W_{t,\lambda}\, v\right) \geqslant 0.$$

Il en résulte :

$$\| W_{t,\lambda}\, v \|_{H^1_o(\Omega)} \leqslant C_\lambda \| v \|_{L^2(\Omega)}.$$

b) On a :

$$W_{t,\lambda}\, v = t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)}\, e^{-tV})^{-1}\, e^{t(\Delta-\lambda)} v = t \sum_{n \geqslant 0} (e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^n\, e^{t(\Delta-\lambda)} v$$

(série convergente dans $L^2(\Omega)$) ; or :

$$\forall\, f \in L^2(\Omega) : | e^{t\Delta} f | \leqslant e^{t\Delta} | f | \text{ p.p. dans } \Omega,$$

donc :

$$| W_{t,\lambda}\, v | \leqslant t \sum_{t \geqslant 0} e^{(n+1)t(\Delta-\lambda)} | v | = t(1 - e^{t(\Delta-\lambda)})^{-1}\, e^{t(\Delta-\lambda)} | v | =$$

$$= t(e^{-t(\lambda-\Delta)} - 1)^{-1} | v | .$$

c) Si $v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $p = 2, \infty$, on a :

$$\| e^{t\Delta} v \|_{L^p(\Omega)} \leqslant \| v \|_{L^p(\Omega)}$$

donc :

$$\| W_{t,\lambda}\, v \|_{L^p(\Omega)} \leqslant t \sum_{n \geqslant 0} \| (e^{t(\Delta-\lambda)} e^{-tV})^n\, e^{t(\Delta-\lambda)} v \|_{L^p(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant t \sum_{n \geqslant 0} e^{-(n+1)t\lambda} \| v \|_{L^p(\Omega)} = \frac{t\, e^{-t\lambda}}{1 - e^{-t\lambda}} \| v \|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} \| v \|_{L^p(\Omega)} . \ \blacksquare$$

3. - CAS D'UN POTENTIEL A PARTIE REELLE NON BORNEE INFERIEUREMENT

On examine maintenant un cas où on n'a pas nécessairement $q^- \in L^\infty(\Omega)$. On supposera que $N \geqslant 2$, q^- vérifiant l'hypothèse (1), c'est-à-dire :

$$(1) \qquad . \; q^- \in L^\infty(\Omega) + L^p(\Omega) \quad \text{où} \quad \begin{cases} p = \dfrac{N}{2} \text{ si } N \geqslant 3 \\ \\ p > 1 \quad \text{si } N = 2, \end{cases}$$

et qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$(2) \qquad . \; q' \in L^{1+\epsilon}(\Omega),$$

le Théorème 1.1 est donc applicable à l'opérateur de Schrödinger avec un tel potentiel. Cependant, si $q^- \in L^\infty(\Omega)$ l'opérateur de multiplication par e^{-tV} n'est pas borné dans $L^2(\Omega)$ ce qui exclut la validité de la formule (4) pour cet opérateur. Ceci nous amène à scinder le potentiel, en posant :

$$. \; B = -\Delta - q^-, \text{ l'opérateur A avec } V = q^-,$$

$$. \; V' = q^+ + iq'$$

On peut maintenant espérer que soit valable une formule de Trotter :

$$\forall u \in L^2(\Omega) e^{-t\bar{A}} u = \lim_n \left(e^{-\frac{t}{n} B} \, e^{-\frac{t}{n} V'} \right)^n u$$

On démontrera cette formule, tout en présentant, comme dans le § 2, une nouvelle démonstration du Théorème 1.1, dans ce cas particulier.

On commence par rappeler le résultat suivant de [3] qui caractérise la constante λ_1 du Théorème 1.1 et qui repose sur l'inégalité de Sobolev dans $H_0^1(\Omega)$:

PROPOSITION 3.1. *Pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\lambda_\epsilon > 0$ *tel que :*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega q^- |u|^2 \leqslant \epsilon \int_\Omega |Du|^2 + \lambda_\epsilon \int_\Omega |u|^2$$

On en déduit alors, pour l'opérateur B, la conclusion du Théorème 1.1 qui admet dans ce cas une formulation plus précise.

PROPOSITION 3.2. $B + \lambda_1$ *est l'opérateur auto-adjoint positif dans* $L^2(\Omega)$ *qui est associé à la forme sesquilinéaire à domaine* $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega Du\,\overline{Dv} - \int_\Omega q^- u\,\overline{v} + \int_\Omega \lambda_1\, u\,\overline{v},$$

laquelle est un produit scalaire sur H_0^1 *équivalent au produit scalaire usuel.*

B est donc le générateur d'un semi-groupe fortement continue $(e^{-tB})_{t\geqslant 0}$ et on a le :

THEOREME 3.1. A *est fermable et* $\overline{A} + \lambda_1$ *est* m*-accretif. Le semi-groupe fortement continu engendré par* A *est donné par la formule de Trotter :*

$$\forall\, u \in L^2(\Omega),\ \forall\, T > 0,\ e^{-tA} u = \lim_n \left(e^{-\frac{t}{n}B}\, e^{-\frac{t}{n}V'}\right)^n u, \tag{19}$$

uniformément en $t \in [0,T]$ (*pour* $\|\,.\,\|_{L^2(\Omega)}$).

Démonstration du Théorème 3.1. La démonstration suit le schéma de celle du Théorème 2.1.

Première étape. A est accrétif. On procède comme dans le cas du § 2 ; on utilise le résultat de [2] , avec, cette fois-ci :

$$f = -q^- |u|^2 \in L^1(\Omega) \ \ (\text{pour } u \in D(A) \ \subset\ H_0^1(\Omega)),$$

d'après la proposition 3.1.

Deuxième étape. Il existe λ_ϵ tel que si $\lambda > \lambda_\epsilon$ alors $\mathrm{Im}(\lambda + A) \supset L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour $u \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$t(1 - e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^{-1} u \ \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}\ (\lambda + A)^{-1} u \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{20}$$

On pose :

$$W_{t,\lambda} = t(1 - e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^{-1} e^{-t(B+\lambda)} ;$$

d'après le Théorème spectral $e^{-t(B+\lambda)}$ admet un opérateur inverse (non borné) qu'on note $e^{t(B+\lambda)}$. On peut donc appliquer le Lemma 2.1 à $U_t = e^{-t(B+\lambda)}$, $V_t = e^{-tV'}$, ce qui donne :

$$W_{t,\lambda} = t(e^{t(B+\lambda)} - e^{-tV'})^{-1},$$

et pour montrer (2) il suffit de montrer :

(21) $$W_{t,\lambda}\, u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (\lambda + A)^{-1}\, u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Afin d'établir des estimations sur $W_{t,\lambda}\, u$ on commence par montrer quelques propriétés de l'opérateur B. On rappelle, en le précisant, un résultat de [3] (Théorème 2.3) ; dans la suite on supposera toujours que $\lambda > \lambda_1$.

PROPOSITION 3.3. *Pour chaque* $s \in [2, +\infty[$ *il existe* $\alpha_s > 0$ *tel que si* $g \in L^2(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ *et* Ψ *est l'unique solution dans* $H_0^1(\Omega)$ *de :*

$$-\Delta\Psi - q^-\,\Psi + \lambda\,\Psi = g \quad \textit{dans}\ \Omega\ (\lambda > \lambda_1)\ ;$$

alors :

1. si g *est réelle,* Ψ *est réelle ; si* $g \geqslant 0$ p.p. *dans* Ω, $\Psi \geqslant 0$ p.p. *dans* Ω.

2. $\Psi \in L^s(\Omega)$ *et si* $\lambda > \alpha_s$:

(22) $$\|\Psi\|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \|g\|_{L^s(\Omega)}$$

Démonstration de la Proposition 3.3.

1. De l'unicité on déduit que si g est réelle, alors Ψ est réelle. Si $g \geqslant 0$, on procède comme dans [3] ; en multipliant l'équation par $-\Psi^-$, on obtient :

$$\int_\Omega |D\Psi^-|^2 - \int_\Omega q^-\,|\Psi^-|^2 + \lambda \int_\Omega |\Psi^-|^2 \leqslant 0,$$

donc, si $\lambda > \lambda_1$, cela implique $\Psi^- = 0$.

2. On peut toujours supposer que $g \geqslant 0$ p.p. dans Ω ; en effet, si $\tilde{\Psi}$ est la solution correspondante à $|g|$ on a :

$$|\Psi| \leqslant \tilde{\Psi} \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

(il suffit de remarquer que pour tout $\eta \in R$ $\mathrm{Re}(e^{i\eta}\,\Psi)$ est la solution correspondante à $\mathrm{Re}(e^{i\eta}\, g)$ car si on note $\phi_{\eta,+}$, $\phi_{\eta,-}$ les solutions respectivement correspondantes à $\mathrm{Re}(e^{i\eta}\, g)^+$, $\mathrm{Re}(e^{i\eta}\, g)^-$ on a $\phi_{\eta,+}, \phi_{\eta,-} \geqslant 0$ p.p. et :

$$|\Psi(x)| = \sup_{\eta \in R} |\mathrm{Re}(e^{i\eta}\,\Psi(x))| = \sup_{\eta \in R} |\phi_{\eta,+}(x) - \phi_{\eta,-}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\eta \in R} (\phi_{\eta,+}(x) + \phi_{\eta,-}(x)) \leqslant \tilde{\Psi}$$

puisque $\phi_{\eta,+} + \phi_{\eta,-}$ est la solution correspondante à $|\operatorname{Re}(e^{i\eta} g)| \leqslant |g|$, et d'après 1.).

On reprend alors la méthode suivie dans [3]. Pour chaque $k \in \mathbb{N}_1$ on note :

$$. \; q_k^- = \min(q^-, k)$$

et on résout dans $H_0^1(\Omega)$:

$$-\Delta \Psi_k - q_k^- \Psi_k + \lambda \Psi_k = g \geqslant 0 \quad \text{p.p.} ; \tag{23}$$

Alors $\Psi_k \geqslant 0$ p.p.. Pour simplifier on note $\Psi = \Psi_k$ et on pose maintenant :

$$. \; \phi_n = \min(\Psi, n), \text{ pour } n \in N_1 .$$

On multiplie (23) par ϕ_n^{r-1} $(2 \leqslant r \leqslant s)$ et on intègre par parties :

$$\begin{aligned} \frac{4(r-1)}{r^2} \int_\Omega \left| D(\phi_n^{\frac{r}{2}}) \right|^2 + \lambda \int_{[\Psi \leqslant n]} \frac{r}{n} &\leqslant \| g \|_{L^r} \| \phi_n \|_{L^r}^{r-1} + \\ &+ \epsilon \| D(\phi_n^{\frac{r}{n}}) \|_{L^2}^2 + \lambda_\epsilon \| \phi_n \|_{L^r}^r + k \int_{[\Psi > n]} \Psi^r \end{aligned} \tag{24}$$

(où on s'est servi de la Proposition 3.1) ; si on choisit $\epsilon > 0$, $\epsilon < \dfrac{4(r-1)}{r^2}$ on en déduit, d'après l'inégalité de Sobolev (si $N \geqslant 3$) :

$$\| \phi_n \|^2_{L^{r\frac{2^*}{2}}} \leqslant C_r \quad \| g \|_{L^r}^r + \| \Psi \|_{L^r}^r \quad + k \int_{[\Psi > n]} \Psi^r$$

(où $\dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N}$), donc si on suppose $\Psi \in L^r(\Omega)$ on peut passer à la limite en n ce qui donne :

$$\Psi \in L^{r\frac{2}{2^*}}(\Omega)$$

en itérant ce processus à partir de r = 2 on obtient $\Psi_k \in L^{s\frac{2^*}{2}}(\Omega)$, donc a fortiori $\Psi_k \in L^s(\Omega)$. Si $N = 2$ on a $\Psi_k \in H_0^1(\Omega) \subset \bigcap_{\substack{r \geqslant 2 \\ \neq \infty}} L^r$.

On revient maintenant à (24) ; si on choisit maintenant $\epsilon = \dfrac{4(r-1)}{r^2}$, on en déduit (pour r = s) :

$$\lambda \int_{[\Psi \leqslant n]} \leqslant \| g \|_{L^s} \| \phi_n \|_{L^s}^{s-1} + \lambda_\epsilon \| \phi_n \|_{L^s}^s + k \int_{[\Psi > n]} \Psi^r .$$

Comme $\Psi \in L^s(\Omega)$, on obtient, en passant à la limite en n :

$$\lambda \int_\Omega \Psi^s \leqslant \| g \|_{L^s} \| \Psi \|_{L^s}^{s-1} + \lambda_\epsilon \| \Psi \|_{L^s}^s$$

donc, si on pose :

$$. \ \alpha_s = \lambda_\epsilon,$$

on obtient :

$$. \ \| \Psi_k \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \| g \|_{L^s(\Omega)}$$

mais en multipliant (23) par Ψ_k on montre facilement d'après la Proposition 3.1 que :

$$\Psi_k \xrightarrow[k]{H_o^1(\Omega)} \Psi$$

donc

$$\| \Psi \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \| g \|_{L^s(\Omega)} . \blacksquare$$

COROLLAIRE. *a) Pour tout* $v \in L^2(\Omega)$ $| e^{-tB} v | \leqslant e^{-tB} | v |$.

b) Pour tout $s \in [2,+\infty[$, $v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *on a* $e^{-tB} v \in L^s(\Omega)$ *et :*

$$\| e^{-tB} v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant e^{t\alpha_s} \| v \|_{L^s(\Omega)} \tag{25}$$

Démonstration du Corollaire. Il suffit d'appliquer la formule exponentielle :

$$e^{-t(B + \alpha_s)} v = \lim \ (1 + \frac{1}{n} (B + \alpha_s))^{-n} v \ \text{ dans } L^2(\Omega) ;$$

d'après ce qu'on a vu dans la démonstration de la Proposition 3.3-2, on a :

$$| (1 + \frac{1}{n} (B + \alpha_s))^{-n} v | \leqslant (1 + \frac{1}{n} (B + \alpha_s))^{-n} | v | \ \text{ p.p. dans } \Omega$$

ce qui montre a). En utilisant (22) on obtient :

$$v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \Rightarrow (1 + \frac{1}{n} (B + \alpha_s))^{-n} v \in L^s(\Omega) \ \ \forall s \in [2,+\infty[$$

et

$$\| (1 + \frac{1}{n} (B + \alpha_s))^{-n} v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \| v \|_{L^s(\Omega)} \ \text{ d'où b). } \blacksquare$$

On se servira dans la suite du :

LEMME 3.1. *a) Si* $v \in L^2(\Omega)$, *alors* $W_{t,\lambda} \in H_o^1(\Omega)$ *et il existe* $C_\lambda > 0$ *tel que :*

$$\forall\, v \in L^2(\Omega)\ \| W_{t,\lambda} v \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_\lambda \| v \|_{L^2(\Omega)}$$

b) Si $v \in L^2(\Omega)$:

$$\mathrm{Re} \int_\Omega \frac{1 - e^{-tV'}}{t} \,|W_{t,\lambda} v|^2 \leqslant C_\lambda^2 \| v \|^2_{L^2(\Omega)}$$

c) $\forall\, v \in L^2(\Omega)$, $|W_{t,\lambda} v| \leqslant t(e^{t(B+\lambda)} - 1)^{-1} \,|v|$ p.p. *dans* Ω.

d) Si $s \in [2,+\infty[$ *et* $\lambda > \alpha_s$, *alors* $\forall\, v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$.\ W_{t,\lambda} v \in L^s(\Omega)$$

$$.\ \| W_{t,\lambda} v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \alpha_s} \| v \|_{L^s(\Omega)}$$

Démonstration du Lemme 3.1. a), b). Si $v \in L^2(\Omega)$ on a :

$$W_{t,\lambda} v = t(e^{t(\lambda + B)} - e^{-tV'})v \in D(e^{t(\lambda + B)}) \subset \mathrm{Im}(e^{-tB}) \subset D(B) \subset H_o^1(\Omega)$$

d'après la Proposition 3.2) ; on peut donc reproduire la démonstration du Lemme 2.3-1) et obtenir (en utilisant la Proposition 3.2) :

$$C'_\lambda \| W_{t,\lambda} v \|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant ((\lambda + B) W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v) \leqslant \left(\frac{e^t(B + \lambda) - 1}{t} W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v, W_{t,\lambda} v \right)$$

d'où :

$$C'_\lambda \| W_{t,\lambda} v \|^2_{H^1(\Omega)} + \mathrm{Re} \int_\Omega \frac{1 - e^{-tV'}}{t} \,|W_{t,\lambda} v|^2 \leqslant \mathrm{Re}(v, W_{t,\lambda} v) \leqslant$$

$$\leqslant \| v \|_{L^2(\Omega)} \| W_{t,\lambda} v \|_{H^1(\Omega)}$$

ce qui permet de conclure.

c) En utilisant a) du corollaire précédent il suffit de reproduire la démonstration du lemme 2.3-b).

d) On a :

$$W_{t,\lambda}\, v = t \sum_{n\geqslant 0} (e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^n e^{-t(B+\lambda)} v$$

(convergence dans $L^2(\Omega)$)

alors si $v \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $s \in [2,+\infty[$, d'après (25) :

$$\| (e^{-t(B+\lambda)} e^{-tV'})^n e^{-t(B+\lambda)} v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant e^{(n+1)(\alpha_s-\lambda)t} \| v \|_{L^s(\Omega)}$$

donc, si $\lambda > \alpha_s$ on a bien $W_{t,\lambda}\, v \in L^s(\Omega)$ et :

$$\| W_{t,\lambda}\, v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{t\, e^{(\alpha_s-\lambda)t}}{1-e^{(\alpha_s-\lambda)t}} \| v \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda-\alpha_s} \| v \|_{L^s(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

On revient maintenant à la démonstration de (21) ; comme dans la démonstration du Théorème 2.1, en utilisant maintenant le Lemme 3.1-a), c) on se ramène à vérifier que si :

$$w_{t_n} = W_{t_n,\lambda} u \xrightarrow[n]{} w \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible et p.p.}$$

pour une suite $t_n \xrightarrow[n]{} 0^+$ et pour λ assez grand, alors nécessairement :

$$w = (\lambda + A)^{-1}\, u.$$

On a évidemment une formule analogue à (10) ; c'est-à-dire, pour tout $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$(26) \quad \left(\frac{1-e^{-t_nV'}}{t_n} w_{t_n}, \phi\right) + \left(\frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_nV'} w_{t_n}, \phi\right) = (e^{-t_n(B+\lambda)} u, \phi).$$

Or :

$$\left(\frac{1-e^{-t_nV'}}{t_n} w_{t_n}, \phi\right) = \int_\Omega \frac{1-e^{-t_nq^+}\cos(t_nq')}{t_n} w_{t_n} \overline{\phi} + i \int_\Omega e^{-t_nq^+} \frac{\sin(t_nq')}{t_n} w_{t_n} \overline{\phi}$$

mais :

$$\cdot \left| e^{-t_nq^+} \frac{\sin(t_nq')}{t_n} \overline{\phi} \right| \leqslant |q'|\ |\phi| \in L^{1+\epsilon}(\Omega)$$

$$\cdot\ e^{-t_nq^+} \frac{\sin(t_nq')}{t_n} \overline{\phi} \xrightarrow[n]{} q'\overline{\phi} \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

donc le théorème de Lebesgue donne :

$$. \ e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} \overline{\phi} \underset{n}{\longrightarrow} q'\overline{\phi} \text{ dans } L^{1+\epsilon}(\Omega)$$

d'autre part si on pose $s = (1+\epsilon)' = 1 + \frac{1}{\epsilon} \geqslant 2$ (on peut supposer $\epsilon \leqslant 1$), on a d'après le Lemme 3.1-d), que si $\lambda > \lambda_\epsilon = \alpha_s$:

$$\| w_{t_n} \|_{L^s(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\lambda - \lambda_\epsilon} \| u \|_{L^s(\Omega)}$$

donc, au moins pour une sous-suite :

$$. \ w_{t_n} \underset{n}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^{(1+\epsilon)'}(\Omega) \text{ faible}$$

ceci implique que :

$$(27) \qquad \begin{aligned} & i \int_\Omega e^{-t_n q'} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} w_{t_n} \overline{\phi} = \\ & = i < e^{-t_n q^+} \frac{\sin(t_n q')}{t_n} \overline{\phi}, w_{t_n} >_{L^{1+\epsilon}(\Omega) \times L^{(1+\epsilon)'}(\Omega)} \\ & \underset{n}{\longrightarrow} i \ < q'\overline{\phi}, w >_{L^{1+\epsilon}(\Omega) \times L^{(1+\epsilon)'}(\Omega)} = i \int_\Omega q' w \overline{\phi} \end{aligned}$$

D'autre part on a, par Lebesgue :

$$. \left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} \longrightarrow \sqrt{q^+} \quad \text{dans } L^2_{loc}(\Omega) \text{ fort ;}$$

on en déduit d'abord, d'après le Lemme 3.1 b), puisque $w_{t_n} \longrightarrow w$ dans $L^2(\Omega)$ faible, avec $\| w_{t_n} \|_{L^2} \leqslant C$:

$$. \left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} w_{t_n} \longrightarrow \sqrt{q^+}\, w \ \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible,}$$

au moins pour une sous-suite. Ensuite, on a donc :

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} & . \ q^+ w \in L^1_{loc}(\Omega) \\ & \operatorname{Re} \int_\Omega \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} w_{t_n} \phi = \left(\left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} w_{t_n} , \right. \\ & \qquad \left. , \left(\operatorname{Re} \frac{1 - e^{-t_n V'}}{t_n} \right)^{1/2} \phi \right) \\ & \longrightarrow (\sqrt{q^+}\, w, \sqrt{q^+}\, \phi) = \int_\Omega q^+ w \overline{\phi} \end{aligned} \right.$$

De (27) et (28) on déduit finalement que $V'w \in L^1_{loc}(\Omega)$ et :

$$(29) \qquad \left(\frac{1-e^{-t_n V'}}{t_n} w_{t_n}, \phi \right) \underset{n}{\longrightarrow} \int_\Omega V' w \bar{\phi} = < V'W, \bar{\phi} >_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}}$$

On a évidemment :

$$(30) \qquad (e^{-t_n(B+\lambda)} u, \phi) \underset{n}{\longrightarrow} (u, \phi),$$

et il ne nous reste qu'à examiner un des termes de (26) :

$$\left(\frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V'} w_{t_n}, \phi \right) = \left(w_{t_n}, e^{-t_n V'} \frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} \phi \right);$$

si $N \geq 4$ on a $q^- \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega) + L^\infty(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega)$, donc $\mathscr{D}(\Omega) \subset D(B)$ et :

$$e^{-t_n \overline{V'}} \frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} \phi \underset{n}{\longrightarrow} (B+\lambda)\phi \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Comme on a :

$$w_{t_n} \underset{n}{\longrightarrow} w \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible},$$

et d'après le Lemme 3.1 les $\| w_{t_n} \|_{L^2(\Omega)}$ sont bornées, on a :

$$(31)_a \qquad \left(\frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n} e^{-t_n V'} w_{t_n}, \phi \right) \underset{n}{\longrightarrow} (w, (B+\lambda)\phi) =$$

$$= < -\Delta w - q^- w + \lambda w, \bar{\phi} >_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}}$$

Dans les cas N = 2,3 on n'a pas nécessairement $q^- \in L^2_{loc}$; pour obtenir l'analogue de $(31)_a$ on se sert alors du Lemme suivant :

LEMME 3.2: *Pour chaque* $r \in \{ p, 2, p' \}$ *il existe* $\mu_r > 0$ *et un opérateur* B_r *dans* $L^r(\Omega)$ *tels que :*

1. $B_r + \mu_r$ *est m-accrétif dans* $L^r(\Omega)$.
2. $B_2 = B$.
3. *Si* $u \in L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, *alors* $e^{-tB} u = e^{-tB_r} u \; \forall \, t \geq 0$.
4. $\mathscr{D}(\Omega) \subset D(B_p)$ *et* $\forall \, \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $B_p \phi = -\Delta\phi - q^-\phi$.

(Démonstration à la fin de I-3).

On a donc :

$$e^{-t_nV'}\,\frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n}\,\bar{\phi}=e^{-t_nV'}\,\frac{1-e^{-t_n(B_p+\lambda)}}{t_n}\,\bar{\phi}\ \underset{n}{\longrightarrow}\ (B_p+\lambda)\bar{\phi}$$

dans $L^p(\Omega)$. D'autre part, d'après le Lemme 3.1-d), en augmentant au besoin λ_ϵ, on a pour $\lambda>\lambda_\epsilon$: $\| w_{t_n} \|_{L^{p'}}\leqslant C$, donc au moins pour une sous-suite :

$$w_{t_n}\underset{n}{\longrightarrow} w \quad \text{dans } L^{p'}(\Omega) \text{ faible,}$$

puisque $p<2 \Rightarrow p'>2$. Alors :

$$(31)_b \quad \left(\frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n}\, e^{-t_nV'}\, w_{t_n},\phi\right)=<w_{t_n},e^{-t_nV'}\,\frac{1-e^{-t_n(B+\lambda)}}{t_n}\,\bar{\phi}>_{L^{p'}\times L^p}$$

$$\underset{n}{\longrightarrow}\ <w,(B_p+\lambda)\bar{\phi}>_{L^{p'}\times L^p}=\int_\Omega w(-\Delta-q^-+\lambda)\bar{\phi}=<(-\Delta-q^-+\lambda)w,\bar{\phi}>_{\mathscr{D}'\times\mathscr{D}}.$$

En passant (26) à la limite en n, on obtient alors d'après (29) - (31) :

$$.\ V'w\in L^1_{loc}(\Omega)$$

$$.\ <-\Delta w-q^-w+V'w+\lambda w,\phi>_{\mathscr{D}'\times\mathscr{D}}=<u,\bar{\phi}>_{\mathscr{D}'\times\mathscr{D}'}$$

donc, dans $\mathscr{D}'(\Omega)$:

$$-\Delta w+Vw=u-\lambda w\in L^2(\Omega),$$

d'où : $w\in D(A)$, $(\lambda+A)w=u$, ce qui termine la deuxième étape.

Troisième étape. D(A) est dense dans $L^2(\Omega)$. On reproduit la troisième étape de la démonstration du Théorème 2.1 en remplaçant (14) par :

$$.\ nt_n\ \underset{n}{\longrightarrow}\ 0^+ \text{ et } \| W_{t_n,n+\alpha_s}u-(n+A+\alpha_s)^{-1}u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

et en se servant de l'estimation du Lemme 3.1-d) :

$$\| n\,W_{t_n,n+\alpha_s}u\|_{L^s(\Omega)}\leqslant \| u\|_{L^s(\Omega)},$$

avec $s=(1+\epsilon)'=1+\frac{1}{\epsilon}$, pour démontrer l'étape correspondante à (16).

Dans ce qui correspond à (17), on se sert des Lemmes 3.2, 3.1 quand N = 2,3, en augmentant au besoin α_s.

Quatrième étape. On conclut comme dans la démonstration du Théorème 2.1. On remarquera qu'il suffit de montrer (19) avec B remplacé par $B + \lambda_\epsilon$. ■

Démonstration du Lemme 3.2. On pose par définition :

$$. \ B_2 = B, \ \ \mu_2 = \lambda_1 .$$

Si r = p' on pose $\mu_r = \alpha_r$. D'après la Proposition 3.3, si on considère la résolvante de $B_2 + \mu_r$:

$$R_\lambda^{(2)} = \left(\frac{1}{\lambda}(B_2 + \mu_r) + 1\right)^{-1},$$

on a (estimation (22)) :

$$\| R_\lambda^{(2)} u \|_{L^r(\Omega)} \leq \| u \|_{L^r(\Omega)} \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega).$$

$R_\lambda^{(2)} /_{L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega)}$ se prolonge donc en une contraction $R_\lambda^{(r)}$ de $L^r(\Omega)$ qui en est la fermeture.

D'autre part $B /_{R_\lambda^{(2)}(L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega))}$ est fermable dans $L^r(\Omega)$; en effet si dans ce domaine $u_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, $Bu_n \underset{n}{\longrightarrow} f$ dans $L^r(\Omega)$, alors :

$$. \ -\Delta u_n \underset{n}{\longrightarrow} 0 \ \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega)$$

$$. \ q^- u_n \underset{n}{\longrightarrow} 0 \ \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega) \ (\text{puisque } r = p' \text{ et } q^- \in L^p_{loc}(\Omega))$$

donc :

$$Bu_n = -\Delta u_n - q^- u_n \underset{n}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega)$$

ce qui implique f = 0. On note B_r la fermeture de cet opérateur ; alors $R_\lambda^{(r)}$ est évidemment la résolvante de $B_r + \mu_r$ et cet opérateur est donc bien m-accrétif dans $L^{p'}(\Omega)$. D'autre part la formule exponentielle et la définition de $R_\lambda^{(p')}$ garantissent que :

$$\forall\, u \in L^2(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega) : e^{-tB_{p'}} u = e^{-tB} u.$$

Maintenant, la théorie de la dualité dans les semi-groupes donne :

$$. \ B_p^* + \mu_{p'} \ \ \text{est m-accrétif dans } L^p(\Omega).$$

$$. \ e^{-tB^*_{p'}} = (e^{-tB_{p'}})^*$$

on pose alors :

$$. \ B_p = B^*_{p'}, \ \mu_p = \mu_{p'}$$

(ici * désigne l'opérateur transposé dans la dualité $< L^p, L^{p'} >$). Mais si $u \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, on a, pour tout $v \in L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega)\ (\supset \mathscr{D}(\Omega))$:

$$< e^{-tB_p} u, v >_{L^p \times L^{p'}} = < u, e^{-tB_{p'}} v >_{L^p \times L^{p'}} = < u, e^{-tB_2} v >_{L^p \times L^{p'}} =$$

$$= \int_\Omega u(e^{-tB_2} v) = \int_\Omega (e^{-tB_2} u) v,$$

donc :

$$. \ e^{tB_2} u \in L^p(\Omega) \ \text{ et } \ e^{-tB_p} u = e^{-tB} u.$$

Montrons finalement que $\mathscr{D}(\Omega) \subset D(B_p)$. Comme $B_p = B^*_{p'}$, par définition de $B_{p'}$ on a a fortiori :

$$B_p = \left(B_{/ R_\lambda^{(2)} (L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega))} \right)^*$$

mais si $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $v \in R_\lambda^{(2)} (L^{p'}(\Omega) \cap L^2(\Omega))$, on a :

$$< \phi, Bv >_{L^p \times L^{p'}} = \int_\Omega \phi(-\Delta v - q^- v) =$$

$$= \int_\Omega v \underbrace{(-\Delta\phi - q^-\phi)}_{\in L^p} = < -\Delta\phi - q^-\phi, v >_{L^p \times L^{p'}}$$

d'où :

$$. \ \phi \in D(B_p)$$

$$. \ B_p \phi = -\Delta\phi - q^-\phi. \ \blacksquare$$

Remarques. 1) Dans le cas $N = 1$ si on suppose $q^- \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$ avec les hypothèses supplémentaires $q^-, q' \in L^{1+\epsilon}_{loc}(\Omega)$ (pour un $\epsilon > 0$), la démonstration précédente est évidemment valable.

2) Il serait aussi intéressant d'analyser le cas où on suppose seulement $q' \in L^1_{loc}(\Omega)$ et en plus de l'hypothèse (1) l'autre alternative de l'hypothèse (2), c'est-à-dire, si $N \geqslant 2$:

$$q^- \in L^{\frac{N}{2}+\epsilon}_{loc}(\Omega) \quad (\text{pour un certain } \epsilon > 0)\ ;$$

nos méthodes ne s'adaptent pas directement à ce cas là.

REFERENCES

[1] A. BIVAR-WEINHOLTZ, R. PIRAUX. *«Formule de Trotter pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel singulier complexe».* C.R. Acad. Sc. Paris, 288, Série A, 1979, p. 539-542.

[2] H. BREZIS, F. BROWDER. *«Sur une propriété des espaces de Sobolev».* C.R. Acad. Sc. Paris, 287, Série A, 1978, p. 113-115.

[3] H. BREZIS, T. KATO. *«Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials».* J. Math. Pures et Appl. 58, 1979, p. 137-151.

[4] P.R. CHERNOFF. *«Product formulas, non linear semigroups, and addition of unbounded operators».* Mem. An. Math. Society, n^{o} 140 (1974).

[5] T. KATO. *«Perturbation Theory for linear operators».* Springer-Verlag (2nd edition - 1976).

[6] T. KATO. *«On some Schrödinger operators with a singular complex potential».* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 5 (1978), p. 105-114.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1981)