ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JOSÉ-FRANCISCO RODRIGUES

Sur le comportement asymptotique de la solution et de la frontière libre d'une inéquation variationnelle parabolique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 4, nº 3-4 (1982), p. 263-279

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_3-4_263_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol IV, 1982, P. 263 à 279

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION ET DE LA FRONTIERE LIBRE D'UNE INEQUATION VARIATIONNELLE PARABOLIQUE

José-Francisco Rodrigues (1)

(1) C.M.A.F. 2, av. Prof. Gama Pinto, 1699 Lisboa Codex - Portugal.

Résumé : On étudie le comportement asymptotique à l'infini de la solution d'une inéquation variationnelle parabolique avec une condition de Dirichlet dépendante du temps. On donne aussi des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique de la frontière libre d'évolution, dans la distance de Hausdorff, par rapport à la frontière libre stationnaire de l'inéquation variationnelle elliptique correspondante.

Summary : We study the asymptotic behaviour of the solution of a parabolic variational inequality with Dirichlet boundary condition depending on time. We give sufficient conditions to the asymptotic stability of the evolution free boundary, in the Hausdorff distance, with respect to the stationary free boundary of the corresponding elliptic variational inequality.

1. - INTRODUCTION

Considérons le problème classique suivant

(1.1) $$u_t - \Delta u = f \qquad (x \in \Omega,\ t > 0)$$

(1.2) $$u(x,t) = g(x,t) \qquad (x \in \Gamma,\ t > 0)$$

(1.3) $$u(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \overline{\Omega})$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega = \Gamma$ régulière et Δ est le laplacian. Il est bien connu (cf. par exemple [F1]) que si $f(x,t) \to f_\infty(x)$ (resp. $g(x,t) \to g_\infty(x)$) uniformément dans $\bar{\Omega}$ (resp. dans Γ) lorsque $t \to \infty$, alors la solution $u(x,t)$ de (1.1) (1.3) converge uniformément dans $\bar{\Omega}$ vers $u_\infty(x)$, solution de

$$(1.4) \qquad -\Delta u_\infty = f_\infty \qquad (x \in \Omega)$$

$$(1.5) \qquad u_\infty(x) = g_\infty(x) \qquad (x \in \Gamma).$$

Pour une inéquation variationnelle parabolique du type

$$(1.6) \qquad u \geqslant 0, \quad (u_t - \Delta u)(v-u) \geqslant f(v-u) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, t>0, \quad \forall\, v \geqslant 0$$

avec les conditions aux limites (1.2) et (1.3), on montre dans la section 2, qu'on a une situation analogue, sous des hypothèses un peu différentes, étant u convergente vers la solution de l'inéquation elliptique

$$(1.7) \qquad u_\infty \geqslant 0, \quad -\Delta u_\infty(v-u_\infty) \geqslant f_\infty(v-u_\infty) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall\, v \geqslant 0$$

avec la condition de Dirichlet (1.5).

L'inéquation (1.6) traduit un problème à frontière libre pour l'équation de la chaleur (1.1), c'est-à-dire, la région Ω est partagée en deux sous-régions : $\Omega_+(t)$ où la fonction u est strictement positive et vérifie l'équation (1.1) ; et la région $\Omega_0(t)$ où u est nulle. Sur la frontière libre $\mathcal{L}(t)$, séparant $\Omega_+(t)$ de $\Omega_0(t)$, la fonction u vérifie la double condition

$$u(x,t) = |\operatorname{grad}_x u(x,t)| = 0.$$

Dans la section 3, moyennant certaines hypothèses de régularité de la frontière libre, on montre la convergence asymptotique, au sens de la distance de Hausdorff d'ensembles, de la frontière évolutive $\mathcal{L}(t)$ vers $\mathcal{L}_\infty$-la frontière stationnaire.

Le problème (1.6) (1.2) (1.3) peut traduire la diffusion de l'oxygène dans les tissus vivants (u étant la concentration de l'oxygène), dont l'étude a été faite à une dimension avec d'autres conditions aux limites par Crank et Gupta [GG] et Baiocchi et Pozzi [BP], et à plusieurs dimensions par Duvaut [D].

Les techniques de la section 2 sont classiques et ont été utilisées, par exemple, dans [F2] où [FK]. Dans la section 3 nous avons utilisé la régularité de la frontière libre due à Caffarelli [C1,2] et les idées de Pironneau et Saguez [PS] sur le comportement asymptotique des solutions d'équations aux dérivées partielles par rapport à la convergence de Hausdorff des domaines. Cette technique peut s'appliquer dans d'autres cas, comme par exemple dans [R1] et [R2], et admet une extension à la théorie de l'homogénéisation (cf. [CR] et [R3]).

2. - ETUDE DE L'INEQUATION VARIATIONNELLE PARABOLIQUE

Considérons l'opérateur elliptique dans Ω, ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,

$$Lu = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \tag{2.1}$$

avec les hypothèses :

(H1) $a_{ij} \in C^1(\Omega)$; $\exists\, \alpha > 0 : \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha\, |\xi|^2, \ \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$;

(H2) $\exists\, M : |a_{ij}| \leqslant M, \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + |b_i| \leqslant M, \ |c| \leqslant M$;

(H3) $c(x) \leqslant -\gamma < 0, \ \forall\, x \in \Omega$; $\sup_{x\in\Omega} |b_i(x)| < \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\sqrt{n}}$

Considérons la forme bilinéaire associée à l'opérateur $-L$:

$$a(u,v) = \sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \sum_i \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx - \int_\Omega c\, uv\, dx. \tag{2.2}$$

Alors on a le

LEMME 2.1. *Sous les hypothèses* (H1) *et* (H3), *on a*

$$\exists\, \beta > 0 : a(v,v) \geqslant \beta\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Démonstration. En posant $B = \sup \{ |b_i(x)| : x \in \Omega, 1 \leqslant i \leqslant n \}$, il vient

$$a(v,v) = \sum_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx - \sum_i \int_\Omega b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} v\, dx - \int_\Omega c\, v^2\, dx$$

$$\geqslant \alpha\, |\mathrm{grad}\, v|^2_{L^2} - B \sum_i \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^2} |v|_{L^2} + \gamma\, |v|^2_{L^2}$$

$$\geqslant \alpha\, |\mathrm{grad}\, v|^2_{L^2} - B\, (\frac{\delta}{2} |\mathrm{grad}\, v|^2_{L^2} + \frac{n}{2\delta} |v|^2_{L^2}) + \gamma\, |v|^2_{L^2}$$

$$\geqslant \beta\, (|v|^2_{L^2} + |\mathrm{grad}\, v|^2_{L^2})$$

si on impose

$$0 < \frac{Bn}{2(\gamma - \beta)} < \delta < 2\frac{\alpha - \beta}{B}$$

c'est-à-dire, si

$$B^2 < 4(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\,/\,n$$

et ceci résulte de (H3) pour $\beta > 0$ assez petit. □

Remarque 2.1. Ce résultat, dû à Stampacchia, est encore valable sous hypothèses plus faibles sur les coefficients de L (cf. [S]). Si les coefficients $b_i \equiv 0$, alors on peut supposer dans (H3) $c(x) \leqslant 0$, $(x \in \Omega)$, et en utilisant l'inégalité de Poincaré, le lemme 2.1 reste encore valable pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

□

En utilisant les notations habituelles des espaces de Sobolev, on donne des fonctions f, g et u_0 sous les hypothèses :

(2.3) $$f \in L^\infty(\Omega \times\,]0,\infty[\,),\ f_t \in L^\infty(\Omega \times\,]0,\infty[\,)\,;$$

(2.4) $$g \in L^\infty(0,\infty\,;W^{2-1/p,p}(\Gamma)),\ 2 \leqslant p < \infty\,;$$

(2.5) $$g \geqslant 0,\ g_t \in L^\infty(\Gamma \times\,]0,\infty\,[\,)\,;$$

(2.6) $$u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega),\ \ u_0 \geqslant 0,\ \ u_0(x) = g(x,0) \quad \forall\, x \in \Gamma\,;$$

où $\Gamma = \partial\Omega$ est supposé suffisamment régulier.

On considère l'inéquation variationnelle parabolique suivante :

(2.7) $$u(x,t) \geqslant 0 \quad (x \in \Omega,\ t > 0)$$

(2.8) $$(u_t - Lu)(v-u) \geqslant f(v-u),\ \ \forall\, v \geqslant 0 \quad (x \in \Omega,\ t > 0)$$

(2.9) $$u(x,t) \;=\; g(x,t) \qquad (x \in \Gamma,\ t > 0)$$

(2.10) $$u(x,0) = u_0(x) \quad (x \in \overline{\Omega})$$

THEOREME 2.1. *Sous les hypothèses (2.3)-(2-6) la solution unique de (2.7)-(2.10) vérifie*

(2.11) $$u \in L^\infty(0,\infty\,;W^{2,p}(\Omega)) \cap W^{1,p}(Q_T),\ 2 \leqslant p < \infty,\ \ 0 < T < \infty$$

(2.12) $$u_t \in L^\infty(Q_\infty),\ Lu \in L^\infty(Q_\infty),$$

où $Q_T = \Omega \times]0,T[\,,\ 0 < T \leqslant \infty$.

Pour démontrer ce théorème on considère le problème pénalisé

$$(2.13) \qquad \begin{aligned} &u_t^\epsilon - Lu^\epsilon + \beta_\epsilon(u^\epsilon) = f \qquad (x \in \Omega,\ t > 0) \\ &u^\epsilon(x,t) = g(x,t) \qquad (x \in \Gamma,\ t > 0) \\ &u^\epsilon(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \overline{\Omega}), \end{aligned}$$

où $\beta_\epsilon(\sigma) \in C^\infty(IR)$ est une famille de fonctions pour $\epsilon > 0$, vérifiant

$$(2.14) \qquad \beta_\epsilon(\sigma) = 0 \text{ si } \sigma > 0\ ;\ \beta'_\epsilon(\sigma) > 0 \text{ si } \sigma < 0\ ;\ \beta_\epsilon(\sigma) \to -\infty \text{ si } \sigma < 0 \text{ et } \epsilon \to 0.$$

Il est bien connu que le problème (2.13) admet une solution u^ϵ au sens classique (cf. [F1], par exemple). On va montrer que $u^\epsilon \to u$ lorsque $\epsilon \to 0$, et établir les estimations (2.11) et (2.12) pour u^ϵ de façon indépendante de ϵ.

D'abord on montre deux lemmes :

LEMME 2.2. *On a*

$$(2.15) \qquad \min(\inf f, 0) \leqslant \beta_\epsilon(u^\epsilon) \leqslant 0.$$

Démonstration. En effet, soit $(\hat{x},\hat{t})$ le point où $\beta_\epsilon(u^\epsilon(x,t))$ atteint son minimum : si $u^\epsilon(\hat{x},\hat{t}) \geqslant 0$, (2.15) est trivial ; si $u^\epsilon(\hat{x},\hat{t}) < 0$, alors $(\hat{x},\hat{t})$ est aussi le point où u^ϵ atteint son minimum, car $\beta'_\epsilon > 0$ si $\sigma < 0$; donc $(\hat{x},\hat{t})$ n'appartient pas à la frontière de $\Omega \times]0,\infty[$; par conséquence $(u_t^\epsilon - Lu^\epsilon)(\hat{x},\hat{t}) \leqslant 0$, mais d'après (2.13) cela entraîne

$$\beta_\epsilon(u^\epsilon) \geqslant f \text{ dans ce point, d'où (2.15).}$$

□

LEMME 2.3. *On a l'estimation suivante*

$$(2.16) \qquad |u_t^\epsilon(x,t)| \leqslant C_1, \quad \text{p.p. } (x,t) \in Q_\infty,$$

où $C_1 > 0$ *est une constante indépendante de* ϵ *et de* t.

Démonstration. On considère le problème pour u_t^ϵ et on applique le principe du maximum. D'après (2.13) on obtient pour $w = u_t^\epsilon$,

$$
\begin{aligned}
&w_t - Lw + \beta'_\epsilon(u^\epsilon)w = f_t && (x \in \Omega,\ t > 0)\\
(2.17)\qquad &w(x,t) = g_t(x,t) && (x \in \Gamma,\ t > 0)\\
&w(x,0) = Lu_o(x) + f(x,0) && (x \in \Omega)
\end{aligned}
$$

D'après les hypothèses (2.3) (2.5) et (2.6) il existe $N > 0$:

$$|f_t(x,t)| \leqslant N, \quad |g_t(x,t)| \leqslant N, \quad |Lu_o(x) + f(x,0)| \leqslant N, \quad \forall\, x, t,$$

et donc, il vient

$$(2.18)\qquad (L - \beta'_\epsilon - \partial/\partial t)(\pm\, w) \leqslant N \ \text{ dans } Q_\infty \text{ et } \pm\, w \leqslant N \text{ sur } \partial Q_\infty.$$

Considérons la fonction

$$z(x) = N + e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1},\ x = (x_1,\dots,x_n) \in \overline{\Omega},$$

où $R = \sup\left\{ |x_1| : x \in \Omega \right\}$ et $\lambda > 0$ est une constante à déterminer. Compte tenu $\beta'_\epsilon \geqslant 0$ et l'hypothèse (H3), on a

$$
\begin{aligned}
(L - \beta'_\epsilon - \partial/\partial t)z &= -\, a_{11}\,\lambda^2 e^{\lambda x_1} - \Big(b_1 + \sum_j \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_j}\Big)\,\lambda e^{\lambda x_1} + (c - \beta'_\epsilon)z\\
&\leqslant -\,\lambda\, e^{\lambda x_1}\,\Big(\lambda a_{11} + b_1 + \sum_j \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_j}\Big) \text{ dans } Q_\infty,
\end{aligned}
$$

et, si on fixe λ suffisamment grand, il vient d'après (H1) et (H2),

$$(2.19)\qquad (L - \beta'_\epsilon - \partial/\partial t)z \leqslant -\,N \text{ dans } Q_\infty \ \text{ et } \ z \geqslant N \text{ sur } \partial Q_\infty.$$

En comparant (2.18) avec (2.19), et en appliquant le principe du maximum, il vient $z \pm w \geqslant 0$ dans Q_∞ d'où l'estimation (2.16) avec $C_1 = N + e^{\lambda R} - \inf\limits_{x \in \Omega} e^{\lambda x_1}$. □

Démonstration du Théorème 2.1. D'après ces deux lemmes, on a pour la solution de (2.13)

$$
\begin{aligned}
\| Lu^\epsilon(.\,,t)\|_{L^\infty(\Omega)} &= \| u^\epsilon_t(.\,,t) + \beta_\epsilon(u^\epsilon(.\,,t)) - f(.\,,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\\
&\leqslant C_1 + 2\,\|f\|_{L^\infty(Q_\infty)} = C_2,
\end{aligned}
$$

où $C_2 > 0$ est une constante indépendante de ϵ et de t.

Pour chaque t fixé on peut maintenant appliquer les estimations de la théorie linéaire elliptique (cf. [ADN]). Il vient

$$(2.20)\qquad \begin{aligned} \| u^\epsilon(.\,,t)\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leqslant C(\Omega,p)(\| Lu^\epsilon(.\,,t)\|_{L^p(\Omega)} + \| g(.\,,t)\|_{W^{2-1/p,p}(\Gamma)}) \\ &\leqslant C_3 \quad \text{(indépendante de } \epsilon \text{ et t).} \end{aligned}$$

Alors pour chaque $0 < T < \infty$, on a

$$(2.21)\qquad \begin{aligned} \| u^\epsilon \|^p_{W^{1,p}(Q_T)} &= \int_0^T \int_\Omega (|u^\epsilon|^p + |\mathrm{grad}_x u^\epsilon|^p + |u^\epsilon_t|^p)\, dx\, dt \\ &\leqslant T(C_3^p + C_1^p \text{ mes } (\Omega)) = C_4 \quad \text{(indépendant de } \epsilon). \end{aligned}$$

Donc il existe une sous-suite, encore notée u^ϵ, telle que

$$u^\epsilon \longrightarrow u \quad \text{dans } W^{1,p}(Q_T) \text{ - faible } (\forall\, T,\ 0 < T < \infty)$$

$$u^\epsilon_t \longrightarrow u_t \quad \text{dans } L^\infty(Q_T) \text{ - faible * } (\forall\, T)$$

$$u^\epsilon(.\,,t) \longrightarrow u(.\,,t) \ \text{ dans } W^{2,p}(\Omega) \text{ - faible, p.p. } t > 0$$

lorsque $\epsilon \to 0$. D'après les injections compactes de Rellich-Kondratchoff $u^\epsilon(t)$ converge au moins dans $H^1(\Omega)$-fort vers $u(t)$ et il est évident que u vérifie les conditions aux limites (2.9) et (2.10).

D'après (2.14) et (2.15) il est clair que $u \geqslant 0$.

Pour compléter la démonstration de l'existence et les estimations (2.11) (2.12), il suffit de vérifier que u satisfait (2.8).

L'argument est classique : pour $v \in L^2(\Omega)$, $v \geqslant 0$, multiplions l'équation (2.13) par $v - u^\epsilon$; il vient

$$(u^\epsilon_t - Lu^\epsilon - f)(v - u^\epsilon) = (\beta_\epsilon(v) - \beta_\epsilon(u^\epsilon))\,(v - u^\epsilon)$$

et, compte tenu $\beta'_\epsilon \geqslant 0$, on a

$$\int_\Omega (u^\epsilon_t - Lu^\epsilon)\,(v - u\ )dx \geqslant \int_\Omega f(v - u^\epsilon)dx$$

et à la limite lorsque $\epsilon \to 0$

$$(2.22)\qquad \int_\Omega (u_t - Lu)(v - u)dx \geqslant \int_\Omega f(v - u)dx,\ \ \forall\, v \in L^2(\Omega),\ v \geqslant 0.$$

Comme $u \geqslant 0$, (2.8) est maintenant une conséquence facile de (2.22).

L'unicité résulte aisément de l'argument standard de comparaison entre deux éventuelles solutions de (2.7)-(2.10), compte tenu le lemme 2.1. □

Remarque 2.2. Le résultat de régularité de la solution d'une inéquation variationnelle de ce type est classique (cf. par exemple [B] où [FK]). Cependant, à notre connaissance, les estimations uniformes dans le temps, qui permettent l'étude directe du comportement asymptotique de la solution, n'ont pas été encore faites ailleurs. □

Supposons maintenant qu'on a, lorsque $t \to \infty$,

$$(2.23)\qquad \begin{aligned} &f(t) \rightharpoonup f_\infty,\ g(t) \rightharpoonup g_\infty \quad \text{(au sens de (2.3) (2.4)) et} \\ &f_t(t) \to 0\ ,\ g_t(t) \to 0 \quad \text{dans } L^\infty \text{ fort.} \end{aligned}$$

Comme u_t^ϵ vérifie (2.16) et (2.17), un argument classique (voir [F1] page 158, par exemple), entraîne alors $u_t^\epsilon(x,t) \to 0$ uniformément en x et en ϵ (car $\beta'_\epsilon \geqslant 0$). D'autre part, d'après les estimations (2.11) et (2.12) on a, au moins pour une sous-suite lorsque $t \to \infty$,

$$(2.24)\qquad u(t) \rightharpoonup u_\infty \quad \text{dans } W^{2,p}(\Omega)\text{-faible,}$$

$$(2.25)\qquad Lu(t) \rightharpoonup Lu_\infty \quad \text{dans } L^\infty(\Omega)\text{-faible *.}$$

Alors en fixant $v \in L^2(\Omega)$, $v \geqslant 0$, on peut passer à la limite $t \to \infty$ dans

$$\int_\Omega (u_t(t) - Lu(t) - f(t))\,(v - u(t))\ dx \geqslant 0$$

en obtenant aisément que u_∞ est solution du problème

$$(2.26)\qquad u_\infty(x) \geqslant 0 \quad (x \in \Omega),\ u_\infty(x) = g_\infty(x) \quad (x \in \Gamma)$$

$$(2.27)\qquad -Lu_\infty(v - u_\infty) \geqslant f\ (v - u_\infty),\ \ \forall\, v \geqslant 0 \quad (x \in \Omega).$$

Compte tenu de l'unicité de la solution de (2.26) (2.27) on peut énoncer le

THEOREME 2.2. *La solution* $u(t)$ *de l'inéquation variationnelle parabolique (2.7)-(2.10) converge, lorsque* $t \to \infty$, *vers la solution du problème stationnaire (2.26) (2.27) au sens de (2.24) et, si* $p > n$, *par le résultat de compacité de Rellich-Kondratchoff aussi*

$$u(t) \to u_\infty \ \text{dans } C^{1,\mu}(\overline{\Omega}),\ \textit{avec } 0 \leqslant \mu < 1 - n/p.$$ □

Remarque 2.3. En utilisant le résultat de régularité $W^{1,p}(2 \leqslant p < \infty)$ (cf. [Bo]) on peut remplacer l'hypothèse (2.4) par

$$g \in L^\infty(0,\infty\,;W^{1-1/p,p}(\Gamma)),\quad 2 \leqslant p < \infty.$$

Alors on aura $u \in L^\infty(0,\infty\,;W^{1,p}(\Omega))$ et en supposant (2.23) on trouve la stabilité $t \to \infty$ du Théorème 2.2. dans $W^{1,p}(\Omega)$, $2 \leqslant p < \infty$. En particulier, si $p > n$, on a $u(t) \underset{t \to \infty}{\to} u_\infty$ dans $C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$, avec $0 \leqslant \beta < 1 - n/p$.

□

Remarque 2.4. Si on suppose la condition de Dirichlet bornée, i.e., $g \in L^\infty(\Gamma \times]0,\infty[\,)$, alors on peut remplacer l'hypothèse (H3) par

$$\text{(H.3')}\qquad c(x) \leqslant 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega,$$

dans les conditions du théorème 2.2. (cf. [R1]). En effet, la condition (H.3') entraîne une coercivité plus faible que le lemme 2.1, c'est-à-dire, il existe des constantes $\lambda > \beta > 0$, telles que

$$a(u,v) + \lambda\, |v|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \beta\, \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\,,\quad \forall\, v \in H^1(\Omega),$$

laquelle est suffisante pour démontrer l'unicité dans le cas d'évolution. D'autre part, un argument de Laetsch (cf. [BL] , page 180), assure l'unicité d'une solution bornée du problème elliptique (2.26) (2.27), et par conséquent, le Théorème 2.2. reste encore valable dans le cadre plus général de l'hypothèse (H.3').

□

Remarque 2.5. Pour l'inéquation variationnelle parabolique avec obstacle dépendant du temps

$$(2.28)\qquad u(t) \in K(t) = \left\{ v \in H^1_0(\Omega) : v \geqslant \psi(t) \ \text{dans}\ \Omega \right\}$$

$$(2.29)\qquad \int_\Omega (u_t(t) - Lu(t) - f(t))\,(v - u(t))dx \geqslant 0,\quad \forall\, v \in K(t),\quad (t > 0)$$

$$(2.30)\qquad u(x,0) = u_0(x),\quad (x \in \bar{\Omega}),$$

on a des résultats analogues aux précédents si on suppose assez de régularité sur $\psi(t)$. Par exemple, si on donne

$$\psi, \psi_t \in L^\infty(0,\infty\,; W^{2,\infty}(\Omega)),\quad \psi_{tt} \in L^\infty(\Omega \times]0,\infty[\,)$$

avec $\psi(t) \leqslant 0$ sur Γ, $t \geqslant 0$, f vérifiant (2.3) et une condition initiale

$$u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap K(0),$$

alors la solution u de (2.28)-(2-30) vérifie (2.11) et (2.12), $\forall\, p < \infty$.

En effet, il suffit de considérer la fonction $w = u - \psi$ et le problème translaté correspondant avec terme non-homogène $\tilde{f} = f + L\psi - \psi_t$.

Si, en plus, on suppose $\psi(t) \to \psi_\infty$, alors il est facile de vérifier que

$$u(t) \to u \quad \text{dans } C^{1,\alpha}(\Omega), \quad \forall\, \alpha, 0 \leqslant \alpha < 1,$$

où u_∞ est la solution de l'inéquation variationnelle stationnaire

$$u_\infty \in K_\infty = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) : v \geqslant \psi_\infty \text{ dans } \Omega \right\}$$

$$\int_\Omega (-Lu_\infty - f_\infty)(v - u_\infty)\, dx \geqslant 0, \quad \forall\, v \in K_\infty. \qquad \square$$

3. - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA FRONTIERE LIBRE

Considérons maintenant à plusieurs dimensions un cas particulier de l'opérateur L, en supposant

(H4) $$a_{ij} \in C^3(\bar{\Omega}), \quad b_i = -\sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{et } c \equiv -\gamma \leqslant 0.$$

Supposons aussi que la fonction limite dans (2.23) vérifie

(3.1) $$f_\infty \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}), \quad 0 < \mu \leqslant 1,$$

(3.2) $$f_\infty(x) \leqslant -\nu < 0, \quad x \in \Omega.$$

L'hypothèse (3.1) entraîne, d'après [BK], qui la fonction u_∞ solution de (2.26) (2.27) a toutes les dérivées secondes localement bornées dans Ω, c'est-à-dire,

(3.3) $$u_\infty \in C^{1,1}(\Omega).$$

Posons pour les solutions des inéquations de la section 2,

(3.4)
$$\mathcal{O}(t) = \left\{ x \in \Omega : u(x,t) > 0 \right\}; \quad E(t) = \left\{ x \in \bar{\Omega} : u(x,t) = 0 \right\};$$
$$\mathcal{O}_\infty = \left\{ x \in \Omega ; u_\infty(x) > 0 \right\}; \quad E_\infty = \left\{ x \in \bar{\Omega} : u_\infty(x) = 0 \right\};$$

et considérons les respectives frontières libres

(3.5) $$\mathcal{L}(t) = \partial E(t) \cap \Omega \;;\; \mathcal{L}_\infty = \partial E_\infty \cap \Omega.$$

Pour exclure le cas trivial on suppose que les fonctions f(t) et g(t) sont telles qu'il existe $t_1 : \mathcal{L}(t) \neq \emptyset$ pour $t \geqslant t_1$.

D'après (2.26) (2.27) et (3.1) (3.3), u_∞ satisfait

(3.6) $$\sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u_\infty}{\partial x_i \partial x_j} = \hat{f} \geqslant \nu > 0 \text{ dans } \mathcal{O}_\infty, \text{ où } \hat{f} = \gamma u_\infty - f_\infty \in C^{0,\lambda}(\bar{\mathcal{O}}_\infty),\ \lambda > 0$$

(3.7) $$u_\infty = |\operatorname{grad} u_\infty| = 0 \text{ sur } \mathcal{L}_\infty$$

et compte tenu des résultats de Caffarelli sur la régularité des frontières libres des problèmes elliptiques (cf. [C1,2]) on supposera que

(3.8) $$\mathcal{L}_\infty \text{ est localement une surface de classe } C^1,$$

en particulier, que $\mathcal{L}_\infty$ ne présente pas des points singuliers (voir, cependant, la Remarque 3.1 plus loin).

Dans le but de simplifier la présentation des résultats on supposera

(3.9) $$g_\infty(x) > 0, \quad \forall\, v \in \Gamma.$$

Cela entraîne $\partial E_\infty \subset \Omega$, et d'après la régularité (3.8) on a

(3.10) $$\overline{\operatorname{int}(E_\infty)} = E. \quad \text{(cf. fig. 1)}$$

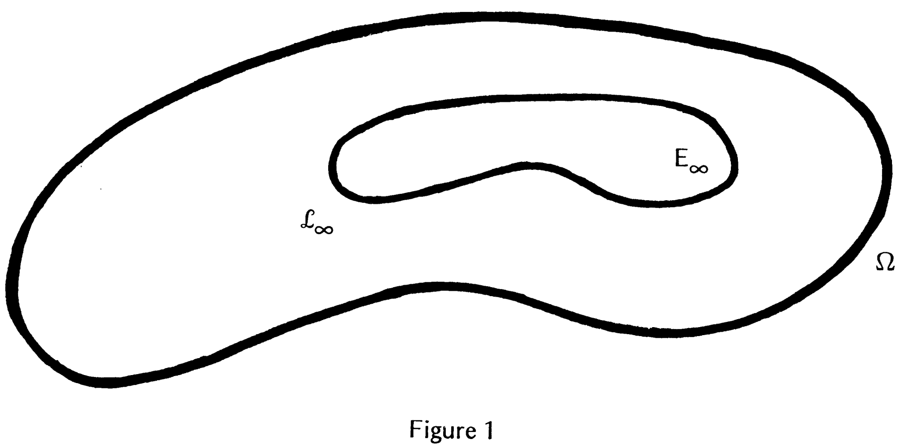

Figure 1

THEOREME 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, en particulier en supposant que* $u(x,t) \to u_\infty(x)$ *uniformément dans* $\overline{\Omega}$, *on a*

$$E(t) \to E_\infty \text{ au sens de Hausdorff, lorsque } t \to \infty. \ (*)$$

Démonstration. Comme $\{E(t)\}_{t > t_1}$ est une famille infinie de compacts de Ω, il existe une sous-suite $\{t_j\}$, $t_j \underset{j}{\to} \infty$, et un ensemble compact $E_* \subset \overline{\Omega}$, tels que (cf. [De, p. 42], par exemple).

$$E(t_j) \equiv E_j \to E_* \quad \text{au sens de Hausdorff.}$$

Nous montrerons en trois étapes que

$$E_* = E_\infty, \tag{3.11}$$

c'est-à-dire, que $E(t)$ converge pour la distance de Hausdorff vers E_∞.

i) $E_* \subset E_\infty$: comme $\delta(E_j, E_*) \underset{j}{\to} 0$, pour tout $x \in E_*$ il existe $x_j \in E_j$, tels que $x_j \underset{j}{\to} x$; en utilisant

$$|u^j(x_j) - u_\infty(x)| \leqslant |u^j(x_j) - u_\infty(x_j)| + |u_\infty(x_j) - u_\infty(x)|$$

où $u^j(x) = u(x,t_j)$, compte tenu la continuité de u_∞ et la convergence uniforme $u^j \underset{j}{\to} u_\infty$, on trouve $u_\infty(x) = 0$; donc $x \in E_\infty$, c'est-à-dire $E_* \subset E_\infty$.

ii) $E = E_* \cup N$, où $\mathrm{int}(N) = \emptyset$: supposons, par l'absurde, qu'il existe une boule $B \subset \mathrm{int}(E_\infty \setminus E_*)$; dans $\mathcal{O}_j = \Omega \setminus E_j$, on a $u^j > 0$ et donc u^j satisfait

$$Lu^j = u^j_t - f^j, \quad \text{p.p. } x \in \mathcal{O}_j ;$$

d'autre part, en posant $\mathcal{O} = \Omega \setminus E_*$ pour chaque $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ il existe j_0, tel que $\mathrm{supp}\, \phi \subset \mathcal{O}_j$, $\forall j \geqslant j_0$ (car $E_j \to E_*$ au sens de Hausdorff, cf. [P, p.36]) et par conséquence

$$0 = {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle Lu^j - u^j_t + f^j, \tilde{\phi} \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \xrightarrow[j]{} {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle Lu_\infty + f_\infty, \tilde{\phi} \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)}$$

($\tilde{\phi}$ extension par 0 de ϕ)

(*) On rappelle que la distance Hausdorff $\delta(A,B)$ entre deux ensembles A et B est définie par

$$\delta(A,B) = \sup\left(\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{y \in B} d(y,A)\right) \text{ où } d(x,B) = \inf_{y \in B} |x - y|.$$

c'est-à-dire, on a, en rappelant (3.2),

$$\mathrm{Lu}_\infty = - f_\infty > 0, \quad \text{p.p.} \quad \mathcal{O} \supset B\,; \tag{3.12}$$

mais alors, sur $\partial B \subset E_\infty$ on a $u_\infty = 0$ ce qui joint à (3.12) par le principe du maximum entraîne $u_\infty < 0$ dans B, et on est abouti dans une contradiction ; donc $\mathrm{int}(E_\infty \setminus E_*) = \emptyset$.

iii) Enfin, d'après (3.10) on a

$$E = \overline{\mathrm{int}(E_\infty)} = \overline{\mathrm{int}(E_*)} \subset E_*$$

car $\mathrm{int}(N) = \emptyset$ entraîne $\mathrm{int}(E_\infty) = \mathrm{int}(E_*)$, et (3.11) est démontré. □

Ce théorème donne un certain sens à la convergence asymptotique de la frontière libre, mais en général il n'est pas suffisant pour assurer la convergence Hausdorff des frontières libres, car elles ne sont qu'une partie des frontières des ensembles de contact. Cependant il y a des exemples où on peut obtenir cette convergence des frontières dans un sens plus précis.

Considérons d'abord le cas unidimensionel avec $\Omega =]a,b[$ et supposons, par exemple, que $E(t) = [x(t),b]$ et $E_\infty = [x_\infty,b]$ avec $a \leqslant x_\infty < b$. Alors les frontières libres sont des points : $\mathcal{L}(t) = \{x(t)\}$ et $\mathcal{L}_\infty = \{x_\infty\}$.

COROLLAIRE 3.1. *Si on suppose que* $u(x,t) \to u_\infty(x)$ *uniformément en* $x \in [a,b]$, *lorsque* $t \to \infty$, *on a* $x(t) \to x_\infty$.

Démonstration. D'après le théorème 3.1 on a $E(t) \to E_\infty$ au sens de Hausdorff. En remarquant que $|x(t) - x_\infty| = \delta(E(t), E_\infty)$, le corollaire est immédiat. □

Une autre application du théorème 3.1 est le cas où les ensembles de contact $E(t)$ s'approchent de E_∞ «par l'extérieur», par exemple si $u(t)$ converge vers u_∞ de façon monotone croissante.

COROLLAIRE 3.2. *Supposons que* $f_\infty \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$ *et, qu'il existe* $t_* \geqslant 0$, *tel que*

$$E_\infty \subset E(t) \; \textit{pour} \; t \geqslant t_*\,. \tag{3.13}$$

Alors, lorsque $t \to \infty$, *on a*

$$\mathcal{L}(t) \to \mathcal{L}_\infty \; \textit{pour la distance de Hausdorff.}$$

Démonstration. D'après (3.13) il vient, pour $t \geqslant t_*$,

$$\delta(E(t), E_\infty) = \sup_{x \in E(t)} d(x, E_\infty) = \sup_{x \in \mathcal{L}(t)} d(x, \mathcal{L}_\infty).$$

Puisque $f_\infty \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$ et compte tenu (3.8), d'après [KN] on a la régularité supplémentaire suivante $\mathcal{L}_\infty \in C^{2,\mu}$. Cette propriété entraîne que $\mathcal{L}_\infty$ satisfait une condition uniforme de la sphère, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathcal{L}_\infty$ il existe une boule B de rayon ϵ (ϵ indépendante de x) telle que $\overline{B} \cap E_\infty = \{x\}$. Alors pour $t \geqslant t_*$ (t_* : $\delta(E(t), E_\infty) \leqslant \epsilon$, $\forall\, t \geqslant t_*$) on a

$$\delta(\mathcal{L}(t), \mathcal{L}_\infty) = \sup_{x \in \mathcal{L}(t)} d(x, \mathcal{L}_\infty),$$

et le corollaire est une conséquence du théorème 3.1. □

Pour le cas général à plusieurs dimensions on peut donner une condition suffisante pour la stabilisation asymptotique des frontières libres.

THEOREME 3.2. *Si en plus des hypothèses du théorème 3.1 on suppose que pour tout* $t \geqslant t_1$

(3.14) *«les ensembles* E(t) *vérifient la propriété du cône extérieur uniformément par rapport à* t»,

alors

(3.15) $\mathcal{L}(t) \to \mathcal{L}_\infty$ *au sens de Hausdorff, lorsque* $t \to \infty$.

Démonstration. Considérons une suite $t_j \to \infty$ et posons

$$E_j = E(t_j),\ \mathcal{L}_j = \mathcal{L}(t_j) \text{ et } Q_j = Q(t_j) = \overline{\mathcal{O}(t_j)} = \overline{\Omega \setminus E(t_j)}.$$

Alors il existe une sous-suite (encore notée par $\{t_j\}$) et des sous ensembles compacts de $\overline{\Omega}$, tels que

$$E_j \underset{j}{\to} E_* \,;\, \mathcal{L}_j \underset{j}{\to} \mathcal{L}_* \,,\, Q_j \underset{j}{\to} Q_*$$

pour la topologie de Hausdorff.

D'après le théorème 3.1 on a $E_* = E_\infty$.

Comme $\mathcal{L}_j = E_j \cap Q_j$ il est évident que $\mathcal{L}_* \subset E_\infty \cap Q_*$. Réciproquement, si $x \in E_\infty \cap Q_*$, il existe $\{x_j\} \subset E_j$ et $\{y_j\} \subset Q_j$ tels que $d(x,x_j) \leqslant 1/j$ et $d(x,y_j) \leqslant 1/j$, et alors

$x \in \mathcal{L}_*$. Donc $\mathcal{L}_* = E_\infty \cap Q_*$. Puisque, par définition, $\mathcal{L}_\infty = E_\infty \cap Q_\infty (Q_\infty = \bar{\mathcal{O}}_\infty)$, si on prouve que $Q_* = Q_\infty$, alors on aura $\mathcal{L}_j \xrightarrow[j]{} \mathcal{L}_\infty$.

D'après $Q_\infty \setminus \mathcal{L}_\infty = \overline{\Omega} \setminus E_\infty \subset Q_*$, il est clair que $Q_\infty \subset Q^*$. Nous allons prouver l'autre inclusion en utilisant la propriété uniforme du cône.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $x \in Q_* \setminus Q_\infty$, et soit $x_j \xrightarrow[j]{} x$ avec $x_j \in Q_j$. D'après (3.14), il existe un cône ouvert C_j avec sommet en x_j (d'ouverture et hauteur indépendantes de j) tel que

$$C_j \subset Q_j \text{ et } C_j \cap E_j = \emptyset, \ \forall j. \tag{3.16}$$

D'autre part, à partir d'un certain j_1 on a $x_j \in E_\infty \setminus \mathcal{L}_\infty$ (car $Q_* \setminus Q_\infty = Q_* \cap (E_\infty \setminus \mathcal{L}_\infty)$), et donc $C_j \cap (E_\infty \setminus \mathcal{L}_\infty) \neq \emptyset$ pour $j \geqslant j_1$.

Soit $y_j \in (E_\infty \setminus \mathcal{L}_\infty) \cap C_j$. Alors il existe $z_j \in E_j$, tel que $d(y_j,z_j) \leqslant 1/j$ et pour j suffisamment grand il vient $z_j \in C_j$ ce qui contredit (3.16). Par conséquent on a $Q_* = Q_\infty$, et le théorème est démontré. □

Remarque 3.1. La condition (3.9) n'est pas essentielle dans la méthode. En effet, si on admet $g_\infty \geqslant 0$, c'est-à-dire la frontière libre $\mathcal{L}_\infty$ peut «toucher» le bord Γ de Ω, on a encore une version locale des théorèmes 3.1 et 3.2. Par exemple, si F est un compact de Ω tel que $E_\infty \cap F = \text{int}(E_\infty \cap F)$, alors $E(t) \cap F \to E_\infty \cap F$ au sens de Hausdorff, lorsque $t \to \infty$. Une observation analogue peut être faite en supprimant le cas où $\mathcal{L}_\infty$ n'a pas des points singuliers, en localisant le résultat près des points réguliers de la frontière libre.

Remarque 3.2. Supposons que dans un compact F de Ω on suppose que les frontières libres $\mathcal{L}(t)$ et $\mathcal{L}_\infty$ peuvent se représenter sous la forme des graphes uniformément lipschitziens, c'est-à-dire, sous la forme

$$\mathcal{L}(t) \cap F = \{(x',x_n) \in F,\ x_n = \ell(x',t)\},\quad x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$$

$$\mathcal{L}_\infty \cap F = \{(x',x_n) \in F : x_n = \ell_\infty(x')\},$$

où $|\nabla_{x'} \ell(x',t)| \leqslant C$, C = constant indépendante de x' et de $t \geqslant t_1$. Alors, d'après le théorème 3.2 localisé dans F on aura la convergence uniforme et même dans $C^{0,\alpha}$, $\forall\ \alpha \in [0,1[$, dans F de $\ell(t)$ vers ℓ_∞ lorsque $t \to \infty$.

□

REFERENCES

[ADN] AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG. *«Estimates near the boundary for elliptic partial differential equation satisfying the general boundary conditions».* (I) Comm. Pure Appl. Math. 12, (1959), 623-727.

[BP] BAIOCCHI-POZZI. *«An evolution variational inequality related to a diffusion-absorption problem».* Appl. Math. & Optimization 2, (1976), 304-314.

[BL] BENSOUSSAN-LIONS. *«Application des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique».* Dunod, Paris (1978).

[Bo] BOCCARDO L. *«Régularité* $W_0^{1,p}(2 < p < +\infty)$ *de la solution d'un problème unilatéral».* Ann. Fac. Sc. Toulouse III (1981), 69-74.

[B] BREZIS H. *«Problèmes unilatéraux».* J. Math. Pures et Appl. 51, (1972), 1-168.

[BK] BREZIS-KINDERLEHRER. *«The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities».* Indiana Univ. Math. J., 9 (1974), 831-844.

[C1] CAFFARELLI L.A. *«The regularity of free boundaries in higher dimensions».* Acta Math. 139 (1977) 155-184.

[C2] CAFFARELLI L.A. *«Regolarità di frontiera libera in più dimensioni».* Pub. no 228, L.A.N. del C.N.R., Pavie (1979).

[CR] CODEGONE-RODRIGUES. *«Convergence of the coincidence set in the homogenization of the obstacle problem».* Ann. Fac. Sc. Toulouse III (1981),275-285.

[CG] CRANK-GUPTA. *«A moving boundary problem arising from the diffusion of oxygen in absorbing tissue».* J. Inst. Maths. Applics 10 (1972) 19-33.

[De] DELLACHERIE C. *«Ensembles Analytiques. Capacités. Mesures de Hausdorff».* Lect. Notes in Maths no 295, Springer-Verlag (1972).

[D] DUVAUT G. *«Diffusion de l'oxygène dans les tissus vivants».* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282-A (1976), 33-36.

[F1] FRIEDMAN A. *«Partial Differential Equations of Parabolic Type».* Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall (1964).

[F2] FRIEDMAN A. *«Regularity Theorems for Variational Inequalities in Unbounded Domains and Applications to Stopping Type Problems».* Arch. Rational Mech. Analysis 52 (1973) 134-160.

[FK] FRIEDMAN-KINDERLEHRER. *«A One Phase Stefan Problem».* Indiana Univ. Math. J., 24 (1975) 1005-1035.

[KN] KINDERLEHRER-NIRENBERG. *«Regularity in free boundary problems».* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 2 (1977), 373-391.

[P] PIRONNEAU O. *«Sur les problèmes d'optimisation de structures en Mécanique des Fluides»*. Thèse d'Etat, Paris 6 (1976).

[PS] PIRONNEAU-SAGUEZ. *«Asymptotic Behaviour with respect to the domain of solutions of P.D.E.s»*. Rapport no 218, I.R.I.A. (1977).

[R1] RODRIGUES J.F. *«Alguns problemas de fronteira livre na mecânica do continuo»*. Thèse (Fac. Ciên. Lisboa), Mars 1982.

[R2] RODRIGUES J.F. *«Stability of the free boundary in the obstacle problem for a minimal surface»*. Portugaliae Math. 41 (1982).

[R3] RODRIGUES J.F. *«Free boundary convergence in the homogenization of the one phase Stefan problem»*. Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982) 297-305.

[S] STAMPACCHIA G. *«Equations Elliptiques du Second Ordre à coefficients Discontinus»*. Presses Univers. Montréal (1966).

(Manuscrit reçu le 16 février 1981)