ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

GILLES AUBERT

RABAH TAHRAOUI

Quelques remarques sur un problème d'élasticité non linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 4, nº 1 (1982), p. 45-73

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1982_5_4_1_45_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol IV, 1982, P 45 à 73

QUELQUES REMARQUES SUR UN PROBLEME D'ELASTICITE NON LINEAIRE

Gilles Aubert (1) **et Rabah Tahraoui** (2)

(1) I.U.T. de Nice, 41 bd Napoléon III, 06041 Nice Cédex - France.
(2) Université Paris Sud, Mathématiques Bt 425, 91405 Orsay - France.

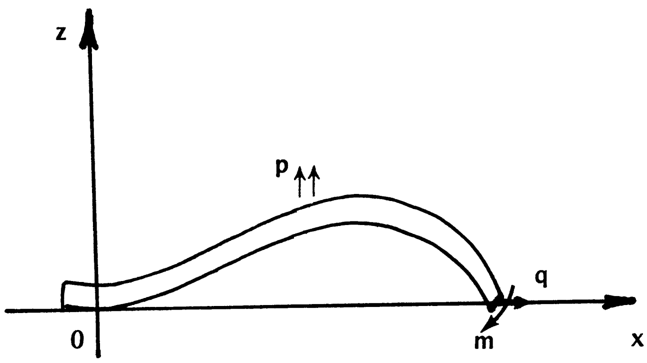
Résumé : Nous traitons dans cet article un problème d'élasticité non linéaire : l'étude des déformations d'une poutre mince. Nous développons d'abord un modèle proposé par K. WASHIZU pour lequel nous montrons sous certaines hypothèses l'existence et l'unicité d'une solution d'équilibre. Nous remarquons ensuite qu'il n'apparait pas de phénomène de bifurcation, ce qui est physiquement surprenant. Nous choisissons alors d'autres approximations dans le modèle de K. WASHIZU qui débouchent sur un problème aux valeurs propres non linéaire.

Summary : This work deals with a problem in non linear elasticity : the study of the deformations of a slender beam. First we develop a model proposed by K. WASHIZU for which we prove under certain hypotesis the existence and the unicity of a solution for equilibrium. Then we remark that there is no phenomenum of bifurcation appearing which is physicaly surprising. We suggest other approximations in the model given by K. WASHIZU which leading to a non linear eigenvalues problem.

INTRODUCTION

On étudie les déformations d'une poutre mince rectiligne. On suppose qu'au repos la poutre est horizontale et que son axe central coïncide avec Ox. On fait également l'hypothèse que les déformations se font dans le plan (x,z) et que les sections perpendiculaires à l'axe central avant les déformations restent perpendiculaires à cet axe après déformations (hypothèse de Bernouilli-

Euler). La poutre fixée à $x = 0$ est soumise à une distribution de forces p. L'extrémité $x = \ell$ est soumise à la double action d'un moment m et d'une force axiale q. On note respectivement $\mathscr{U} = U \cdot \vec{i_1} + W.\vec{i_3}$ et $\mathscr{U}o = u.\vec{i_1} + w.\vec{i_3}$ les vecteurs déplacements d'un point quelconque de la poutre et d'un point situé sur l'axe central



Ce problème a été abordé d'un point de vue mécanique par K. Washidu [1] . Dans son approche Washizu fait les approximations suivantes (grâce à l'hypothèse de Bernouilli-Euler les composantes du vecteur déplacement ne dépendent que de x) :

$$u' \sim \frac{1}{2} w'^2 \sim z \ll 1 \tag{0.1}$$

$$u' + \frac{1}{2}(u'^2 + w'^2) = 0 \tag{0.2}$$

cette dernière hypothèse signifiant qu'on néglige l'effet des forces agissant sur l'axe central.

Sous ces hypothèses, l'auteur calcule :

- les composantes du vecteur déplacement :

$$U = u - zw' \tag{0.3}$$

$$W = w \tag{0.4}$$

- les composantes du tenseur déformations :

$$\left\{ \begin{aligned} & e_{xx} = u' + \frac{1}{2} w'^2 - zw'' \\ & e_{yy} = e_{zz} = e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0 . \end{aligned} \right. \tag{0.5}$$

- la fonctionnelle énergie associée au problème :

$$(0.6)\ \mathscr{J}(u,w) = \frac{EA_o}{2}\int_o^{\ell} (u' + {}_2\, w'^2)^2 dx + \frac{EI}{2}\int_o^{\ell} w''^2\, dx - \int_o^{\ell} pw\, dx - qu(\ell) + mw'(\ell)$$

$$\text{où } A_o = \iint_S dy\, dz, \quad I = \iint_S z^2\, dy\, dz \quad (S : \text{section de la poutre}).$$

L'objet de notre travail est un étude des solutions d'équilibre du problème. On étudie le problème du calcul des variations :

$$(\mathscr{P}) \qquad \operatorname{Inf}\left\{\mathscr{J}(u,w)\ ;\ (u,w) \in V\right\}$$

où

$$V = \left\{(u,w) \in H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)\ ;\ u(0) = w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0\right\}$$

$H^1(0,\ell)$ et $H^2(0,\ell)$ désignant les espaces de Sobolev habituels.

<u>Au § 1</u> nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème ($\mathscr{P}$) sous la condition :

$$(0.7) \qquad 0 < q + EI\,\lambda_1^2$$

où λ_1^2 est la plus petite valeur propre du problème :

$$\begin{cases} D^4 w + \lambda^2 D^2 w = 0 \\ w(0) = w(\ell) = Dw(0) = D^2 w(\ell) = 0 \end{cases}$$

(on notera indifféremment $D^n v = v^{(n)} = \dfrac{d^n v}{dx^n}$).

La méthode utilisée est une méthode de perturbation. La fonctionnelle $\mathscr{J}(u,w)$ n'étant pas coercive sur l'espace V on introduit $\mathscr{J}_\epsilon(u,w) = \mathscr{J}(u,w) + \epsilon \displaystyle\int_o^{\ell} w'^4\, dx$.

Sous la condition (0.7) on borne indépendamment de ϵ la suite (u_ϵ, w_ϵ) solution du problème $\operatorname{Inf}_V \mathscr{J}_\epsilon(u,w)$. Par passage à la limite on déduit qu'il existe un couple $(\bar{u},\bar{w})$ solution de ($\mathscr{P}$) vérifiant les équations d'Euler découplées :

$$(0.8) \qquad \bar{u}'(x) + \frac{1}{2}\bar{w}'^2(x) = \frac{q}{EA_o} \quad \text{sur } (0,\ell)$$

$$(0.9)\qquad \begin{cases} D^4\overline{w} - \dfrac{q}{EI} D^2\overline{w} = p \quad \text{sur} \quad (0,\ell) \\ \overline{w}(0) = \overline{w}(\ell) = D\overline{w}(0) = 0 \\ D^2\overline{w}(\ell) = -\dfrac{m}{EI}. \end{cases}$$

<u>Au § 2</u> on étudie le problème spectral associé à (0.9) qu'on écrit sous la forme :

$$(0.10)\qquad \begin{cases} D^4 w + \lambda^2 D^2 w = 0 \quad \text{sur} \quad (0,\pi) \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0 \end{cases}$$

(pour simplifier les calculs on suppose que la poutre a une longueur $\ell = \pi$).

On note respectivement $\{\lambda_k\}$ et $\{w_k\}$ la famille des valeurs propres et des vecteurs propres de (0.10) et on montre que pour $\lambda \in]0,\lambda_1[$ les équations (0.9) admettent une solution unique $w(x,\lambda)$ telle que $\lim_{\lambda\to\lambda_1^-} w(x,\lambda) = +\infty$ (en particulier $\lim_{\lambda\to\lambda_1^-} \| \nabla_w(\lambda) \|_{L^2} = +\infty$).

Il n'apparait donc pas de phénomène de bifurcation au point $\lambda = \lambda_1$, ce qui physiquement peut paraître surprenant. Il est en effet réaliste et couramment admis que si une poutre est soumise à l'action d'une force axiale il apparait au-delà d'un certain seuil critique de la force axiale un phènomène de flambage.

On peut donc penser que le modèle proposé par Washizu est surtout valide pour de petites déformations. Nous avons repris les approximations (0.1) et (0.2) de Washizu mais à la différence de ce dernier qui néglige les termes d'ordre z^2 dans l'expression de $W = w$ et qui calcule ensuite le tenseur des déformations, nous avons pris, toujours sous les hypothèses (0.1) et (0.2) l'expression exacte de W : $W = w + zu'$ et nous avons calculé le tenseur des déformations. Dans ce résultat final seulement nous avons négligé les termes d'ordre z^2, ce qui a donné :

$$(0.11)\qquad \begin{cases} e_{xx} = u' + \dfrac{1}{2} w'^2 - zw'' \\ e_{zz} = \dfrac{1}{4} w'2 \\ e_{yy} = e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0. \end{cases}$$

La fonctionnelle énergie s'écrit alors :

$$(0.12)\qquad \hat{\mathcal{J}}(u,w) = \mathcal{J}(u,w) + \frac{A_o}{4} \int_o^\ell w'4\, dx.$$

On peut remarquer que $\hat{\mathscr{J}}(u,w)$ est du type $\mathscr{J}_\epsilon(u,w)$ à savoir :

$$\hat{\mathscr{J}}(u,w) = \mathscr{J}_{\frac{A_o}{4}}(u,w).$$

Cette remarque nous a semblé justifier une étude systématique du problème :

$$\operatorname{Inf}\left\{\mathscr{J}(u,w) + \delta \int_o^\ell w'^4 \, ; (u,w) \in V\right\} \quad \text{à } \delta \text{ fixé.}$$

Ce problème, coercif et semi-continu inférieur faible, admet une solution (u_δ, w_δ) vérifiant les équations :

$$(0.13) \quad \left\{\begin{array}{l} D^4 w_\delta - \frac{q}{EI} D^2 w_\delta - \delta (D w_\delta)^2 D^2 w_\delta = p \ \text{ sur } (0,\ell) \\[2mm] w_\delta(0) = w_\delta(\ell) = D w_\delta(0) = 0 \\[2mm] D^2 w_\delta(\ell) = -\frac{m}{EI} \end{array}\right.$$

$$(0.14) \quad u'_\delta(x) + \frac{1}{2} w'^2_\delta(x) = \frac{q}{EA_o} \ \text{ sur } (0,\ell).$$

De plus lorsque $\delta \to 0$ (u_δ, w_δ) tend vers $(\bar{u}, \bar{w})$ solution de (0.8) et (0.9).

Au § 3. On étudie les équations (0.13) dans le cas où $p = m = 0$. Les constantes étant normalisées, le problème se présente sous la forme :

$$(0.15) \quad \left\{\begin{array}{l} D^4 w + \lambda^2 D^2 w - (Dw)^2 D^2 w = 0 \quad \text{sur} \quad (0,\pi) \\[2mm] w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0. \end{array}\right.$$

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le théorème :

THEOREME. $\{\lambda_k\}$ *désignant les valeurs propres du problème (0.10), alors pour tout* $K = 1,2,...$ *et pour tout* $\lambda \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ *il existe une paire de fonctions non triviales* $(w(x,\lambda), -w(x,\lambda))$ *appartenant à* $C^4(0,\pi)$ *solutions de (0.15).*

Signalons pour conclure que les conditions aux limites de (0.15) ne permettent pas de ramener ce problème à un problème d'ordre 2 pour lequel le principe du maximum peut être utilisé. Ce type de problèmes a été étudié par Turner [3] et Dickey [2]. Ce dernier auteur a notamment étudié la même équation (0.15) sous les conditions aux limites : $w(0) = w(\pi) = D^2 w(0) = D^2 w(\pi) = 0$. Il y développe, comme nous le ferons, une méthode de Galerkin.

1. - ETUDE DU PROBLEME ($\mathcal{P}$)

Nous étudions d'un point de vue variationnel les déformations d'une poutre rectiligne fixée à $x = 0$ et soumise à une distribution de forces $p(x)$. L'extrémité $x = \ell$ est libre et est soumise à la double action d'un moment m et d'une force q.

Sous les approximations faites par Washizu (cf. 0.1 et 0.2) la fonctionnelle énergie associée au problème est donnée par :

$$(1.1)\quad \mathcal{J}(u,w) = \frac{EA_o}{2}\int_o^\ell (u' + \frac{1}{2}w'^2)^2 dx + \frac{EI}{2}\int_o^\ell w''^2 dx - \int_o^\ell pw\,dx - qu(\ell) + m\,w'(\ell).$$

La recherche de l'équilibre du système conduit au problème du calcul des variations :

$$(\mathcal{P})\qquad \mathrm{Inf}\{\mathcal{J}(u,w)\ ;\ (u,w) \in H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)\ ;\ u(0) = w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0\}.$$

Il est assez facile de voir que la fonctionnelle $\mathcal{J}(.,.)$ est semi-continue inférieurement sur $H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)$ faible, par contre elle n'est pas coercive sur cet espace. Pour contourner cette difficulté on introduit le problème perturbé :

$$(\mathcal{P}_\epsilon)\qquad \mathrm{Inf}\{\mathcal{J}_\epsilon(u,w) = \mathcal{J}(u,w) + \epsilon\int_o^\ell w'^4\,dx\ ;\ (u,w) \in H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)\ ;$$
$$u(0) = w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0\}$$

Notre étude va essentiellement consister à obtenir des estimations a priori sur les solutions du problème ($\mathcal{P}_\epsilon$), puis de passer à la limite. Signalons dès à présent que ces estimations seront possibles sous une conditions d'inégalité sur les données q, ℓ et EI.

PROPOSITION 1.1. *Le problème ($\mathcal{P}_\epsilon$) admet au moins une solution (u_ϵ, w_ϵ) vérifiant les équations d'Euler :*

$$(1.2)_a\qquad -u''_\epsilon - \frac{1}{2}(w'^2_\epsilon)' = 0 \quad \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\,]0,\ell[\,)$$

$$(1.2)_b\qquad u_\epsilon(0) = 0\ ;\ u'_\epsilon(\ell) = \frac{q}{EA_o} - \frac{1}{2}w'^2_\epsilon(\ell)$$

$$(1.3)_a\qquad -(4\epsilon + \frac{EA_o}{2})(w'^3_\epsilon)' - EA_o(u'_\epsilon w')' + EI\,w^{(4)}_\epsilon - p = 0 \quad \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\,]0,\ell[\,)$$

$$(1.3)_b\qquad w_\epsilon(0) = w_\epsilon(\ell) = w'_\epsilon(0) = 0,\ w''_\epsilon(\ell) = -\frac{m}{EI}\quad (w^{(4)}_\epsilon = D^4 w_\epsilon = \frac{d^4}{dx^4} w_\epsilon\,).$$

Preuve. Notons

$$V = \left\{ (u,w) \in H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)\ ;\ u(0) = w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0 \right\}.$$

La fonctionnelle $\mathscr{J}_\epsilon(u,w)$ est semi-continue inférieurement faible et coercive sur V ; par conséquent, il existe au moins un point minimum $(u_\epsilon, w_\epsilon) \in V$ tel que :

$$\mathscr{J}'_\epsilon(u_\epsilon, w_\epsilon) \,.\, (\phi,\psi) = 0 \quad \text{pour tout } (\phi,\psi) \in V$$

en particulier pour $(\phi,\psi) \in \mathscr{D}(\ [0,\ell[\ )^2$ nous obtenons les équations $(1.2)_a$ et $(1.3)_a$ dans $\mathscr{D}'(\ ]0,\ell[\ )$ ainsi que les conditions limites contenues dans V.

Pour obtenir la condition limite $u'_\epsilon(\ell) = \dfrac{q}{EA_o} - \dfrac{1}{2} w'^2_\epsilon(\ell)$ on multiplie $(1.2)_a$ par une fonction $\phi \in H^1(0,\ell)$, $\phi(0) = 0$, on intègre par parties, et en comparant avec $\mathscr{J}'_\epsilon(u_\epsilon, w_\epsilon).(\phi,0) = 0$ il vient :

$$EA_o\, u'_\epsilon(\ell)\phi(\ell) + \frac{EA_o}{2} w'^2_\epsilon(\ell)\phi(\ell) - q\,\phi(\ell) = 0 \quad \text{pour tout } \phi \in H^1(0,\ell),\ \phi(0) = 0$$

$$\text{i.e.}\quad u'_\epsilon(\ell) = \frac{q}{EA_o} - \frac{1}{2} w'^2_\epsilon(\ell).$$

De même on multiplie $(1.3)_a$ par $\psi \in H^2(0,\ell)$, $\psi(0) = \psi(\ell) = \psi'(0) = 0$ en intégrant par parties, et en comparant avec $\mathscr{J}'_\epsilon(u_\epsilon, w_\epsilon)\,.\,(0,\psi) = 0$ on obtient :

$$-m \int_o^\ell \psi''\, dx = EI\, w''_\epsilon(\ell)\, \psi'(\ell) \quad \text{pour tout } \psi$$

$$\text{i.e.}\quad w''_\epsilon(\ell) = -\frac{m}{EI}.$$

■

Remarque. u_ϵ vérifie
$$\begin{cases} -u''_\epsilon = \dfrac{1}{2}(w'^2_\epsilon)' \\[2ex] u_\epsilon(0) = 0\ ;\ u'_\epsilon(\ell) = \dfrac{q}{EA_o} - \dfrac{1}{2} w'^2_\epsilon(\ell)\,. \end{cases}$$

Or $w_\epsilon \in H^2(0,\ell)$ donc $w'_\epsilon \in L^\infty(0,\ell)$ et la fonction $\frac{1}{2}(w'^2_\epsilon)' = w'_\epsilon\, w''_\epsilon$ est une fonction de $L^2(0,\ell)$. La régularité des problèmes mixtes entraînent : $u_\epsilon \in H^2(0,\ell)$; l'équation $(1.2)_a$ est donc vérifiée pour p.p. $x \in (0,\ell)$ et $u'_\epsilon(\ell)$ a un sens.

On peut intégrer $(1.2)_a$: $-\ u'_\epsilon(x) - \frac{1}{2} w'^2_\epsilon(x) = \text{cte}$, p.p. $x \in (0,\ell)$. On fait $x = \ell$, d'où $-\ (u'_\epsilon(\ell) + \frac{1}{2} w'^2_\epsilon(\ell)) = -\ \frac{q}{EA_o} = \text{cte}$ et finalement le système (1.2) est équivalent au système :

$(1.4)_a$ $$u'_\epsilon(x) + \frac{1}{2} w'^2_\epsilon(x) = \frac{q}{EA_o} \quad \text{p.p. } x \in (0,\ell)$$

$(1.4)_b$ $$u(0) = 0.$$

■

On aborde maintenant la question des estimations a priori.

PROPOSITION 1.2. *Sous l'hypothèse :*

(1.5) $0 < q + EI\,\lambda_1^2$, *où* λ_1^2 *est la plus petite valeur propre du problème :* $D^4w + \lambda^2 D^2w = 0$, $w(0) = w(\ell) = Dw(0) = D^2w(\ell) = 0$, *la suite* (u_ϵ, w_ϵ) *est bornée dans* V.

Preuve. Le couple (u_ϵ, w_ϵ) vérifie l'inégalité :

$$\mathscr{J}_\epsilon(u_\epsilon, w_\epsilon) \leqslant \mathscr{J}_\epsilon(\phi,\psi) \quad \text{pour tout } (\phi,\psi)\in V.$$

Si on choisit $\phi = \psi = 0$ on a

$$\mathscr{J}_\epsilon(u_\epsilon, w_\epsilon) \leqslant 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{EA_o}{2}\int_o^\ell (u'_\epsilon + \frac{1}{2}w'^2_\epsilon)^2 dx + \frac{EI}{2}\int_o^\ell w''^2_\epsilon dx - \int_o^\ell p w_\epsilon dx - q u_\epsilon(\ell) + m w'_\epsilon(\ell) + \epsilon\int_o^\ell w'^2_\epsilon dx \leqslant 0$$

on déduit de cette inégalité :

$$\frac{EI}{2}\int_o^\ell w''^2_\epsilon\, dx - \int_o^\ell p w_\epsilon\, dx - q u_\epsilon(\ell) + m w'_\epsilon(\ell) \leqslant 0 \tag{1.6}$$

or : $u_\epsilon(\ell) = \displaystyle\int_o^\ell u'_\epsilon(x)dx = -\frac{1}{2}\int_o^\ell w'^2_\epsilon(x)dx + \frac{q\ell}{EA_o}$ d'après $(1.4)_a$, on remplace $u_\epsilon(\ell)$ dans (1.6) :

$$\frac{EI}{2}\int_o^\ell w''^2_\epsilon\, dx - \int_o^\ell p w_\epsilon\, dx + \frac{1}{2}\int_o^\ell w'^2_\epsilon\, dx - \frac{q^2\ell}{EA_o} + m w'_\epsilon(\ell) \leqslant 0. \tag{1.7}$$

a) Si $q \geqslant 0$ alors :

$$\frac{EI}{2}\int_o^\ell w''^2_\epsilon\, dx \leqslant \int_o^\ell p w_\epsilon\, dx + m w'_\epsilon(\ell) + \frac{q^2\ell}{EA_o}$$

ce qui entraîne grâce aux inégalités de Poincaré :

$$\frac{EI}{2}\, |w''_\epsilon|^2_{L^2} \leqslant |p|_{L^2}\, \ell^2\, |w''_\epsilon|_{L^2} + |m|\,\ell\, |w''_\epsilon|_{L^2} + \frac{q^2\ell}{EA_o}$$

i.e. $$\|w_\epsilon\|_V \leqslant \text{cte} < \infty.$$

b) Si $q < 0$,

on écrit $w_\epsilon = \overline{w} + \phi_\epsilon$ où $\overline{w}$ est une fonction indépendante de ϵ vérifiant les conditions aux limites : $\overline{w}(0) = \overline{w}(\ell) = D\overline{w}(0)$, $D^2\overline{w}(\ell) = -\frac{m}{EI}$ (i.e. les mêmes conditions aux limites que w_ϵ). Soit λ_1^2 la plus petite valeur propre du problème :

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^4 w + \lambda^2 D w = 0 \\ \\ w(0) = w(\ell) = Dw(0) = D^2 w(\ell) = 0. \end{array} \right.$$

Par construction $\phi_\epsilon = w_\epsilon - \overline{w}$ vérifie les conditions aux limites de $\mathscr{S}$; par conséquent :

$$\int_o^\ell \phi_\epsilon''^2 \geqslant \lambda_1^2 \int_o^\ell \phi_\epsilon'^2$$

c'est-à-dire :

$$\int_o^\ell w_\epsilon''^2 + \int_o^\ell \overline{w}''^2 - 2\int_o^\ell w_\epsilon'' \overline{w}'' \geqslant \lambda_1^2 \int_o^\ell w_\epsilon'^2 + \lambda_1^2 \int_o^\ell \overline{w}'^2 - 2\lambda_1^2 \int_o^\ell w_\epsilon' \overline{w}'$$

d'où l'on déduit en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$|w_\epsilon''|^2_{L^2} + |\overline{w}''|^2_{L^2} + 2\,|w_\epsilon''|_{L^2}\,|\overline{w}''|_{L^2} + 2\lambda_1^2\,|w_\epsilon'|_{L^2}\,|\overline{w}'|_{L^2} \geqslant \lambda_1^2\,|w_\epsilon'|^2_{L^2}$$

mais grâce à l'inégalité de Poincaré on a $|w_\epsilon'|_{L^2} \leqslant \ell\,|w_\epsilon''|_{L^2}$ d'où finalement :

$$|w_\epsilon''|^2_{L^2} + 2(|\overline{w}''|_{L^2} + \ell\lambda_1^2\,|\overline{w}'|_{L^2})\,|w_\epsilon''|_{L^2} + |\overline{w}''|_{L^2} \geqslant \lambda_1^2\,|w_\epsilon|^2_{L^2}.$$

On injecte cette estimation dans (1.7) ; il vient en utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré :

$$\left(\frac{EI}{2} + \frac{q}{2\lambda_1^2}\right) |w_\epsilon''|^2_{L^2} \leqslant c\,|w_\epsilon''|_{L^2} + c$$

où c désigne des constantes indépendantes de ϵ.

Dans ce cas nous obtenons $\|w_\epsilon\|_V \leqslant c < \infty$ si $\frac{EI}{2} + \frac{q}{2\lambda_1^2} > 0$

i.e. (1.5) $$0 < q + EI\lambda_1^2.$$

La condition (1.5) étant vérifiée si $q \geqslant 0$, la suite w_ϵ est donc bornée dans $H^2(o,\ell)$ sous cette seule condition.

Pour terminer la démonstration il suffit de montrer que u_ϵ est bornée dans $H^1(o,\ell)$; ceci est immédiat grâce à $(1.4)_a$.

Ces estimations a priori nous permettent de passer à la limite et de montrer l'existence d'une solution pour le problème ($\mathscr{P}$).

PROPOSITION 1.3. *Sous l'hypothèse (1.5) :* $0 < q + EI\lambda_1^2$ *le problème* ($\mathscr{P}$) *admet une solution unique* (u,w) *satisfaisant les équations :*

$$(1.8)_a \qquad u'' + \frac{1}{2}(w'^2)' = 0$$

$$(1.8)_b \qquad u(0) = 0 \; ; u'(\ell) = \frac{q}{EA_o} - \frac{1}{2} w'^2(\ell)$$

$$(1.9)_a \qquad w^{(4)} - \frac{q}{EI} w'' - p = 0$$

$$(1.9)_b \qquad w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0 \; ; w''(\ell) = -\frac{m}{EI}$$

Preuve. La suite (u_ϵ, w_ϵ) étant bornée dans V grâce à (1.5), il existe $(u,w) \in V$ tel que, à une sous-suite près :

$$(u_\epsilon, w_\epsilon) \rightarrow (u,w) \text{ dans V faible}$$

On passe à la limite dans $\mathscr{P}_\epsilon$, il vient :

$$\mathscr{J}(u,w) \leqslant \underline{\lim}\, \mathscr{J}(u_\epsilon, w_\epsilon) + \lim \epsilon\, |w'_\epsilon|^4_{L^4} \leqslant \mathscr{J}(\varphi,\psi) \text{ pour tout } (\varphi,\psi) \in V,$$

ce qui entraîne :

$$\mathscr{J}(u,w) = \operatorname*{Inf}_V \mathscr{J}(\varphi,\psi).$$

On déduit les équations (1.8) : elles sont l'interprétation de l'équation d'Euler $\mathscr{J}'(u,w) \,.\, (\varphi,0) = 0$. Examinons plus en détails l'équation $(1.9)_a$.

L'équation d'Euler $\mathscr{J}'(u,w) \,.\, (0,\psi) = 0$ donne après interprétation :

$$(1.10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{EA_o}{2}(w'^3)' - EA_o(u'w')' + EI\, w^{(4)} - p = 0 \\ & w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0 \; ; w''(\ell) = -\frac{m}{EI} \end{aligned} \right.$$

En intégrant $(1.8)_a$ sous les conditions aux limites $(1.8)_b$ on a :

$$(1.11) \qquad u'(x) = -\frac{1}{2} w'^2(x) + \frac{q}{EA_o} \quad \text{ppx} \in (0,\ell).$$

On remplace u' par son expression (1.11) dans (1.10) ; il vient après simplification :

$$w^{(4)} - \frac{q}{EI} w'' - \frac{p}{EI} = 0 \quad \text{c'est-à-dire l'équation } (1.9)_a.$$

(on remarquera que les équations (1.9) sont linéaires et ne dépendent que de w).

En ce qui concerne l'unicité, nous la déduisons immédiatement des équations (1.9). Si w_1 et w_2 sont deux solutions des équations (1.9), nous obtenons, après avoir retranché les équations et multiplié scalairement par $(w_1 - w_2)$:

$$\int_0^\ell (w_1'' - w_2'')^2 dx + \frac{q}{EI} \int_0^\ell (w_1' - w_2')^2 dx \leqslant 0.$$

Or la fonction $w = w_1 - w_2$ vérifie les conditions aux limites :

$$w(0) = w(\ell) = Dw(0) = D^2 w(\ell) = 0$$

par conséquent :

$$\int_0^\ell w''^2 dx \geqslant \lambda_1^2 \int_0^\ell w'^2 dx$$

ce qui entraîne :

$$(\lambda_1^2 + \frac{q}{EI}) \int_0 (w_1' - w_2')^2 dx \leqslant 0$$

d'où l'unicité de w sous la condition :

$$\lambda_1^2 + \frac{q}{EI} > 0.$$

L'unicité de u se déduit de celle de w grâce aux équations (1.8), ou (1.11).

Les équations d'Euler du problème ($\mathscr{P}$) admettant une solution unique (u,w), il en résulte la même unicité pour ($\mathscr{P}$). ∎

Dans le paragraphe suivant on étudie plus en détails les équations (1.9). Nous allons en particulier regarder la structure des solutions au voisinage de la valeur propre λ_1.

2. - ETUDE DU PROBLEME SPECTRAL ASSOCIE A ($\mathscr{P}$)

Pour simplifier l'étude, on suppose que $\ell = \pi$ et que les équations (0.9) se présentent sous la forme :

$$(2.0) \qquad \begin{cases} D^4 w + \lambda^2 D^2 w = 0 \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0 \end{cases}$$

Nous donnons sans démonstration les expressions des valeurs propres et vecteurs propres du problème (2.0) ainsi que les propriétés fondamentales d'orthogonalité.

LEMME 2.1. *Le problème* (2.0) *admet une infinité dénombrable de solutions* (λ_n, w_n) *vérifiant :*

$$(2.1) \qquad \lambda_n \pi = \mathrm{tg}(\lambda_n \pi) \ , \ n \geqslant 1$$

$$(2.2) \qquad w_n(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\frac{\sin \lambda_n (x-\pi)}{\cos \lambda_n \pi} + \lambda_n (\pi - x) \right) , \ n \geqslant 1.$$

La famille w_n *étant orthonormalisée de la façon suivante :*

$$(2.3) \qquad \int_0^\pi w_j \, w_k =_3 \frac{2}{\lambda_j \lambda_k}$$

$$(2.4) \qquad \text{Pour } \ell = 1,2,4 \int_0^\pi D^\ell w_j \, D^\ell w_k = \delta_{jk} \, \lambda_j^{\ell-1} \, \lambda_k^{\ell-1}$$ ■

LEMME 2.2. *Pour tout* $j \geqslant 1$, *la fonction propre* w_j *possède* $(j-1)$ *zéros sur* $]0,\pi[$. ■

On aborde maintenant l'étude des équations d'Euler associées au problème ($\mathscr{P}$). Elles sont de la forme :

$$(2.5) \qquad \begin{cases} D^4 w + \lambda^2 D^2 w = f \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = 0 \ ; \ D^2 w(\pi) = a \end{cases}$$

On se ramène d'abord au cas où $a = 0$. Pour cela on résoud le problème :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} D^4 v + \lambda^2 D^2 v = 0 \\ v(0) = v(\pi) = Dv(0) \ ; \ D^2 v(\pi) = a \end{cases}$$

Ce problème admet pour tout $\lambda \neq \lambda_j$ une solution de la forme :

$$v(x,\lambda) = A \sin \lambda x - \left(\frac{\lambda^3 \pi A + a}{\lambda^2}\right) \cos \lambda x - \lambda A x + \left(\frac{\lambda^3 \pi A + a}{\lambda^2}\right)$$

où $A = \dfrac{a \cos(\lambda\pi) - m}{\lambda^2 \sin(\lambda\pi) - \lambda\pi \cos(\lambda\pi)}$.

On pose ensuite $u = w - v$. Si w satisfait (2.5) alors u vérifie :

$$(2.7) \qquad \begin{cases} D^4 u + \lambda^2 D^2 u = f \\ u(0) = u(\pi) = Du(0) = D^2 u(\pi) = 0. \end{cases}$$

On va résoudre (2.7) à l'aide d'un développement en série sur la famille des vecteurs propres $\{w_j\}$. On cherche une solution sous la forme :

$$u(x,\lambda) = \sum_1^\infty a_j(\lambda) w_j(x)$$

On remplace formellement $u(x,\lambda)$ dans (2.7) et on multiplie l'équation obtenue par w_i ; grâce aux propriétés fondamentales (2.4) d'orthonormalité des vecteurs propres w_j, il vient :

$$(2.8) \qquad \lambda_i^2 a_i(\lambda) - \lambda^2 a_i(\lambda) = \langle f, w_i \rangle_{L^2}$$

. Si $\lambda \neq \lambda_i$ alors $a_i(\lambda) = \dfrac{\langle f, w_i \rangle_{L^2}}{\lambda_i^2 - \lambda^2}$

. Si $\lambda = \lambda_i$ il est nécessaire d'imposer $\langle f, w_i \rangle_{L^2} = 0$ et dans ce cas a_i est arbitraire.

Ces calculs formels vont nous permettre d'étudier la structure des solutions au voisinage de la première valeur propre λ_1. C'est l'objet du théorème suivant.

THEOREME 2.1. *Pour tout* $\lambda \in \,]0,\lambda_1[$ *le problème* (2.7) *admet une solution unique* $u(x,\lambda) = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\langle f, w_i \rangle_{L^2}}{\lambda_i^2 - \lambda^2} w_i(x)$ *ayant les propriétés suivantes :*

1) *La fonction* $\lambda \to u(x,\lambda) \in C^\infty(]0,\lambda_1[)$
2) *La fonction* $\lambda \to |D\, u(x,\lambda)|^2_{L^2}$ *est croissante*
3) $\lim\limits_{\lambda \to \overline{\lambda_1}} u(x,\lambda) = +\infty$ *si* $\langle f, w_1 \rangle_{L^2} \neq 0$

Preuve. Formellement nous savons déjà que $a_j(\lambda) = \dfrac{<f,w_j>_{L^2}}{\lambda_j^2 - \lambda^2}$. Montrons que la série $\sum_1^\infty a_j(\lambda)$ est convergente.

$$|a_j(\lambda)| \leqslant \frac{|f|_{L^2} |w_j|_{L^2}}{\lambda_j^2 - \lambda^2}$$

or :

$$|w_j|_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\lambda_j}$$

d'où

$$\sum_1^\infty |a_j(\lambda)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}} |f|_{L^2} \sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda^2)\lambda_j}$$

les valeurs propres λ_j vérifient les inégalités :

$$\ldots < \lambda_{j-1} < \lambda_j < \frac{1}{2} + j < \lambda_{j+1} < \frac{1}{2} + (j+1) < \ldots$$

La série $\sum_1^\infty \dfrac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda^2)\lambda_j}$ est donc convergente et par comparaison il en est de même pour la série $\sum_1^\infty |a_j(\lambda)|$. La définition de la fonction $u(x,\lambda)$ a bien un sens et cette fonction est l'unique solution des équations (2.7). Montrons que $u(x,\lambda)$ est dérivable en λ.

$$\frac{d a_j}{d\lambda} = 2\lambda \frac{<f,w_j>_{L^2}}{(\lambda_j^2 - \lambda^2)^2}$$

$$\sum_1^\infty \left|\frac{da_j}{d\lambda}\right| \leqslant 2 \sqrt{\frac{2}{3}} |f|_{L^2} . \lambda . \sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda_j^2 - \lambda^2)^2 \lambda_j} < \infty$$

D'où :

$$\frac{du}{d\lambda} = \sum_1^\infty \frac{da_j}{d\lambda} (\lambda) w_j(x).$$

Il est facile de voir qu'on peut réitérer indéfiniment le procédé et d'en conclure que la fonction $\lambda \to u(x,\lambda)$ est $C^\infty(]0,\lambda_1[)$.

Pour montrer la croissance en λ de la fonction $|Du(x,\lambda)|^2_{L^2}$ il suffit de remarquer que l'on a :

$$|Du(x,\lambda)|^2_{L^2} = \sum_1^\infty \frac{(<f,w_j>_{L^2})^2}{(\lambda_j^2 - \lambda^2)^2}$$

d'où :

$$\frac{d}{d\lambda}\,|Du(x,\lambda)|^2_{L^2} = 4\lambda \sum_1^\infty \frac{(<f,w_j>_{L^2})^2}{(\lambda_j^2-\lambda^2)^3},$$

quantité qui est positive pour $\lambda < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$

Le fait que $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1} u(x,\lambda) = +\infty$ découle clairement de la construction de

$$u(x,\lambda) = \frac{<f,w_1>_{L^2}}{\lambda_1^2-\lambda^2}\,w_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{<f,w_j>_{L^2}}{\lambda_j^2-\lambda^2}\,.\,w_j \qquad \blacksquare$$

La principale conséquence du théorème 2.1 est que la fonction $u(x,\lambda)$ ne bifurque pas au voisinage de $\lambda = \lambda_1$, ce qui physiquement peut paraître surprenant. En effet, il est connu en mécanique que si l'extrémité d'une poutre est soumise à l'action d'une force axiale, il apparaît au-delà d'un certain seuil critique un phénomène de flambage.

On peut donc être amené à penser que le modèle proposé par Washizu est surtout valide pour des petites valeurs de paramètre λ, c'est-à-dire pour des petites déformations. Il nous a paru naturel de reconsidérer les calculs de Washizu et de voir si d'autres approximations ne conduisaient pas à un phénomène de bifurcation.

On suppose toujours que les déformations se font dans le plan (x,z) et on désigne respectivement pas $\mathcal{U} = U\vec{\tau}_1 + W\vec{\tau}_3$ et $\mathcal{U}_o = u\vec{\tau}_1 + w\vec{\tau}_3$ les vecteurs déplacements d'un point quelconque de la poutre et d'un point situé sur l'axe central. Les fonctions U, W, u, w ne dépendent que de la variable x (hypothèse de Bernouilli-Euler) ; les vecteurs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_o$ sont liés par la relation (cf. Washizu [1], p 135) $\mathcal{U} = \mathcal{U}_o + z(\vec{n} - \vec{\tau}_3)$ où $\vec{n}$ est la normale à l'axe principal ; son expression est :

$$\vec{n} = \frac{-w'\vec{\tau}_1 + (1+u')\vec{\tau}_3}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}}$$

D'où

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_o + z\left(\frac{-w'\vec{\tau}_1 + (1+u')\vec{\tau}_3}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}} - \tau_3\right)$$

En identifiant les composantes on obtient :

(2.9) $$U = u - \frac{zw'}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}}$$

(2.10) $$W = \frac{z(1+u')}{\sqrt{(1+u')^2 + w'^2}} - z + w.$$

Nous commençons maintenant à développer les approximations. Comme Washizu on suppose : $(1+u')^2 + w'^2 \cong 1$ (ce qui signifie qu'on néglige les forces agissant sur l'axe central). Les composantes U et W deviennent :

$$U = u - zw' \tag{2.11}$$

$$W = zu' + w. \tag{2.12}$$

Il reste à calculer le tenseur des déformations (Washizu [1], p 55) ; une deuxième approximation est faite, on suppose : $u' \cong \frac{1}{2} w'^2 \cong z$ et dans le calcul du tenseur des déformations on néglige tous les termes d'ordre z^2, on obtient :

$$\begin{aligned} e_{xx} &= u' + \frac{1}{2} w'^2 - zw'' \\ e_{zz} &= \frac{1}{4} w'^2 \\ e_{yy} &= e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

C'est exactement à ce niveau que se situe la différence entre notre approximation et celle de Washizu. Ce dernier prend pour composantes du vecteur déplacement les valeurs :

$$U = u - zw' \tag{2.14}$$

$$W = w \tag{2.15}$$

et avec ces composantes il calcule le tenseur des déformations (en négligeant les termes d'ordre z^2):

$$\left\{ \begin{aligned} & e_{xx} = u' + \frac{1}{2} w'^2 - zw'' \\ & e_{zz} = e_{yy} = e_{yz} = e_{zx} = e_{xy} = 0 \end{aligned} \right. \tag{2.16}$$

La différence essentielle entre notre approche et celle de Washizu est que cet auteur néglige dans la composante W le terme z u' d'ordre z^2 avant de calculer e_{zz} ; nous, nous négligeons les termes d'ordre z^2 dans les expressions finales du tenseur des déformations.

Avec les relations (2.13) la fonctionnelle énergie associée au système s'écrit :

$$\hat{\mathcal{J}}(u,w) = \mathcal{J}(u,w) + \frac{Ao}{4} \int_0^{\ell} w'^4 \, dx \,, \text{ où } \mathcal{J}(u,w) \text{ a l'expression (1.1).}$$

On peut remarquer que $\hat{\mathscr{J}}(u,w)$ est du type $\mathscr{J}_\epsilon(u,w)$ à savoir :

$$\hat{\mathscr{J}}(u,w) = \mathscr{J}_{\frac{Ao}{4}}(u,w)$$

Avec toutes ces considérations il parait naturel d'étudier plus en détail les solutions du problème :

$$(\mathscr{P}_S) : \operatorname*{Inf}_V \left\{ \mathscr{J}_S(u,w) = \mathscr{J}(u,w) + S \int_0^\ell w'^4 \, dx \right\} ; \text{S paramètre fixé (lorsque } S \to 0$$

$\mathscr{P}_S$ s'identifie à $\mathscr{P}$).

La fonctionnelle $\mathscr{J}_S$ étant s.c.i. faible et coercive sur :

$$V = \left\{ (u,w) \in H^1 \times H^2(0,\ell) \, ; u(0) = w(0) = w(\ell) = w'(0) = 0 \right\},$$

le problème ($\mathscr{P}_S$) admet au moins une solution $(u_S,w_S) \in V$ caractérisée par l'équation d'Euler (cf le § 1 avec $\mathscr{J}_\epsilon$) :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u'_S(x) + \dfrac{1}{2} w'^2_S(x) = \dfrac{q}{EAo} & \text{ppx } (0,\ell) \\ u_S(0) = 0 & \end{array} \right.$$

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^4 w_S - \dfrac{q}{EI} D^2 w_S - \dfrac{4S}{EI} D((Dw_S)^3) - \dfrac{p}{EI} = 0 \\ w_S(0) = w_S(\ell) = Dw_S(0) = 0 \, ; D^2 w_S(\ell) = -\dfrac{m}{EI} \end{array} \right. \qquad \blacksquare$$

Nous allons dans le paragraphe suivant étudier les équations (2.18) sous les hypothèses $p = m = 0$. On suppose également que les constantes sont normalisées et que $\ell = \pi$; c'est-à-dire on étudie les équations (2.18) sous la forme :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} D^4 w + \lambda^2 D^2 w - \dfrac{1}{3} D((Dw)^3) = 0 \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0 \end{array} \right. \qquad \blacksquare$$

3. - ETUDE DU PROBLEME NON LINEAIRE

On discute l'existence de solutions non triviales pour le problème du quatrième ordre :

$$(3.1)\qquad \begin{cases} D^4w + \lambda^2 D^2 w - (Dw)^2\, D^2 w = 0 \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0 \end{cases}$$

Le résultat essentiel est le théorème :

THEOREME 3.1. *On note* $\{\lambda_k\}_{k \geqslant 1}$ *les valeurs propres de l'opérateur linéaire associé au problème (3.1) alors pour tout* $k \geqslant 1$ *et tout* $\lambda \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ *il existe une paire de fonctions non triviales* $(w(x,\lambda), -w(x,\lambda))$ *quatre fois continûment différentiables, solutions du problème (3.1).*

On remarquera que les conditions limites du problème (3.1) ne sont pas standard et en particulier ce problème ne peut pas se ramener à un problème d'ordre 2. Ce type de problème a été étudié par exemple par Turner [3] et Dickey [2] . Ce dernier auteur a notamment étudié la même équation (3.1) sous les conditions aux limites : $w(0) = w(\pi) = D^2w(0) = D^2w(\pi) = 0$. Il y développe une technique de Galerkin et obtient différentes estimations sur les solutions.

Nous utilisons ici la même technique que Dickey, c'est-à-dire nous cherchons une solution de la forme :

$$(3.2)\qquad w(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\lambda)\, w_j(x)$$

où les fonctions w_j sont les vecteurs propres du système (2.0) :

$$(3.3)\qquad w_j(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\lambda_j^2}\left(\frac{\sin \lambda_j(x-\pi)}{\cos \lambda_j \pi} + \lambda_j(\pi - x)\right)$$

On remplace formellement (3.2) dans (3.1) et on multiplie l'équation ainsi obtenue par w_j, $j = 1,2,\ldots$. Nous obtenons le système algébrique, infini, non linéaire :

$$< \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, Dw_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, D^2 w_k - (\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, Dw_k)^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, D^2 w_k\, , w_j >_{L^2} = 0, j = 1,2\ldots$$

soit en intégrant par parties et en tenant compte des propriétés d'orthonormalité des fonctions Dw_j et D^2w_j (cf § 2, Lemme 2.1) :

$$(3.4)\qquad (\lambda_j^2 - \lambda^2)a_j - \int_0^{\pi} (\sum_1^{\infty} a_k\, Dw_k)^2 (\sum_1^{\infty} a_k\, D^2 w_k)\, w_j\, dx = 0, \quad j = 1,2,\ldots$$

où encore :

$$(3.5) \qquad (\lambda_j^2-\lambda^2)a_j+\frac{1}{3}\int_o^{\pi}\Big(\sum_1^{\infty} a_k Dw_k\Big)^3 Dw_j=0\,, \quad j=1,2,\ldots$$

Pour résoudre le système infini (3.5) on introduit le système fini :

$$(3.6) \qquad (\lambda_j^2-\lambda^2)a_j+\frac{1}{3}\int_o^{\pi}\Big(\sum_1^{N} a_k Dw_k\Big)^3 Dw_j=0\,, \; j=1,2,\ldots,N$$

On montrera l'existence de solutions non triviales $(a_1^N \ldots, a_N^N)$ pour le système (3.6). Puis on établira plusieurs estimations a priori pour la suite $N \to (a_1^N,\ldots,a_n^N)$ et on déduira par passage à la limite une solution pour le système (3.5), ce qui nous permettra de conclure l'existence de solutions non triviales pour le problème (3.1).

Résolution de (3.6)

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé on définit la surface :

$$H_N(\vec{a}_N)=H_N(a_1,a_2,\ldots,a_N)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} a_j^2(\lambda_j^2-\lambda^2)+\frac{1}{12}\int_o^{\pi}\Big(\sum_1^{N} a_j Dw_j\Big)^4 dx,$$

et on se fixe k quelconque supérieur ou égal à un.

LEMME 3.2. *Pour* $\lambda \in]\lambda_k\,,\lambda_{k+1}[$, *il existe* $\vec{a}_N=(a_1,\ldots,a_N)$ *et* $\vec{b}_N=b_1,\ldots,b_N)$ *tels que :*

$$H_N(a_1,\ldots,a_N) < 0 \quad et \quad H_N(b_1,\ldots,b_n) > 0.$$

Preuve. Posons $a_N=(0,0,\ldots,a_k,0,\ldots,0)$; $a_k \neq 0$

$$H_N(\vec{a}_N) < 0 \iff \frac{1}{2}(\lambda_k^2-\lambda^2)\,a_k^2+\frac{1}{12}\,a_k^4\int_o^{\pi}(Dw_k)^4\,dx < 0$$

i.e.

$$(3.7) \qquad 0 < a_k^2 < \frac{6(\lambda^2-\lambda_k^2)}{\| Dw_k \|_{L^4}^4}$$

De même posons $\vec{b}_N=(0,0,\ldots,0,b_{k+1},0,\ldots,0)$; $b_{k+1} \neq 0$

$$H_N(b_N)=\frac{1}{2}(\lambda_{k+1}^2-\lambda^2)b_{k+1}^2+\frac{1}{12}\,b_{k+1}^4\,\| Dw_{k+1}\|_{L^4}^4 > \frac{1}{2}(\lambda_{k+1}^2-\lambda^2)b_{k+1}^2 > 0$$

D'où le Lemme avec a_k vérifiant (3.7) et $b_{k+1} \neq 0$ quelconque. ∎

LEMME 3.3. *Pour tout* $\vec{a}_N$ *dans* IR^N, $H_N(\vec{a}_N)$ *vérifie l'estimation.*

(3.8) $$H_N(\vec{a}_N) \geqslant \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)\,a_j^2 + \frac{1}{12\pi}\left(\sum_1^N a_j^2\right)^2$$

Preuve. $\forall\,\mu \in \mathrm{IR}$ on a :

$$H_N(\vec{a}_N) = \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)\,a_j^2 + \frac{1}{12}\int_0^\pi \left[\left(\sum_1^N a_j Dw_j\right)^2-\mu\right]^2 dx - \frac{\mu^2\pi}{12} + \frac{\mu}{6}\int_0^\pi \left(\sum_1^N a_j Dw_j\right)^2 dx$$

$$H_N(\vec{a}_n) \geqslant \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)a_j^2 - \frac{\mu^2\pi}{12} + \frac{\mu}{6}\sum_1^N a_j^2 \quad \text{(orthonormalité des } Dw_j\text{)}$$

Ce qui entraîne :

$$H_N(\vec{a}_N) \geqslant \sup_{\mu\in \mathrm{IR}} \left\{ \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)a_j^2 - \frac{\mu^2\pi}{12} + \frac{\mu}{6}\sum_1^N a_j^2 \right\}$$

i.e. le résultat annoncé

$$H_N(\vec{a}_N) \geqslant \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)a_j^2 + \frac{1}{12\pi}\left(\sum_1^N a_j^2\right)^2.$$

PROPOSITION 3.1. *La fonction* H_N *admet sur* IR^N *un minimum non trivial* $\vec{a}_N$ *si* $\lambda \in \,]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$.

Preuve. La continuité de H_N jointe à l'estimation (3.8) assure l'existence d'un minimum $\vec{a}_N$; le lemme (3.2) montre que ce minimum est non trivial. ■

COROLLAIRE. *Le système (3.6) admet une solution non triviale.*

Preuve. Le minimum de H_N vérifie $\dfrac{\partial H_N}{\partial a_j} = 0$, $j = 1,\ldots,N$. Ces N équations donnent exactement le système (3.6). ■

Nous allons établir maintenant plusieurs estimations a priori. Dans tout ce qui suit on supposera $\lambda \in \,]\lambda_k\,,\,\lambda_{k+1}[$ et $\vec{a}_N = (a_1^N,\ldots,a_N^N)$ désignera une solution non triviale du système (3.6). On notera également C toutes les constantes intervenant dans les majorations et ne dépendant pas de N.

LEMME 3.4. *Il existe une constante* c *telle que :*

(3.9) $$\sum_1^N (a_j^N)^2 \leqslant c$$

(3.10) $$\sum_1^N \lambda_j^2\,(a_j^N)^2 \leqslant c$$

Preuve.

$$H_N(\vec{a}_N) \leqslant H_N(o) = 0$$

Soit :

$$\frac{1}{12\pi}\Big(\sum_1^N (a_j^N)^2\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2 \leqslant 0 \tag{3.11}$$

D'où pour $\ldots \leqslant \lambda_{k-1} \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant \lambda_{k+2} \leqslant \ldots$.

$$\frac{1}{6\pi}\Big(\sum_1^N (a_j^N)^2\Big)^2 + \sum_{k+1}^N (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2 \leqslant \sum_1^k (\lambda^2 - \lambda_j^2)(a_j^N)^2$$

Pour $\lambda < \lambda_{k+1}$ on a : $\displaystyle\sum_{k+1}^N (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2 \geqslant 0$. D'où

$$\frac{1}{6\pi}\Big(\sum_1^N (a_j^N)^2\Big)^2 \leqslant \sum_1^k (\lambda^2 - \lambda_j^2)(a_j^N)^2$$

Pour conclure il reste à majorer : $\displaystyle\sum_1^k (\lambda^2 - \lambda_j^2)(a_j^N)^2$. Pour cela on reprend l'égalité :

$$0 \geqslant H_N(\vec{a}_N) \geqslant \frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2 - \mu^2\frac{\pi}{12} + \frac{\mu}{6}\sum_1^N (a_j^N)^2, \quad \forall \mu \in \mathrm{IR}$$

Pour $\lambda < \lambda_{k+1}$ on a :

$$\mu^2\frac{\pi}{12} \geqslant \frac{1}{2}\sum_1^k (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2 + \frac{\mu}{6}\sum_1^k (a_j^N)^2 + \frac{\mu}{6}\sum_{k+1}^N (a_j^N)^2, \quad \forall \mu \in \mathrm{IR}$$

On choisit : $\displaystyle\frac{\mu}{3} = \lambda^2 - \lambda_1^2 + \frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{2} > 0$

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)\frac{\pi}{16} > \frac{1}{2}\sum_1^k (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2 + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda_1^2)\sum_1^k (a_j^N)^2 + \frac{1}{4}(\lambda^2 - \lambda_1^2)\sum_1^k (a_j^N)^2.$$

La somme des deux premiers termes du membre de droite dans l'inégalité ci-dessus est positive, d'où :

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2\frac{\pi}{16} \geqslant \frac{1}{4}(\lambda^2 - \lambda_1^2)\sum_1^k (a_j^N)^2$$

i.e. $\displaystyle(\lambda^2 - \lambda_1^2)\frac{\pi}{4} \geqslant \sum_1^k (a_j^N)^2,$

ce qui entraîne :

$$\Big(\sum_1^N (a_j^N)^2\Big)^2 \leqslant \frac{3}{2}\,\pi^2(\lambda^2-\lambda_1^2)\ \operatorname*{Sup}_{j=1,k}\ (\lambda-\lambda_j^2)\ \sum_1^K (a_j^N)^2 = \frac{3}{2}\,\pi^2(\lambda^2-\lambda_1^2)^2.$$

D'où (3.9) : $\displaystyle\sum_1^N (a_j^N)^2 \leqslant c.$

L'estimation (3.10) se déduit de (3.11) qui entraîne :

$$\frac{1}{2}\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)\,(a_j^N)^2 \leqslant 0$$

$$\frac{1}{2}\sum_1^N \lambda_j^2(a_j^N)^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\lambda^2\sum_1^N (a_j^N)^2$$

i.e. (3.10) $\displaystyle\sum_1^N \lambda_j^2(a_j^N)^2 \leqslant c\,.$

LEMME 3.5. *Il existe une constante* c *telle que pour* N *assez grand on ait*

(3.12) $$\sum_1^N |a_j^N| \leqslant c\,.$$

Preuve. La suite $\vec{a}_N$ vérifie (3.6) i.e.

$$(\lambda_j^2-\lambda^2)\,a_j^N = -\frac{1}{3}\int_0^\pi \Big(\sum_1^N a_k^N\,Dw_k\Big)^3 Dw_j\,dx \qquad j=1,\dots,N.$$

Or
$$Dw_j = \frac{1}{\lambda_j\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\cos\lambda_j(x-\pi)}{\cos\lambda_j\pi} - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\lambda_j}.$$

Mais, par définition : $\lambda_j\pi = \dfrac{\sin\lambda_j\pi}{\cos\lambda_j\pi}$,

d'où
$$Dw_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\cos\lambda_j(x-\pi)}{\sin\lambda_j\pi} - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\lambda_j}.$$

De plus nous avons vu au paragraphe 2 que $\lambda_j \sim \frac{1}{2} + j$ pour j suffisamment grand, ce qui entraîne : $|\sin\lambda_j\pi| > \frac{1}{2}$ et $\lambda_j \geqslant 1$ et donc

(3.13) $$|Dw_j| \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

De (3.6) on tire :

$$a_j^N = \frac{-1}{3(\lambda_j^2-\lambda^2)} \int_o^{\pi} (\sum_1^N a_k^N Dw_k)^3 Dw_j \, dx$$

ce qui donne avec (3.13)

(3.14) $$|a_j^N| \leqslant \frac{c}{\lambda_j^2-\lambda^2} \| \sum_1^N a_k^N Dw_k) \|_{L^3}^3 \quad \text{pour j assez grand.}$$

Pour conclure montrons : $\| \sum_1^N a_k^N Dw_k \|_{L^3} \leqslant c$. Pour cela on réutilise l'inégalité $H_N(a_N) \leqslant 0$:

$$\frac{1}{12}\int_o^{\pi} (\sum_1^N a_j^N Dw_j)^4 dx + \frac{1}{2}\sum_1^N (a_j^N)^2 (\lambda_j^2-\lambda^2) \leqslant 0$$

$$\|\sum_1^N a_j^N Dw_j \|_{L^4}^4 \leqslant \frac{1}{6} \sum_1^k (a_j^N)^2 (\lambda^2-\lambda_j^2) \leqslant c.$$

D'où par injection continue $L^4 \hookrightarrow L^3$:

$$\|\sum_1^N a_j^N Dw_j \|_{L^3} \leqslant c.$$

On reporte cette estimation dans (3.14) :

(3.15) $$|a_j^N| \leqslant \frac{c}{\lambda_j^2-\lambda^2} \quad \text{pour j assez grand}$$

or la série $\dfrac{1}{\lambda_j^2-\lambda^2}$ est sommable et par conséquent on a

$$\sum_1^N |a_j^N| \leqslant c.$$

■

COROLLAIRE. *La suite* $(\vec{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ *est bornée indépendamment de* N *et il existe une sous-suite notée encore* $(\vec{a}_N)_N$ *et un vecteur* $\vec{a}_\infty = (a_1, a_2, \ldots)$ *tels que* $\vec{a}_N \to \vec{a}_\infty$ (i.e. $a_j^N \to a_j \ \forall j$). *De plus* $\vec{a}_\infty$ *est solution du système (3.5).*

Preuve. Le seul point à vérifier est la convergence de la série

$$\sum_1^\infty a_k Dw_k = \sum_1^\infty a_j(\lambda) \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \lambda_j(x-\pi)}{\sin \lambda_j \pi} - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\lambda_j}\right).$$

Or pour j assez grand $|\sin \lambda_j \pi| > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\lambda_j} < 1$, donc $|\sum_1^\infty a_k Dw_k| \leqslant \sum_1^\infty |a_j| \leqslant c$ grâce au lemme 3.5.

■

LEMME 3.6. *Il existe une constante* c *telle que :*

$$\sum_1^N \lambda_j^4\,(a_j^N)^2 \leqslant c. \tag{3.16}$$

Preuve. On multiplie (3.6) par $\lambda_j^2\, a_j^N$ et on somme sur j :

$$\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)\lambda_j^2(a_j^N)^2 = -\frac{1}{3}\int_0^\pi \Big(\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big)^3\Big(\sum_1^N \lambda_j^2\, a_j^N\, Dw_j\Big)dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^\pi \Big(\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big)^2\Big(\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big)\Big(\sum_1^N \lambda_j^2\, a_j^N\, Dw_j\Big)dx.$$

On utilise l'inégalité de Young : $ab \leqslant \dfrac{1}{2\alpha}a^2+\dfrac{\alpha}{2}b^2,\ \ \forall\,\alpha\in \mathrm{IR}$

$$\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)\,\lambda_j^2(a_j^N)^2 \leqslant \frac{1}{6\alpha}\,\Big\|\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big\|_{L^4}^4+\frac{\alpha}{6}\int_0^\pi \Big(\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big)^2\Big(\sum_1^N \lambda_j^2\, a_j^N\, Dw_j\Big)^2 dx$$

or

$$\Big|\sum_1^N a_k^N\ Dw_k\Big| \leqslant \sum_1^N |a_k^N|\,|Dw_k| \leqslant c\sum_1^N |a_k^N| \leqslant c$$

d'après (3.13) et (3.12) respectivement. D'où

$$\sum_1^N (\lambda_j^2-\lambda^2)\,\lambda_j^2(a_j^N)^2 \leqslant \frac{1}{6\alpha}\,\Big\|\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big\|_{L^4}^4+\frac{c\alpha}{6}\int_0^\pi \Big(\sum_1^N \lambda_j^2\, a_j^N\, Dw_j\Big)^2 dx.$$

Mais par orthonormalité des w_j :

$$\int_0^\pi \Big(\sum_1^N \lambda_j^2\, a_j^N\, Dw_j\Big)^2 dx = \sum_1^N \lambda_j^4\,(a_j^N)^2$$

ce qui entraîne avec les Lemmes 3.4 et 3.5 :

$$\sum_1^N \lambda_j^4\,(a_j^N)^2\Big(1-\frac{c\alpha}{6}\Big) \leqslant \frac{1}{6\alpha}\,\Big\|\sum_1^N a_k^N\, Dw_k\Big\|_{L^4}^4+\lambda^2\sum_1^N \lambda_j^2(a_j^N)^2 \leqslant c,$$

d'où (3.16) :

$$\sum_1^N \lambda_j^4(a_j^N)^2 \leqslant \frac{c}{1-\dfrac{c\alpha}{6}}\quad \text{pour } \alpha<\frac{6}{c}. \qquad \blacksquare$$

COROLLAIRE. *Il existe une constante* c *telle que*

$$\sum_1^N |\lambda_j\, a_j^N| \leqslant c. \tag{3.17}$$

Preuve. $\sum_{1}^{N} |\lambda_j a_j^N| = \sum_{1}^{N} |\lambda_j^2 a_j^N| . \frac{1}{\lambda_j} \leqslant (\sum_{1}^{N} \lambda_j^4 (a_j^N)^2)^{1/2} . (\sum_{1}^{N} \frac{1}{\lambda_j^2})^{1/2} \leqslant c$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, au Lemme 3.6 et à la convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$. ■

Grâce à ces Lemmes techniques nous sommes maintenant en mesure de résoudre le problème (3.1), c'est-à-dire de montrer l'existence d'une solution non triviale pour $\lambda > \lambda_k$, $k = 1,...$

THEOREME 3.1. *On note* $\{\lambda_k\}_{k \geqslant 1}$ *les valeurs propres du problème*

$$\begin{cases} D^4 w + \lambda^2 D^2 w = 0 \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0 \end{cases}$$

alors pour tout $k \geqslant 1$ *et tout* $\lambda \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ *il existe une paire de fonctions non triviales* $(w(x,\lambda), -w(x,\lambda))$ *appartenant à* $c^4(0,\pi)$ *solutions du problème :*

$$\begin{cases} D^4 w + \lambda^2 D^2 w - (Dw)^2 D^2 w = 0 \\ w(0) = w(\pi) = Dw(0) = D^2 w(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Preuve. Nous avons montré au lemme 3.4 que la solution $\vec{a}_N = (a_1^N, a_2^N, ..., a_N^N)$ du système (3.6) vérifiait l'estimation (3.9) : $\sum_{1}^{N} (a_j^N)^2 \leqslant c$ et donc qu'il existait pour tout j une sous suite, notée a_j^N, telle que $a_j^N \to a_j$ $(N \to \infty)$.

Posons :

$$w(x,\lambda) = \sum_{1}^{\infty} a_j(\lambda) w_j \tag{3.18}$$

i.e.
$$w(x,\lambda) = \sum_{1}^{\infty} a_j(\lambda) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda_j^2} \left(\frac{\sin \lambda_j (x-\pi)}{\cos \lambda_j \pi} + \lambda_j (\pi - x) \right)$$

ou encore $(\lambda_j \pi = \operatorname{tg} \lambda_j \pi)$:

$$w(x,\lambda) = \sum_{1}^{\infty} a_j(\lambda) \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda_j (x-\pi)}{\lambda_j \sin \lambda_j \pi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\pi - x)}{\lambda_j} \right]$$

Pour j suffisamment grand on a : $|\sin \lambda_j \pi| > 1/2$ et $\frac{1}{\lambda_j} < 1$, par conséquent pour tout $x \in [0,\pi]$

la série $\sum_1^\infty a_j w_j$ est majorée, à une constante multiplicative près, par la série $\sum_1^\infty |a_j|$ qui est convergente grâce au lemme 3.5. La fonction $w(x,\lambda)$ est donc vérifiée par (3.18).

Par un raisonnement analogue on montre que la série dérivée première a un sens et que :

$$Dw(x,\lambda) = \sum_1^\infty a_j(\lambda)\, Dw_j(x) \tag{3.19}$$

Pour la dérivée seconde, formellement nous avons :

$$D^2 w(x,\lambda) = \sum_1^\infty a_j(\lambda) D^2 w_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_1^\infty \lambda_j a_j(\lambda) \cos \lambda_j (x-\pi)$$

mais la série $\sum_1^\infty \lambda_j\, a_j(\lambda)$ est absolument convergente (corollaire du lemme (3.6), par conséquent $D^2 w(x,\lambda)$ existe et $w(x,\lambda) \in c^2(]0,\pi[)$.

Montrons maintenant que $w(x,\lambda)$ est solution du problème (3.1). La famille $\{a_j\}$ vérifie les équations (3.5).

$$(\lambda_j^2 - \lambda^2)\, a_j + \frac{1}{3} \int_0^\pi \Big(\sum_1^\infty a_k\, Dw_k\Big)^3 Dw_j = 0, \quad j = 1,2,\ldots \tag{3.5}$$

ce qui s'écrit encore en utilisant l'orthonormalité des w_j :

$$< D^2 w, D^2 w_j >_{L^2} - \lambda^2 < Dw, Dw_j >_{L^2} + \frac{1}{3} < (Dw)^2, Dw_j >_{L^2} = 0, \quad j = 1,2,\ldots$$

et en intégrant par parties :

$$< D^2 w, D^2 w_j >_{L^2} + \lambda^2 < D^2 w, w_j >_{L^2} - < (Dw)^2 D^2 w, w_j > = 0, \quad j = 1,2,\ldots$$

Or la famille $\{ w_j \}$ est totale dans l'espace $H_0^1\,(0,\pi)$ muni du produit scalaire $< u,v > = \int_0^\pi$ Du Dv dx, par conséquent :

$$< D^2 w, D^2 \varphi >_{L^2} + \lambda^2 < D^2 w, \varphi >_{L^2} - < (Dw)^2 D^2 w, \varphi >_{L^2} = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathscr{D}(]0,\pi[),$$

d'où :

$$< D^4 w, \varphi >_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}} + \lambda^2 < D^2 w, \varphi >_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}} - < (Dw)^2 D^2 w, \varphi >_{\mathscr{D}' \times \mathscr{D}} = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(]0,\pi[\,)$$

i.e. $$D^4 w + \lambda^2 D^2 w - (Dw)^2 D^2 w = 0 \quad \text{dans } \mathscr{D}'\,(]0,\pi[\,)$$

Les fonctions Dw et D^2w étant dans c^o ($]0,\pi[$), l'égalité a donc lieu au sens des fonctions et $D^4w \in c^o$ ($]0,\pi[$).

D'autre part il est clair que les conditions limites sont vérifiées et que la fonction (− w) est aussi solution de (3.1). ∎

Nous donnons pour complément une propriété de croissance de la norme L^4 de Dw.

LEMME 3.6. *Supposons* $\Delta\lambda > 0$ *alors :*

$$\| Dw(x,\lambda) \|_{L^4} \leqslant \| Dw(x,\lambda + \Delta\lambda) \|_{L^4}$$

Preuve. La famille $\{ a_j^N(\lambda) \}$ solution des équations (3.5) est solution du problème de minimisation : $\underset{\vec{a}}{\text{Min}}\ H_N(\vec{a}(\lambda)) = d_N(\lambda)$. De même la famille $\{ a_j^N(\lambda + \Delta\lambda) \}$ est solution du problème :

$$\underset{\vec{a}}{\text{Min}}\ H_N(\vec{a}(\lambda + \Delta\lambda)) = d_N(\lambda + \Delta\lambda)$$

or pour tout $\vec{a} \in \mathbb{R}^N$, tout λ et $\Delta\lambda > 0$:

$$H_N(\vec{a}(\lambda + \Delta\lambda)) \leqslant H_N(\vec{a}(\lambda)),$$

ce qui entraîne :

$$d_N(\lambda + \Delta\lambda) \leqslant d_N(\lambda) \tag{3.20}$$

mais $d_N(\lambda)$ vérifie :

$$d_N(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_1^N (a_j^N)^2 (\lambda_j^2 - \lambda^2) + \frac{1}{12} \int_o^\pi \left(\sum_1^N a_k^N Dw_k\right)^4 dx$$

avec $a_j^N(\lambda)$ solution de (3.5) :

$$(\lambda_j^2 - \lambda^2) a_j^N(\lambda) = -\frac{1}{3} \int_o^\pi \left(\sum_1^N a_k^N Dw_k\right)^3 Dw_j\, dx$$

on multiplie l'équation ci-dessus par a_j^N et on somme sur j :

$$\sum_1^N (\lambda_j^2 - \lambda^2) (a_j^N)^2 = -\frac{1}{3} \int_o^\pi \left(\sum_1^N a_k^N Dw_k\right)^4 dx$$

on remplace $\sum_1^N (\lambda_j^2 - \lambda^2)(a_j^N)^2$ dans l'expression de d_N :

$$d_N(\lambda) = \frac{1}{4} \int_o^\pi \left(\sum_1^N a_k^N Dw_k\right)^4 dx$$

égalité qui compte tenu de (3.20) donne :

$$(3.21) \qquad \int_0^{\pi} \left(\sum_1^N a_k^N(\lambda + \Delta\lambda)\, Dw_k\right)^4 dx \geqslant \int_0^{\pi} \left(\sum_1^N a_k^N(\lambda) Dw_k\right)^4 dx$$

Le passage à la limite dans (3.21) donne le résultat cherché. ■

Les Auteurs remercient R. Temam de leur avoir indiqué le travail de K. Washizu et L. Tartar pour son aide et ses encouragements.

REFERENCES

[1] K. WASHIZU. *«Variational methods in elasticity and plasticity»*. Pergamon Press, London, 2nd ed (1975).

[2] R.W. DICKEY. *«A bifurcation problem for a fourth order non linear ordinary differential equation»*. SIAM J. Appl. Maths Vol 27, July 1974.

[3] R.E.L. TURNER. *«Non linear eigenvalue problems with non local operators»*. Comm Pure Appl. Math. 23 (1970).

(Manuscrit reçu le 2 octobre 1980)