ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JACQUES SIMON

Régularité de la solution d'un problème aux limites non linéaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 3, nº 3-4 (1981), p. 247-274
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_3-4_247_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol III, 1981, P. 247 à 274

REGULARITE DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME AUX LIMITES NON LINEAIRES

Jacques Simon (1)

(1) Analyse Numérique, Tour 55-65, 5e étage, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu 75230 Paris Cédex 05 - France.

Résumé : On s'intéresse à la régularité jusqu'au bord $\partial\Omega$ de la solution u de l'équation non linéaire dans $\Omega \subset R^n$:

$$-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} u|^{p-2} \operatorname{grad} u) = f \text{ dans } \Omega, \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega$$

où $\partial\Omega$, f et g sont réguliers, et $p > 1$.

On donne un résultat de régularité dans les directions tangentielles à $\partial\Omega$ (d'où la régularité à l'intérieur de Ω dans toutes les directions) qui est optimal. On en déduit un résultat de régularité dans toutes les directions, d'ordre moins élevé, dont on ne sait pas s'il est optimal.

On adapte pour celà la méthode des translations de Nirenberg.

Summary : This paper is concerned with the regularity up to the boundary $\partial\Omega$ of the solution u of the following non linear equation in $\Omega \subset R^n$:

$$-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} u|^{p-2} \operatorname{grad} u) = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \partial\Omega,$$

where $\partial\Omega$, f and g are smooth, and $p > 1$.

We give a result of regularity in tangential directions (whence follows interior regularity in any direction) which is optimal. Then we obtain a regularity result in any direction, with lower order, of which optimality is unknown.

This relies on an adaption of Nirenberg's translation method.

INTRODUCTION

On s'intéresse à la solution u du problème aux limites

$$-\operatorname{div}\,(d\,|\operatorname{grad} u\,|^{p-2}\operatorname{grad} u) = f \quad \text{dans } \Omega \text{ ouvert de } R^N, \tag{1}$$

$$u = g \qquad \text{sur le bord } \partial\Omega, \tag{2}$$

où $p > 1$, où f, d et g sont des fonctions données respectivement sur Ω et sur $\partial\Omega$, et où $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_N}$ et $\operatorname{grad} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N})$.

Ce problème admet une solution unique moyennant des hypothèses convenables sur les données, et on s'intéresse dans ce travail à la régularité de u quand les données sont régulières.

On suppose donc que $\partial\Omega$, f, d et g sont réguliers et on montre d'abord que u est régulière tangentiellement. Quand $\Omega = \{x \mid x_N > 0\}$ on dit que u est régulière tangentiellement si $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{N-1}}$ et $x_N \frac{\partial u}{\partial x_N}$ sont réguliers. On étend cette notion à un ouvert à bord régulier par changement de cartes ; c'est équivalent à la régularité de $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \Sigma_i\, \theta_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ pour tout champ de vecteur θ tangent à $\partial\Omega$.

On montre ensuite que, sous les mêmes hypothèses, toute solution u de (1) qui est régulière tangentiellement est régulière au sens usuel.

L'ordre de dérivabilité tangentielle de u obtenu ici est optimal ; l'ordre de dérivabilité usuelle est moins élevé (quand $p \neq 2$) et on ne sait pas s'il est optimal.

Ces résultats ont été annoncés dans SIMON [1] . Les premiers résultats, pour une équation voisine de (1), sont dûs à VISIK [1] , cf. également LIONS [1] , mais ce sont des résultats de régularité avec poids et non explicites (ce sont des propriétés de régularité de $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}$. D'autres résultats de ce type sont donnés dans JAKOLEV [1] .

La régularité de u à l'intérieur de Ω est démontrée dans SIMON [4] , et les résultats sont optimaux pour les hypothèses faites. Dans le cas où $f \equiv 0$ et $d \equiv 1$, la continuité Höldérienne de u à l'intérieur de Ω est établie dans UHLENBECK [1] .

Des résultats de régularité pour des équations non linéaires plus générales sont donnés dans DE THELIN [1] et [2] .

Pour l'Analyse numérique du problème on renvoie à GLOWINSKI-MARROCCO [1] et à sa bibliographie.

PLAN

****

1. - POSITION DU PROBLEME ET RESULTATS DE REGULARITE USUELLE

1.1. - Espaces de Sobolev et de Besov

Soit Ω un ouvert borné de R^N dont le bord $\partial\Omega$ est de classe C^1, de point générique $x = (x_1,...,x_N)$. Etant donné $\beta = (\beta_1,...,\beta_N)$ un multi-entier positif on note $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_N$, $D^\beta = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\beta_1} \circ ... \circ (\frac{\partial}{\partial x_N})^{\beta_N}$ et $D^{(0,...,0)}$ = Identité.

On note $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ sur Ω à support compact dans Ω. Pour m entier positif on note $W^{m,r}(\Omega) = \{ v \mid D^\beta v \in L^r(\Omega),\ |\beta| \leqslant m \}$, $\mathring{W}^{m,r}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{m,r}(\Omega)$, et $W^{-m,r}(\Omega)$ où $1 < r < \infty$ le dual de $\mathring{W}^{m,r^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} = 1$; on désigne par [,] le crochet de dualité.

On définit par interpolation pour σ non entier, $n < \sigma < n+1$, n entier, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $1 \leqslant q \leqslant \infty$,

$$B_q^{\sigma,r}(\Omega) = [W^{n+1,r}(\Omega), W^{n,r}(\Omega)]_{n+1-\sigma,q}\ .$$ [1]

1.2. - Existence d'une solution

Soit p tel que $1 < p < \infty$ et soit d vérifiant

(1.1) $$d \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \operatorname*{Inf\,ess}_{x \in \Omega} d(x) > 0.$$

On définit alors un opérateur A de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p^*}(\Omega)$ (car $p^* = \frac{p}{p-1}$) par [2]

$$A(v) = -\operatorname{div}(d\, |\operatorname{grad} v|^{p-2} \operatorname{grad} v).$$

Etant donnés $f \in W^{-1,p^*}(\Omega)$ et $g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ [3] il existe une solution unique u de

(1.2) $$\begin{cases} u \in W^{1,p}(\Omega), \\ A(u) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = g \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

---

(1) On note, cf. PEETRE [1],

$$[E_1,E_2]_{\theta,q} = \{ e \in E_1+E_2 \mid h^{-\theta} K(h,e) \in L^q(0,\infty;\tfrac{dh}{h}) \} \text{ où}$$

$$K(h,e) = \operatorname{Inf} \{ \| e_1 \|_{E_1} + h \| e_2 \|_{E_2} \mid e_1+e_2 = e,\ e_i \in E_i \}.$$

(2) i.e. $A(v) = -\sum_{i=1\ldots N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(d\Big(\sum_{j=1\ldots N} \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 \Big)^{\frac{p-2}{2}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$

(3) On définit les espaces de Sobolev sur $\partial\Omega$ à partir de espaces sur R^{N-1}, par cartes locales.

Rappelons brièvement la démonstration de LIONS [1], ch. 2.2 : il existe un relèvement $G \in W^{1,p}(\Omega)$ de g, et l'opérateur $v \to A(v+G)$ est borné, hémicontinu, coercif et monotone de $\mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p^*}(\Omega)$, donc il existe une solution du problème homogène

$$\left\{\begin{array}{l} U \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega), \\ A(U+G) = f, \end{array}\right. \tag{1.3}$$

et $u = U+G$ est solution de (1.2).

L'unicité résulte trivialement de la propriété (2.12) ci-dessous.

1.3. - Résultats de régularité usuelle

THEOREME 1.1. *On suppose que*

$$\partial\Omega \textit{ est de classe } C^3, \tag{1.4}$$

$$d \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad f \in L^{p^*}(\Omega) \quad \textit{et} \quad g \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega). \tag{1.5}$$

Alors

$$u \in \left\{\begin{array}{ll} B_\infty^{1+\frac{1}{(p-1)^2},p}(\Omega) & \textit{quand } p > 2, \\ W^{2,2}(\Omega) & \textit{quand } p = 2, \\ B_\infty^{1+(p-1)^2,p}(\Omega) & \textit{quand } p < 2. \end{array}\right. \tag{1.6}$$ ■

Quand p = 2 on retrouve un résultat de NIRENBERG [1].

On démontrera ce théorème en deux étapes :

i) Régularité tangentielle de u au ch. 2, théorème 2.1.

ii) Régularité usuelle des solutions de l'équation (sans condition aux limites) qui sont régulières tangentiellement au ch. 4, théorème 4.1.

Remarque 1.1. Régularité dans les espaces de Sobolev.

Les espaces de Sobolev d'ordre σ non entier étant définis de façon usuelle on a d'après LIONS-MAGENES [1], $W^{\sigma,r}(\Omega) = B_r^{\sigma,r}(\Omega)$, donc (1.6) entraîne pour tout $\epsilon > 0$,

$$u \in \begin{cases} W^{1+\frac{1}{(p-1)^2}-\epsilon,\,p}(\Omega) & \text{quand } p > 2, \\ W^{1+(p-1)^2-\epsilon,\,p}(\Omega) & \text{quand } p < 2. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Remarque 1.2. Optimalité du théorème 1.1.

Le cas $p > 2$. On ne sait en général pas si l'ordre $1 + \dfrac{1}{(p-1)^2}$ de «dérivabilité» de u obtenu au théorème 1.1. est optimal.

Dans le cas particulier où l'équation (1.2) est prolongeable avec données régulières on peut améliorer ce résultat. On suppose donc que

$$(1.7) \quad \begin{cases} \text{il existe des prolongements } u', f' \text{ et } d' \text{ de } u, f \text{ et } d \text{ tels que} \\ A(u') = f' \quad \text{dans } \Omega', \quad \Omega' \text{ ouvert}, \quad \Omega' \supset \overline{\Omega}, \\ f' \in L^{p^*}(\Omega'), \; d' \in W^{1,\infty}(\Omega'). \end{cases}$$

Alors les résultats de régularité locale de SIMON [4] montrent que $u' \in B_\infty^{1+\frac{1}{p-1},p}(\Omega')$ donc que

$$u \in B_\infty^{1+\frac{1}{p-1},p}(\Omega)$$

résultat qui est meilleur que (1.6).

L'hypothèse (1.7) est vérifiée si Ω est un pavé de R^N (borné ou non) et si g est constant (on prolonge alors u–g par antisymétrie) ; elle est donc toujours vérifiée en dimension $N = 1$.

Mais en général on ne sait pas si (1.7) est vérifié, ni si (1.6) est optimal.

Le cas $p < 2$. On peut de même montrer, en supposant (1.7) vérifié, que

$$u \in B_\infty^{1+p-1,p}(\Omega) \,;$$

mais en général on ne sait pas non plus si (1.6) est optimal.

Par contre on peut affaiblir (1.5) en le remplaçant, cf. (2.21) et (4.22), par

$$d \in B_\infty^{p-1,\infty}(\Omega), \quad f \in B_\infty^{p-2,p^*}(\Omega) \quad \text{et} \quad g \in B_\infty^{p-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega). \quad \blacksquare$$

2. - REGULARITE TANGENTIELLE

2.1. - Espaces asymétriques

On suppose donc que $\partial\Omega$ est de classe C^3, i.e. que

$$(2.1)\quad \begin{cases} \forall\, x \in \overline{\Omega} \text{ il existe un voisinage ouvert } V \text{ de } x, \text{ un ouvert } W \text{ de } R^N \text{ et un } C^3\text{-} \\ \text{difféomorphisme } T \text{ de } V \text{ sur } W \text{ tel que} \\ T(\overline{\Omega} \cap V) = \overline{R^N_+} \cap W \end{cases}$$

où $\overline{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω, où R^N_y a pour* générique $y = (y_1,\ldots,y_N)$ et où $R^N_+ = \{y \mid y_N > 0\}$.

Etant donnée v une fonction sur Ω, on note ${}^T v = (v_{|\Omega \cap V}) \circ T^{-1}$ le transporté (sur $R^N_+ \cap W$ de la restriction à $\Omega \cap V$) de v par T.

On définit des espaces de fonctions régulières «tangentiellement à $\partial\Omega$» pour $0 < \sigma \leqslant 2$ et $1 < r < \infty$ par

$$(2.2)\quad \begin{cases} W^{\sigma,r}_{\text{tang}}(\Omega) = \left\{ v \mid {}^T v, \dfrac{\partial\, {}^T v}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial\, {}^T v}{\partial y_{N-1}}, y_N \dfrac{\partial\, {}^T v}{\partial y_N} \in W^{\sigma-1,r}(R^N_+ \cap W) \quad \forall\, T \text{ défini par (2.1)} \right\}, \\ \\ B^{\sigma,r}_{q\,\text{tang}}(\Omega) = [W^{n+1,r}_{\text{tang}}(\Omega)\ ,\ W^{n,r}(\Omega)]_{n+1-\sigma,q} \quad \text{pour } n < \sigma < n+1,\ n \text{ entier.} \end{cases}$$

2.2. - Résultats

THEOREME 2.1. *On suppose que (1.4) et (1.5) sont vérifiés. Alors la solution* u *de (1.2) vérifie*

$$(2.3)\qquad u \in \begin{cases} B_\infty^{1+\frac{1}{p-1},p}{}_{\text{tang}}(\Omega) & \textit{quand } p > 2,^{(1)} \\ W^{2,2}{}_{\text{tang}}(\Omega) & \textit{quand } p = 2, \\ B^{p,p}_{\infty\,\text{tang}}(\Omega) & \textit{quand } p < 2.\ \blacksquare \end{cases}$$

Remarque 2.1. Optimalité.

Quand $p \geqslant 2$ «l'ordre de dérivabilité» de u obtenu ici $(1 + \frac{1}{p-1})$ est optimal. En effet

---

(1) Notons que $1 + \dfrac{1}{p-1} = p^*$.

* point

d'après SIMON [4] c'est l'ordre maximum (pour l'hypothèse (1.5)) de dérivabilité de u à l'intérieur de Ω.

Quand $p < 2$ on peut remplacer (1.5) par l'hypothèse plus faible (2.21) et l'ordre de dérivabilité obtenu (p) est alors optimal. ∎

Principe de démonstration du théorème 2.1. ($p > 2$). On se ramènera au problème homogène (1.3) avec un relèvement G régulier, et on verra que l'application $f \to U$ est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{p-1}$ de $W^{-1,p^*}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

D'après SIMON [3] , (1.5) entraîne que $\| f \circ e^{h\theta} - f \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \leqslant ch$ pour $0 \leqslant h \leqslant 1$ (et des propriétés analogues de d et G), où les $e^{h\theta}$ sont des difféomorphismes convenables de Ω.

On en déduira que $\| U \circ e^{h\theta} - U \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\, h^{\frac{1}{p-1}}$, ce qui entraîne d'après SIMON [3] que $U \in B^{1+\frac{1}{p-1},p}_{\text{tang}}(\Omega)$. ∎

Avant d'effectuer cette démonstration, rappelons quelques résultats.

2.3. - Caractérisation des espaces asymétriques

Soit θ un champ de vecteur de classe C^2 tangent à $\partial\Omega$, i.e.

$$\theta \in (C^2(\overline{\Omega}))^N \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1\ldots N} n_i\,\theta_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{2.4}$$

où $n = (n_1,\ldots,n_N)$ est une normale à $\partial\Omega$. Etant donné $x \in \Omega$ on définit $e^{h\theta}(x) \in R^N$ pour $h \geqslant 0$ par

$$\begin{cases} \dfrac{d\, e^{h\theta}(x)}{dh} = \theta(e^{h\theta}(x)) & \forall\, h \geqslant 0, \\[2ex] e^{h\theta}(x) = x & \text{pour } h = 0\,; \end{cases}$$

pour h fixé $e^{h\theta}$ est un C^2-difféomorphisme de $\overline{\Omega}$.

D'après SIMON [3] , comme $\partial\Omega$ est de classe C^3, on a pour $m = 0, 1,\ 0 < s < 1$ et $1 < r < \infty$;

$$W^{m+1,r}_{\text{tang}}(\Omega) = \Big\{ v \in W^{m,r}(\Omega) \mid \sup_{0<h<1} \frac{1}{h} \| v \circ e^{h\theta} - v \|_{W^{m,r}(\Omega)} < \infty \quad \forall\, \theta \text{ vérifiant (2.4)} \Big\}, \tag{2.5}$$

$$(2.6)\qquad B^{m+s,r}_{\infty\,\mathrm{tang}}(\Omega) = \left\{ v \in W^{m,r}(\Omega) \;\middle|\; \operatorname*{Sup}_{0<h<1} \frac{1}{h^s} \| v \circ e^{h\theta} - v \|_{W^{m,r}(\Omega)} < \infty \quad \forall\, \theta \text{ vérifiant (2.4)} \right\};$$

de plus pour $m = -1, 1$ ou 2 et $1 < r \leqslant \infty$ ($r < \infty$ si $m = -1$) on a (5)

$$(2.7)\qquad \operatorname*{Sup}_{0<h<1} \| v \circ e^{h\theta} \|_{W^{m,r}(\Omega)} < \infty \qquad \forall\, v \in W^{m,r}(\Omega),$$

$$(2.8)\qquad \operatorname*{Sup}_{0<h<1} \frac{1}{h} \| v \circ e^{h\theta} - v \|_{W^{m,r}(\Omega)} < \infty \quad \text{si et seulement si}$$

$$v, \sum_{i=1,\dots,N} \theta_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \in W^{m,r}(\Omega),$$

$$(2.9)\qquad \operatorname*{Sup}_{0<h<1} \frac{1}{h} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(v \circ e^{h\theta}) - \frac{\partial v}{\partial x_i} \circ e^{h\theta} \right\|_{W^{m,r}(\Omega)} < \infty$$

$$\forall\, v \in W^{m+1,r}(\Omega),\ i = 1,\dots,N.$$

2.4. - Propriétés de l'opérateur A

a - Majorations liminaires. On note $<,>$ le produit scalaire dans R^N. Pour tout $q > 1$ il existe, cf. SIMON [2] (majoration (2.2)) ou GLOWINSKI-MAROCCO [1] (lemme 5.1), une constante $a_1 > 0$ telle que, pour tout $s_1, s_2 \in R^N$,

$$(2.10)\qquad < |s_2|^{q-2} s_2 - |s_1|^{q-2} s_1, s_2 - s_1 > \; \geqslant \begin{cases} a_1 |s_2 - s_1|^q & \text{si } q \geqslant 2 \\ a_1 \dfrac{|s_2 - s_1|^2}{(|s_2| + |s_1|)^{2-q}} & \text{si } q \leqslant 2. \end{cases}$$

En majorant $|< |s_2|^{q-2} s_2 - |s_1|^{q-2} s_1, s_2 - s1 >| \leqslant ||s_2|^{q-2} s_2 - |s_1|^{q-1} s_1||s_2 - s_1|$ et en posant $t_i = |s_i|^{q-2} s_i$, donc $s_i = |t_i|^{p-2} t_i$ pour $p = 1 + \dfrac{1}{q-1}$, on en déduit qu'il existe une constante c_1 (dépendant de p) telle que, pour tout $t_1, t_2 \in R^N$,

$$||t_2|^{p-2} t_2 - |t_1|^{p-2} t_1| \leqslant \begin{cases} c_1 |t_2 - t_1| (|t_1| + |t_2|)^{p-2} & \text{si } p \geqslant 2 \\ c_1 |t_2 - t_1|^{p-1} & \text{si } p \leqslant 2. \end{cases}$$

(5) Quand $m = -1$ on définit $v \circ e^{h\theta}$ par dualité :

$$[v \circ e^{h\theta}, \varphi] = [v, (\text{Jacobien } e^{-h\theta})(\varphi \circ e^{-h\theta})] \qquad \forall\, \varphi \in \mathring{W}^{1,r^*}(\Omega).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder si $p \geqslant 2$ on en déduit, pour tout $t_1,t_2 \in (L^p(\Omega))^N$, que

$$(2.11) \quad \| \, |t_2|^{p-2} t_2 - |t_1|^{p-2} t_1 \, \|_{(L^{p^*}(\Omega))^N} \leqslant \begin{cases} c_1 m^{p-2} \| t_2 - t_1 \|_{(L^p(\Omega))^N} & \text{si } p \geqslant 2 \\ c_1 (\| t_2 - t_1 \|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-1} & \text{si } p \leqslant 2 \end{cases}$$

où $m = \operatorname*{Sup}_{i=1,2} \| t_i \|_{(L^p(\Omega))^N}$.

b - Propriétés de Hölder de l'inverse de A

LEMME 2.1. *Il existe une constante* c_2 *telle que, pour tout* $v_1,v_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ *tels que* $v_2 - v_1$ *soit nul sur* $\partial\Omega$, *on ait*

$$(2.12) \quad \| v_2 - v_1 \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \begin{cases} c_2 (\| A(v_2) - A(v_1) \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)})^{\frac{1}{p-1}} & \text{si } p \geqslant 2 \\ c_2 M^{2-p} \| A(v_2) - A(v_1) \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} & \text{si } p \leqslant 2 \end{cases}$$

où $M = \operatorname*{Sup}_{i=1,2} \| v_i \|_{W^{1,p}(\Omega)}$. ■

Démonstration. En intégrant par parties il vient

$$[A(v_2) - A(v_1), v_2 - v_1] = \int_\Omega d < |\operatorname{grad} v_2|^{p-2} \operatorname{grad} v_2 - |\operatorname{grad} v_1|^{p-2} \operatorname{grad} v_1, \operatorname{grad} v_2 - \operatorname{grad} v_1 >$$

En utilisant (2.10) avec $q = p$, en notant que d est strictement minoré d'après l'hypothèse (1.1), et en utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{2}{p} = 1 + \frac{2-p}{p}$ si $p \leqslant 2$, il vient

$$[A(v_2) - A(v_1), v_2 - v_1] \geqslant \begin{cases} a_2 (\| \operatorname{grad} (v_2 - v_1) \|_{(L^p(\Omega))^N})^p & \text{si } p \geqslant 2 \\ a_2 \dfrac{(\| \operatorname{grad} (v_2 - v_1) \|_{(L^p(\Omega))^N})^2}{(\| \operatorname{grad} v_2 \|_{(L^p(\Omega))^N} + \| \operatorname{grad} v_1 \|_{(L^p(\Omega))^N})^{2-p}} & \text{si } p \leqslant 2 \end{cases}$$

avec $a_2 > 0$.

On en déduit le résultat annoncé en majorant, avec l'inégalité de Poincaré,

$$|[A(v_2)-A(v_1),v_2-v_1]| \leqslant \|A(v_2)-A(v_1)\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \|v_2-v_1\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leqslant a_3 \|A(v_2)-A(v_1)\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \|\mathrm{grad}(v_2-v_1)\|_{(L^p(\Omega))^N}. \quad \blacksquare$$

c - Propriétés de Hölder de A

LEMME 2.2. *Il existe une constante* c_3 *telle que, pour tout* $v_1,v_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, *on ait*

$$(2.13) \quad \|A(v_2)-A(v_1)\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \leqslant \begin{cases} c_3 M^{p-2} \|v_2-v_1\|_{W^{1,p}(\Omega)} & \text{si } p \geqslant 2 \\ c_3(\|v_2-v_1\|_{W^{1,p}(\Omega)})^{p-1} & \text{si } p \leqslant 2 \end{cases}$$

où $M = \operatorname*{Sup}_{i=1,2} \|v_i\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Démonstration. On a

$$\|A(v_2)-A(v_1)\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} = \operatorname*{Sup}_{w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)} \frac{[A(v_2)-A(v_1),w]}{\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)}}$$

$$\leqslant a_3 \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \| |\mathrm{grad}\, v_2|^{p-2} \mathrm{grad}\, v_2 - |\mathrm{grad}\, v_1|^{p-2} \mathrm{grad}\, v_1 \|_{(L^p(\Omega))^N}$$

La majoration (2.11) donne alors les résultats annoncés. ∎

d - Estimation du crochet de A *et de* $e^{h\theta}$

LEMME 2.3. *Pour tout* $v \in W^{1,p}(\Omega)$ *et tout* θ *vérifiant (2.4), il existe une constante* c_4 *telle que, pour tout* $h \in [0,1]$, *on ait*

$$(2.14) \quad \|A(v \circ e^{h\theta}) - A(v) \circ e^{h\theta}\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \leqslant \begin{cases} c_4(\|d \circ e^{h\theta} - d\|_{L^\infty(\Omega)} + h) & \text{si } p \geqslant 2, \\ c_4(\|d \circ e^{h\theta} - d\|_{L^\infty(\Omega)} + h^{p-1}) & \text{si } p \leqslant 2. \blacksquare \end{cases}$$

Démonstration. En notant $t = \mathrm{grad}\, v$, $t_h = (\mathrm{grad}\, v) \circ e^{h\theta}$ et $s_h = \mathrm{grad}\,(v \circ e^{h\theta})$ on a

$$A(v\circ e^{h\theta})-A(v)\circ e^{h\theta}=-\operatorname{div}(d\,|s_h|^{p-2}s_h)+(\operatorname{div}(d\,|t|^{p-2}t))\circ e^{h\theta}$$

$$=-\operatorname{div}((d-d\circ e^{h\theta})\,|s_h|^{p-2}s_h+d\circ e^{h\theta}(\,|s_h|^{p-2}s_h-|t_h|^{p-2}t_h))$$

$$-\operatorname{div}((d\,|t|^{p-2}t)\circ e^{h\theta})+(\operatorname{div}(d\,|t|^{p-2}t))\circ e^{h\theta}$$

Grâce à (2.7) on majore

$$\|(d-d\circ e^{h\theta})\,|s_h|^{p-2}s_h\|_{(L^{p^*}(\Omega))^N}\leqslant\|d-d\circ e^{h\theta}\|_{L^\infty(\Omega)}(\|s_h\|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-1}$$

$$\leqslant c\,\|d-d\circ e^{h\theta}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En utilisant (2.11) on majore

$$\|d\circ e^{h\theta}(\,|s_h|^{p-2}s_h-|t_h|^{p-2}t_h)\|_{(L^{p^*}(\Omega))^N}\leqslant\begin{cases}c_1\delta\, m_h^{p-2}\,|t_h-s_h|_{(L^p(\Omega))^N} & \text{si } p\geqslant 2\\[2ex] c_1\delta(\,|t_h-s_h|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-1} & \text{si } p\leqslant 2\end{cases}$$

où $\delta=\|d\|_{L^\infty(\Omega)}$, $m_h=\operatorname{Sup}(\,|t_h|_{(L^p(\Omega))^N},|s_h|_{(L^p(\Omega))^N})$, et on note que d'après (2.7) et (2.9) on a $m_h\leqslant c$ et $|t_h-s_h|_{(L^p(\Omega))^N}\leqslant ch$.

Enfin il résulte de (2.9) que

$$\|-\operatorname{div}(d\,|t|^{p-2}t)\circ e^{h\theta})+(\operatorname{div}(d\,|t|^{p-2}t))\circ e^{h\theta}\|_{W^{-1,p^*}(\Omega)}\leqslant ch$$

Ces trois majorations entraînent le résultat annoncé. ■

2.5. - Démonstration du théorème 2.1.

a - Problème homogène. Comme $g\in W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ il existe un relèvement

$$G\in W^{2,p}(\Omega) \tag{2.15}$$

et il suffit de montrer que la solution $U=u-G$ du problème homogène (1.3) vérifie (2.3), i.e. que

$$U\in\begin{cases}B_{\infty\,\text{tang}}^{1+\frac{1}{p-1},p}(\Omega) & \text{quand } p>2,\\[1ex] W_{\text{tang}}^{1+1,2}(\Omega) & \text{quand } p=2,\\[1ex] B_{\infty\,\text{tang}}^{1+p-1,p}(\Omega) & \text{quand } p<2.\end{cases} \tag{2.16}$$

b - Une majoration pour $p \geqslant 2$. Etant donné θ vérifiant (2.4) on a $e^{h\theta}(\partial\Omega) = \partial\Omega$, donc

$$U \circ e^{h\theta} = U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2.17}$$

De plus, comme $A(U+G) = A(u) = f$, on a

$$A(U \circ e^{h\theta}+G) - A(U+G) = (A(U \circ e^{h\theta}+G) - A(U \circ e^{h\theta}+G \circ e^{h\theta})) +$$

$$A(u \circ e^{h\theta}) - A(u) \circ e^{h\theta}) + (f \circ e^{h\theta} - f)$$

donc d'après les lemmes 2.2 et 2.3 et d'après (2.7) il existe une constante c_5 telle que

$$\| A(U \circ e^{h\theta}+G) - A(U+G) \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} \leqslant$$

$$c_3 c_5^{p-2} \| G-G \circ e^{h\theta} \|_{W^{1,p}(\Omega)} + c_4(\| d \circ e^{h\theta}-d \|_{L^\infty(\Omega)}+h) + \| f \circ e^{h\theta}-f \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)}.$$

Le lemme 2.1 montre alors d'après (2.17) qu'il existe c_6 telle que, $\forall\, h \in [0,1]$,

$$\left\{\begin{array}{l} \| U \circ e^{h\theta}-U \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \\ c_6(\| G \circ e^{h\theta}-G \|_{W^{1,p}(\Omega)} + \| d \circ e^{h\theta}-d \|_{L^\infty(\Omega)} + \| f \circ e^{h\theta}-f \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)}+h)^{\frac{1}{p-1}}. \end{array}\right. \tag{2.18}$$

c - Régularité de U *pour* $p \geqslant 2$. D'après la caractérisation (2.8), l'hypothèse (1.5) et la propriété (2.15) entraînent respectivement

$$\left\{\begin{array}{l} \sup\limits_{0<h<1} \frac{1}{h} \| d \circ e^{h\theta}-d \|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \sup\limits_{0<h<1} \frac{1}{h} \| f \circ e^{h\theta}-f \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} < \infty, \\ \sup\limits_{0<h<1} \frac{1}{h} \| G \circ e^{h\theta}-G \|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty \end{array}\right. \tag{2.19}$$

et (2.18) donne

$$\sup_{0<h<1} \frac{1}{h^{\frac{1}{p-1}}} \| U \circ e^{h\theta}-U \|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty$$

ce qui établit (2.16) d'après les caractérisations (2.6) et (2.5) ($\frac{1}{p-1} = 1$ quand $p = 2$).

d - Le cas p $<$ 2. Il vient au lieu de (2.18)

$$\| U \circ e^{h\theta} - U \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant$$

$$c_6 (\| G \circ e^{h\theta} - G \|_{W^{1,p}(\Omega)} + \| d \circ e^{h\theta} - d \|_{L^\infty(\Omega)} + \| f \circ e^{h\theta} - f \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} + h^{p-1})$$

et avec (2.19),

$$\sup_{0<h<1} \frac{1}{h^{p-1}} \| U \circ e^{h\theta} - U \|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty. \quad \blacksquare \tag{2.20}$$

Remarque 2.2. Amélioration du théorème 2.1 quand p $<$ 2. Pour que (2.20) donc (2.3), soit vérifié il suffit que

$$\sup_{0<h<1} \frac{1}{h^{p-1}} \| d \circ e^{h\theta} - d \|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad \sup_{0<h<1} \frac{1}{h^{p-1}} \| f \circ e^{h\theta} - f \|_{W^{-1,p^*}(\Omega)} < \infty$$

$$\text{et} \quad \sup_{0<h<1} \frac{1}{h^{p-1}} \| G \circ e^{h\theta} - G \|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty$$

On peut donc remplacer l'hypothèse (1.5) par

$$d \in B^{p-1,\infty}(\Omega), \quad f \in B_\infty^{p-2,p^*}(\Omega) \quad \text{et} \quad g \in W_\infty^{p-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega). \quad \blacksquare \tag{2.21}$$

3. - REGULARITE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION NON DIFFERENTIELLE

On réduira au chapitre 4 le problème de la régularité usuelle des solutions de l'équation A(u) = f qui sont régulières tangentiellement à un problème de régularité de la solution d'une équation «ordinaire», problème qu'on étudie dans ce chapitre.

3.1. - Position du problème et résultats

Etant donnés a, b, e et k des paramètres réels, et z réel, on note

$$F(z) = (a^2 + 2bz + (1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-1} (b + (1+e^2)z).$$

Soit Q un ouvert de R^N. On considère des fonctions dans Q vérifiant

(3.1) $a,b,z \in L^p(Q)$, $e \in L^\infty(Q)$ et $k \in L^{p^*}(Q)$,

(3.2) $|b| \leqslant |ae|$ p.p. dans Q,

(3.3) $F(z) = k$ p.p. dans Q.

THEOREME 3.1. *On suppose que* ∂Q *est de classe* C^1 *et soit* $0 < s < 1$.

i) Le cas $p > 2$. *Si*

$$a,b \in B^{s,p}_\infty(Q),\quad e \in B^{s,\infty}_\infty(Q) \quad et \quad k \in B^{s,p^*}_\infty(Q),$$

alors

(3.4) $$z \in B_\infty^{\frac{s}{p-1},p}(Q).$$

ii) Le cas $1 < p \leqslant 2$. *Si*

$$a,b \in B^{s,p}_\infty(Q),\quad e \in B^{s,\infty}_\infty(Q) \quad et \quad k \in B^{s(p-1),p^*}_\infty(Q),$$

alors

(3.4)' $$z \in B^{s(p-1),p}_\infty(Q). \qquad \blacksquare$$

Principe de la démonstration ($P > 2$). On montrera que F est inversible d'inverse höldérien d'ordre $\frac{1}{p-1}$ de $L^{p^*}(Q)$ dans $L^p(Q)$, puis on se ramènera à R^N et on utilisera la caractérisation par translations des espaces $B^{s,r}_\infty(R^N)$.

3.2. - Inversibilité de l'application F

LEMME 3.1. *L'application* F *définie par* (3.1), (3.2) *et* (3.3) *est inversible de* $L^{p^*}(Q)$ *dans* $L^p(Q)$ *et il existe une constante* c *telle que,* $\forall\, z_1,z_2 \in L^p(Q)$, *on ait*

(3.5) $$\| z_2 - z_1 \|_{L^p(Q)} \leqslant \begin{cases} c\left(\| F(z_2) - F(z_1) \|_{L^{p^*}(Q)} \right)^{\frac{1}{p-1}} & \text{quand } p \geqslant 2, \\ cM^{2-p} \| F(z_2) - F(z_1) \|_{L^{p^*}(Q)} & \text{quand } p \leqslant 2, \end{cases}$$

où $M = \operatorname{Sup}_{i=1,2} \| z_i \|_{L^p(Q)}$. $\blacksquare$

Démonstration.

a - Le cas $p > 2$. On minore, avec (3.2),

$$(3.6)\quad \frac{dF}{dz}=\frac{p-2}{2}(a^2+2bz+(1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-2}\,2(b+(1+e^2)z)^2+(a^2+2bz+(1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-1}(1+e^2)$$

$$\geqslant (a^2+2bz+(1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\geqslant |z|^{p-2}=\frac{1}{p-1}\frac{d}{dz}(|z|^{p-1}z).$$

On a donc

$$|F(z_2)-F(z_1)|\geqslant\frac{1}{p-1}\,\big||z_2|^{p-2}z_2-|z_1|^{p-2}z_1\big|\geqslant c(p)\,|z_2-z_1|^{p-1}$$

où $c(p) > 0$ et ne dépend que de p.

L'application F est donc inversible et, en prenant la norme dans $L^{p^*}(Q)$ on établit (3.5) (puisque $p^*(p-1) = p$) pour tout z_1 et z_2 tels que $F(z_2)-F(z_1) \in L^{p^*}(Q)$ (et en particulier pour tout $z_1,z_2 \in L^p(Q)$).

Comme $F(0) = a^{p-2}\,b \in L^{p^*}(Q)$ il en résulte que $z \in L^p(Q)$ si $F(z) \in L^{p^*}(Q)$. ■

b - Le cas $p \leqslant 2$. Le second membre de (3.6) vaut

$$\frac{dF}{dz}=(p-1)(1+e^2)(a^2+2bz+(1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-1}+(2-p)(a^2+2bz+(1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-2}((1+e^2)a^2-b^2)$$

$$\geqslant (p-1)(1+e^2)(a^2+2bz+(1+e^2)z^2)^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\geqslant (p-1)(1+e^2)((a^2+2|az|+z^2)(1+e^2))^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\geqslant (p-1)(1+e^2)^{\frac{p}{2}}(|a|+|z|)^{p-2}$$

Sur tout intervalle réel $[z_1,z_2]$ on a donc

$$\frac{dF}{dz}\geqslant (p-1)(|a|+m)^{p-2}$$

où $m=\mathrm{Sup}(|z_1|,|z_2|)$, donc

$$|z_2-z_1|\leqslant\frac{1}{p-1}(|a|+m)^{2-p}\,|F(z_2)-F(z_1)|.$$

En prenant la norme dans $L^p(Q)$ et en utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p}+\frac{1}{p^*}$ on établit (3.5). ■

3.3. - UNE ESTIMATION

On suppose ici que $Q = R^N$ et on définit les translatées $v_{h,i}$ où $h \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,N$ d'une fonction v sur R^N par $v_{h,i}(x) = v(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_N)$.

LEMME 3.2. *On suppose que* (3.1), (3.2) *et* (3.3) *sont vérifiés avec* $Q = R^N$. *Il existe une constante* c' *telle que, pour* $h \geqslant 0$ *et* $1 \leqslant i \leqslant N$

$$\| F(z_{h,i}) - F(z)_{h,i} \|_{L^{p^*}(R^N)} \leqslant \tag{3.7}$$

$$\leqslant \begin{cases} c'(\| a_{h,i}-a\|_{L^p(R^N)} + \| b_{h,i}-b\|_{L^p(R^N)} + \| e_{h,i}-e\|_{L^\infty(R^N)}) & \text{quand } p \geqslant 2, \\ c'(\| a_{h,i}-a\|_{L^p(R^N)} + \| b_{h,i}-b\|_{L^p(R^N)} + \| e_{h,i}-e\|_{L^\infty(R^N)})^{p-1} & \text{quand } p \leqslant 2. \end{cases}$$

Démonstration.

a - Préliminaires. On note

$$\lambda(z) = a^2+2bz+(1+e^2)z^2$$

donc $F(z) = \lambda(z)^{\frac{p}{2}-1}(b+(1+e^2)z)$.

Posons $\delta = \text{Sup ess} \left\{ |e(x)| / \sqrt{1+e(x)^2} \mid x \in \Omega \right\}$; on a $0 \leqslant \delta < 1$. D'après (3.2) on a $|2bz| \leqslant 2\delta\, |a| \sqrt{1+e^2}\, z \leqslant \delta(a^2+(1+e^2)z^2)$ d'où

$$(1+\delta)(a^2+(1+e^2)z^2) \geqslant \lambda(z) \geqslant (1-\delta)(a^2+(1+e^2)z^2)$$

donc

$$(1+\delta)(1+e^2)(a^2+z^2) \geqslant \lambda(z) \geqslant (1-\delta)(a^2+z^2). \tag{3.8}$$

b - Estimation. On note v_h au lieu de $v_{h,i}$. On a

$$F(z_h)-F(z)_h = \lambda(z_h)^{\frac{p}{2}-1}(b+(1+e^2)z_h) - \lambda(z)_h^{\frac{p}{2}-1}(b_h+(1+e_h^2)z_h).$$

Il existe une constante c_p telle que, pour tout s et tout t positifs, on ait

$$| t^{\frac{p}{2}-1} - s^{\frac{p}{2}-1} | \leqslant c_p\, |t-s|\, (t+s)^{\frac{p}{2}-2}$$

en effet par homogénéité il suffit de le vérifier pour $t = 1$ et $0 \leqslant s \leqslant 1$; le quotient des deux membres est alors continu et non nul pour $s < 1$, et quand $s \to 1$ il tend vers $\frac{1}{c_p}(\frac{p}{2} - 1)$, ce qui entraine la majoration pour c_p assez grand.

On a donc

$$|F(z_h)-F(z)_h| \leqslant |\lambda(z_h)-\lambda(z)_h|(\lambda(z_h)+\lambda(z)_h)^{\frac{p}{2}-2}|b+(1+e^2)z_h|$$
$$+|\lambda(z)_h|^{\frac{p}{2}-1}|b+(1+e^2)z_h-b_h-(1+e_h^2)z_h|$$

où

$$\lambda(z_h)-\lambda(z)_h = a^2-a_h^2+2(b-b_h)z_h+(e^2-e_h^2)z_h^2.$$

Avec (3.8) on majore donc

$$(3.9)\quad \left\{ \begin{array}{c} |F(z_h)-F(z)_h| \leqslant \\ c_1(|a-a_h|+|b-b_h|+|e-e_h||z_h|)(1+|e|+|e_h|)^{p-1}(a^2+a_h^2+z_h^2)^{\frac{p}{2}-1} \end{array} \right.$$

c - Le cas $p \geqslant 2$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(\frac{p}{2}-1)$, et en notant que $\| v_h \|_{L^q(R^N)} = \| v \|_{L^q(R^N)}$, (3.9) donne

$$\| F(z_h)-F(z)_h \|_{L^{p^*}(R^N)} \leqslant c_1c_2(\| a-a_h \|_{L^p(R^N)} + \| b-b_h \|_{L^p(R^N)} + \| e-e_h \|_{L^\infty(R^N)} \| z \|_{L^p(R^N)})$$

avec

$$c_2 = (1+2\| e \|_{L^\infty(R^N)})^{p-1}(2(\| a \|_{L^p(R^N)})^2 + (\| z \|_{L^p(R^N)})^2)^{\frac{p}{2}-1}.$$

d - Le cas $p \leqslant 2$. On majore, avec (3.2),

$$|a-a_h|+|b-b_h|+|e-e_h||z_h| \leqslant (1+|e|+|e_h|)(|a|+|a_h|+|z_h|)$$

d'où

$$(a^2+a_h^2+z_h^2)^{\frac{p}{2}-1} \leqslant (\frac{1}{3}(|a|+|a_h|+|z_h|)^2)^{\frac{p}{2}-1}$$
$$\leqslant 3^{1-\frac{p}{2}}(1+|e|+|e_h|)^{2-p}(|a-a_h|+|b-b_h|+|e-e_h||z_h|)^{p-2}$$

La majoration (3.9) donne alors

$$|F(z_h)-F(z)_h| \leqslant c_3(1+|e|+|e_h|)(|a-a_h|+|b-b_h|+|e-e_h||z_h|)^{p-1}$$

d'où, puisque $p^* = \frac{p}{p-1}$,

$$\| F(z_h)-F(z)_h \|_{L^{p^*}(R^N)} \leqslant$$

$$\leqslant c_4(\| a-a_h \|_{L^p(R^N)} + \| b-b_h \|_{L^p(R^N)} + \| e-e_h \|_{L^\infty(R^N)} \| z \|_{L^p(R^N)})^{p-1}.$$

3.4. - Démonstration du théorème 3.1.

a - Le cas $p > 2$. Le bord de Q étant de classe C^1 par morceaux il existe des prolongements de a, b, e et k (encore notés a,...) tels que

$$a,b \in B_\infty^{s,p}(R^N), \quad e \in B_\infty^{s,\infty}(R^N) \quad \text{et} \quad k \in B_\infty^{s,p^*}(R^N) \tag{3.10}$$

Par troncature on obtient des prolongements vérifiant de plus (1) (3.2). Le lemme 3.1. montre alors que l'équation (3.3) admet une solution unique dans $L^p(R^N)$; cette solution prolonge donc z, et on la note encore z.

Etant donnés $h \geqslant 0$ et $1 \leqslant i \leqslant N$ le lemme 3.1. donne

$$\| z_{h,i}-z \|_{L^p(R^N)} \leqslant c(\| F(z_{h,i})-F(z) \|_{L^{p^*}(R^N)})^{\frac{1}{p-1}}$$

or

$$F(z_{h,i})-F(z) = (F(z_{h,i})-F(z)_{h,i})+(k_{h,i}-k) \tag{3.11}$$

donc le lemme 3.2 montre que

$$\left\{\begin{aligned} &\| z_{h,i}-z \|_{L^p(R^N)} \leqslant c''(\| a_{h,i}-a \|_{L^p(R^N)} + \| b_{h,i}-b \|_{L^p(R^N)} \\ &\qquad + \| e_{h,i}-e \|_{L^\infty(R^N)} + \| k_{h,i}-k \|_{L^{p^*}(R^N)})^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

D'après LIONS-PEETRE [1] pour $0 < s < 1$ et $1 < r \leqslant \infty$ on a

$$B_\infty^{s,r}(R^N) = \left\{ v \in L^r(R^N) \mid \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \| v_{h,i}-v \|_{L^r(R^N)} < \infty, \quad i = 1,\ldots,N \right\} \tag{3.13}$$

donc les hypothèses (3.10) entraînent, avec (3.12),

$$z \in B_\infty^{\frac{s}{p-1},p}(R^N)$$

---

(1) Le Sup de deux fonctions de $B_\infty^{s,p}(R^N)$, $0 < s < 1$, appartient à $B_\infty^{s,p}(R^N)$.

d'où (3.4) par restriction à Q.

b - Le cas $1 < p < 2$. On a alors des prolongements vérifiant

$$a,b \in B_\infty^{s,p}(R^N), \quad e \in B_\infty^{s,\infty}(R^N) \quad \text{et} \quad k \in B_\infty^{s(p-1),p^*}(R^N). \tag{3.14}$$

D'autre part (3.5), (3.7) et (3.11) donnent, au lieu de (3.12),

$$\|z_{h,i}-z\|_{L^p(R^N)} \leqslant c''((\|a_{h,i}-a\|_{L^p(R^N)} + \|b_{h,i}-b\|_{L^p(R^N)} + \|e_{h,i}-e\|_{L^\infty(R^N)})^{p-1}$$

$$+ \|k_{h,i}-k\|_{L^{p^*}(R^N)}).$$

D'après la caractérisation (3.13), (3.14) entraîne donc

$$z \in B_\infty^{s(p-1),p}(R^N)$$

d'où (3.4)' par restriction à Q. ∎

4. - REGULARITE COMPLETE DES SOLUTIONS REGULIERES TANGENTIELLEMENT

4.1. - Résultats

On se donne une fonction w vérifiant

$$w \in W^{1,p}(\Omega), \tag{4.1}$$

$$A(w) = -\operatorname{div}(d\,|\operatorname{grad} w|^{p-2} \operatorname{grad} w) = f. \tag{4.2}$$

THEOREME 4.1. *On suppose que*

$$\partial\Omega \textit{ est de classe } C^3, \tag{4.3}$$

$$d \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad \operatorname*{Inf\,ess}_{x\in\Omega} d(x) > 0, \quad \textit{et} \quad f \in L^{p^*}(\Omega). \tag{4.4}$$

i) Le cas $p \neq 2$. Si $w \in B_{\infty\,\text{tang}}^{1+s,p}(\Omega)$ *où* $0 < s < 1$, *alors*

$$w \in \begin{cases} B_\infty^{1+\frac{s}{p-1},p}(\Omega) & \text{si } p > 2, \\ B_\infty^{1+s(p-1),p}(\Omega) & \text{si } p < 2. \end{cases}$$

ii) Le cas $p = 2$. *Si* $w \in W^{2,2}_{tang}(\Omega)$, *alors*

$$w \in W^{2,2}(\Omega). \quad \blacksquare$$

Rappelons que les espaces asymétriques sont définis au § 2.1. Etant donnés $\theta \in C^2(\overline{\Omega})^N$ et $v \in W^{1,1}(\Omega)$ on note

$$(4.5) \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \sum_{i=1,\dots,N} \theta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

et on étend par dualité cette définition pour $v \in L^r(\Omega)$ où $r > 1$ [7].

Principe de démonstration [8]. On va la faire en 3 étapes :

a - On décomposera $\frac{\partial}{\partial x_i} = \Sigma_j b_{ij} \frac{\partial}{\partial \theta^j}$, les champs $\theta^1,\dots,\theta^{N-1}$ étant tangents à $\partial\Omega$; la régularité tangentielle de v sera alors équivalente à une estimation de $\frac{\partial v}{\partial \theta^j}$, $j = 1,\dots,N-1$.

b - En décomposant la divergence, (4.2) s'écrira $\Sigma_j \frac{\partial \mathscr{F}^j(\text{grad } w)}{\partial \theta^j} = f'$ et la régularité tangentielle de w entraînera la régularité de $\mathscr{F}^N(\text{grad } w)$.

c - En décomposant le gradient il viendra $\mathscr{F}^N(\text{grad } w) = \mathscr{F}'(\frac{\partial w}{\partial \theta^1},\dots,\frac{\partial w}{\partial \theta^N}) = F(\frac{\partial w}{\partial \theta^N})$, et le théorème 3.1 entraînera la régularité de $\frac{\partial w}{\partial x_N}$, d'où la régularité complète de w.

4.2. - QUELQUES PROPRIETES DES ESPACES ASYMETRIQUES

LEMME 4.1. *On suppose que* $\partial\Omega$ *est de classe* C^3 *et on se donne* $0 < s < 1$, $1 < r < \infty$ *et* $m = 0$ *ou* 1.

$$(4.6) \qquad Si \quad v \in B^{1+s,r}_{\infty\, tang}(\Omega) \quad alors \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in B^{s,r}_{\infty\, tang}(\Omega), \quad i = 1,\dots,N.$$

---

(7) On définit $\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}, \varphi\right] = -\int_\Omega v \sum_{i=1,\dots,N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\theta_i \varphi) \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r^*}(\Omega).$

(8) Quand $\Omega = R^N_+$ il s'agit de montrer que si $\partial u/\partial x_1,\dots,\partial u/\partial x_{N-1}$ sont réguliers alors $\partial u/\partial x_N$ donc u est régulier. Quand $p = 2$ c'est trivial car alors

$$-\frac{\partial}{\partial x_N}(d \frac{\partial u}{\partial x_N}) = f + \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(d \frac{\partial u}{\partial x_j}).$$

(4.7) *Si* $v \in B^{m+s,r}_{\infty\,\text{tang}}(\Omega)$ *alors* $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \in B^{m+s-1,r}_{\infty}(\Omega)$, $\forall\, \theta$ *vérifiant* (2.4).

(4.8) *Si* $v \in (B^{s,p}_{\infty\,\text{tang}}(\Omega))^N$ *alors* $|v|^{p-2} v \in \begin{cases} (B^{s,p^*}_{\infty\,\text{tang}}(\Omega))^N & \text{si } p \geqslant 2, \\ (B^{s(p-1),p^*}_{\infty\,\text{tang}}(\Omega))^N & \text{si } 1 < p \leqslant 2 \end{cases}$

Démonstration. La propriété (4.6) résulte de la définition (2.2) des espaces asymétriques. La propriété (4.7) résulte par interpolation des deux propriétés suivantes :

- si $v \in W^{m+1,r}_{\text{tang}}(\Omega)$ alors $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \in W^{m,r}(\Omega)$ (d'après (2.5) et (2.8)),
- si $v \in W^{m,r}(\Omega)$ alors $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \in W^{m-1,r}(\Omega)$.

Etant donnés $v \in (L^p(\Omega))^N$ et θ vérifiant (2.4) il existe d'après (2.11) et (2.7) une constante c telle que, $\forall\, h \in [0,1]$

$$\| (|v|^{p-2}v) \circ e^{h\theta} - (|v|^{p-2}v) \|_{(L^{p^*}(\Omega))^N} \leqslant \begin{cases} c\, \| v \circ e^{h\theta} - v \|_{(L^p(\Omega))^N} & \text{si } p \geqslant 2, \\ c(\| v \circ e^{h\theta} - v \|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-1} & \text{si } 1 < p \leqslant 2, \end{cases}$$

donc (4.8) résulte de la caractérisation (2.6).

4.3. - Démonstration du théorème 4.1.

a - Définition des champs θ^j. Etant donné $x^o \in \partial\Omega$ on choisit un système d'axes d'origine x^o, de vecteurs de base $e^1,\dots,e^N$ tels que e^N soit la normale intérieure à Ω en x^o.

Comme $\partial\Omega$ est de classe C^3 il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $0 (= x^o)$ dans R^N tel que le bord de $\Omega \cap \mathcal{V}$ soit de classe C^3 par morceaux, et une fonction $\eta \in C^3(R^{N-1})$ tels que

$$\overline{\Omega} \cap \mathcal{V} = \{ x \in \mathcal{V} \mid x_N \geqslant \eta(x_1,\dots,x_{N-1}) \}.$$

On définit des champs de vecteurs $\theta^1,\dots,\theta^{N-1}$ par

$$\theta^j = e^j + \frac{\partial \eta}{\partial x_j} e^N \qquad \text{dans } \overline{\Omega} \cap \mathcal{V}, \tag{4.9}$$

qui sont de classe C^2 et tangents à $\partial\Omega$ sur $\partial\Omega \cap \mathcal{V}$. On peut les prolonger en des champs, encore notés $\theta^1,...,\theta^{N-1}$, qui vérifient (2.4), i.e. tels que

$$\theta^j \in C^2(\Omega)^N \quad \text{et} \quad \sum_{i=1,...,N} n_i(\theta^j)_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \qquad j = 1,...,N-1.$$

Il résulte de (4.9) que

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial \theta^j} - \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_N} \qquad \forall\, v \in L^r(\Omega \cap \mathscr{V}). \tag{4.10}$$

où d'après (4.5) $\dfrac{\partial v}{\partial \theta^j} = \Sigma_i\,(\theta^j)_i\,\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, ou encore

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial \theta^j} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_N \partial x_j} v - \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j} v\right) \qquad \forall\, v \in L^r(\Omega \cap \mathscr{V}). \tag{4.11}$$

b - Régularité de $\left(\sum_{j=1,...,N} \left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial x_N} - \sum_{j=1,...,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)$ *quand* $p > 2$. Posons $\psi = |\operatorname{grad} w|^{p-2} \operatorname{grad} w$; l'équation (4.2) s'écrit

$$-\operatorname{div}(d\psi) = -d \sum_{j=1,...,N} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1,...,N} \frac{\partial d}{\partial x_j}\psi_j = f.$$

En divisant par $-d$ et en décomposant $\dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_j}$ avec (4.11) il vient dans $\Omega \cap \mathscr{V}$,

$$\tag{4.12} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=1,...,N-1}\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial \theta^j} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_N \partial x_j}\psi_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\psi_N - \sum_{j=1,...,N-1}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j\right) \\ &\qquad + \frac{1}{d}\sum_{j=1,...,N}\frac{\partial d}{\partial x_j}\psi_j = -\frac{f}{d}. \end{aligned} \right.$$

L'hypothèse $w \in B^{1+s,p}_{\infty\ \text{tang}}(\Omega)$ entraîne d'après (4.6) $\operatorname{grad} w \in (B^{s,p}_{\infty\ \text{tang}}(\Omega))^N$ donc d'après (4.8),

$$\psi \in (B^{s,p^*}_{\infty\ \text{tang}}(\Omega))^N \tag{4.13}$$

et enfin, d'après (4.7),

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta^j} \in (B^{s-1,p^*}_{\infty}(\Omega))^N, \qquad j = 1,...,N-1. \tag{4.14}$$

D'autre part (4.4) et $\eta \in C^3(R^{N-1})$ entraînent

$$\sum_{j=1,...,N-1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_N \partial x_j}\psi_j + \frac{1}{d}\sum_{j=1,...,N}\frac{\partial d}{\partial x_j}\psi_j + \frac{f}{d} \in L^{p^*}(\Omega \cap \mathscr{V}). \tag{4.15}$$

Revenons à l'équation (4.12). Avec (4.14) et (4.15) il vient

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(\psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j) \in B_\infty^{s-1,p^*}(\Omega \cap \mathcal{V}) \tag{4.16}$$

Comme $\eta \in C^3(R^{N-1})$, (4.10) donne $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial \theta^i} \in C^1\ (\Omega \cap \mathcal{V})$ et avec (4.14) il vient

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i}(\psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j) = \frac{\partial \psi_N}{\partial \theta^i} - \sum_{j=1,\dots,N-1}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial \theta^i}\psi_j + \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial \theta^i}\right) \in B_\infty^{s-1,p^*}(\Omega \cap \mathcal{V})$$

$$\text{pour } i = 1,\dots,N-1.$$

En utilisant la décomposition (4.10) il en résulte avec (4.16) que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j) \in B_\infty^{s-1,p^*}(\Omega \cap \mathcal{V}) \quad \text{pour } i = 1,\dots,N-1$$

donc

$$\psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j \in B_\infty^{s,p^*}(\Omega \cap \mathcal{V}). \tag{4.17}$$

c - Régularité de w *quand* p $>$ 2. On a d'après la définition de ψ

$$\psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j = \left(\sum_{j=1,\dots,N} \left|\frac{\partial w}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial x_N} - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)$$

et en décomposant $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}$ avec (4.10) il vient, dans $\Omega \cap \mathcal{V}$

$$\left\{\begin{aligned} \psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\psi_j = &\left\{ \sum_{j=1,\dots,N-1} \left|\frac{\partial w}{\partial \theta^j}\right|^2 - 2\left(\sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial \theta^j}\right)\frac{\partial w}{\partial x_N} + \right. \\ &\left. + \left(1 + \sum_{j=1,\dots,N-1} \left|\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right|^2\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x_N}\right)^2 \right\}^{\frac{p}{2}-1} \times \\ \times \left\{ - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial \theta^j} + \left(1 + \sum_{j=1,\dots,N-1} \left|\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right|^2\right)\frac{\partial w}{\partial x_N} \right\} & \end{aligned}\right. \tag{4.18}$$

Comme $w \in B_{\infty\ \mathrm{tang}}^{1+s,p}(\Omega)$, d'après (4.7) on a $\dfrac{\partial w}{\partial \theta^j} \in B_\infty^{s,p}(\Omega)$ ce qui avec $\eta \in C^3(R^{N-1})$ entraîne

$$(4.19)\qquad \begin{cases} a = \left(\displaystyle\sum_{j=1,\dots,N-1} \left| \frac{\partial w}{\partial \theta^j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in B^{s,p}_{\infty}(\Omega \cap \mathscr{V}), \\ b = - \displaystyle\sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial \theta^j} \in B^{s,p}_{\infty}(\Omega \cap \mathscr{V}), \\ e = \left(\displaystyle\sum_{j=1-N-1} \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in B^{s,\infty}_{\infty}(\Omega \cap \mathscr{V}). \end{cases}$$

L'égalité (4.18) est une équation du «type (3.3)» pour $z = \dfrac{\partial w}{\partial x_N}$ et le théorème 3.1 donne, d'après (4.17) et (4.19)

$$(4.20)\qquad \frac{\partial w}{\partial x_N} \in B_{\infty}^{\frac{s}{p-1},p}(\Omega \cap \mathscr{V})$$

Comme $\dfrac{\partial w}{\partial \theta^j} \in B^{s,p}_{\infty}(\Omega) \subset B_{\infty}^{\frac{s}{p-1},p}(\Omega)$ en utilisant la décomposition (4.10) on obtient également $\dfrac{\partial w}{\partial x_j} \in B_{\infty}^{\frac{s}{p-1},p}(\Omega \cap \mathscr{V})$ pour $j = 1,\dots,N-1$, et donc

$$w \in B_{\infty}^{1+\frac{s}{p-1},p}(\Omega \cap \mathscr{V}).$$

Ce résultat est vérifié pour un voisinage $\mathscr{V}$ de tout point x^0 de $\partial\Omega$. D'autre part la régularité tangentielle entraîne, d'après la définition (2.2) des espaces asymétriques, la régularité intérieure ; plus précisément $w \in B^{1+s,p}_{\infty}(\Omega')$ pour tout ouvert Ω' que $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, et par recollement il vient

$$w \in B_{\infty}^{1+\frac{s}{p-1},p}(\Omega).$$

d - Le cas $1 < p < 2$. Au lieu de (4.13) il vient

$$\psi \in (B^{s(p-1),p^*}_{\infty\ \mathrm{tang}}(\Omega))^N.$$

En continuant comme dans le cas $p > 2$ on en déduit, au lieu de (4.17),

$$(4.21)\qquad \psi_N - \sum_{j=1,\dots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \psi_j \in B^{s(p-1),p^*}_{\infty}(\Omega \cap \mathscr{V})$$

Avec (4.19) et (4.21) le théorème 3.1 pour $p < 2$ donne, au lieu de (4.20),

$$\frac{\partial w}{\partial x_N} \in B^{s(p-1),p}_{\infty}(\Omega \cap \mathscr{V})$$

On en déduit, comme pour $p > 2$, que

$$w \in B_{\infty}^{1+s(p-1),p}(\Omega).$$

e - Le cas $p = 2$. On suppose ici $w \in W^{2,2}_{tang}(\Omega)$; en reprenant la partie b de la démonstration il vient, au lieu de (4.17)

$$\frac{\partial w}{\partial x_N} - \sum_{j=1,\ldots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} \in W^{1,2}(\Omega \cap \mathscr{V}).$$

En décomposant $\dfrac{\partial w}{\partial x_j}$ avec (4.10) on obtient

$$\left(1 + \sum_{j=1,\ldots,N-1} \left|\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right|^2\right) \frac{\partial w}{\partial x_N} - \sum_{j=1,\ldots,N-1} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial \theta^j} \in W^{1,2}(\Omega \cap \mathscr{V}).$$

d'où

$$\frac{\partial w}{\partial x_N} \in W^{1,2}(\Omega \cap \mathscr{V}).$$

On en déduit $w \in W^{2,2}(\Omega \cap \mathscr{V})$ et par recollement

$$w \in W^{2,2}(\Omega). \quad \blacksquare$$

Remarque 4.1. Affaiblissement des hypothèses. On peut remplacer les hypothèses (4.3) et (4.4) par $\partial\Omega$ est de classe C^2,

(4.22) $$d \in B_{\infty}^{s,\infty}(\Omega) \quad \text{et} \quad f \in B_{\infty}^{s-1,p^*}(\Omega).$$

La démonstration est identique à ceci près que $\eta \in C^2(R^{N-1})$, donc que les champs θ^j sont seulement de classe C^1 (les propriétés (2.5) à (2.8) sont encore vérifiées ; on a besoin que θ sont de classe C^2 seulement pour (2.9) qui ne sert pas dans cette démonstration). $\blacksquare$

REFERENCES

DE THELIN F. [1] *«Régularité intérieure de la solution d'un problème de Dirichlet fortement non linéaire»*. C.R. Acad. Sci. Paris, 286 (1978) p. 443 à 445.

[2] *«Régularité de la solution d'un problème de Dirichlet fortement non linéaire»*. Thèse, Toulouse (1981).

GLOWINSKI R. et MARROCCO A. [1] *«Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution...»*. Revue française d'Automatique, Informatique et Rech. Opérationnelle, (8-1975) R. 2 p. 41 à 76.

JAKOLEV G.N. [1] *«The first boundary value problem for quasilinear elliptic equations of second order»*. Trudy Mat. Inst. Steklov, 117 (1972) p. 321 à 340.

LIONS J.L. [1] *«Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires»*. Paris, Dunod (1968).

LIONS J.L. et MAGENES E. [1] *«Problemi al contorno non omogenei (III)»*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 15 (1961) p. 39 à 101.

[2] *«Problèmes aux limites non homogènes et applications»*. Vol. 2, Dunod, (1968)

LIONS J.L. et PEETRE J. [1] *«Sur une classe d'espaces d'interpolation»*. Inst. Hautes Etudes, Paris, 19 (1964) p. 5 à 68.

NIRENBERG L. [1] *«Remarks on strongly elliptic partial differential equations»*. Comm. Pure Appl. Math., vol. 8 (1955) p. 648 à 674.

PEETRE J. [1] *«Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation»*. C.R. Acad. Sci., Paris, 256 (1963) p. 54 et 55.

SIMON J. [1] *«Régularité de solutions de problèmes non linéaires»*. C.R. Acad. Sci., Paris, 282 (1976) p. 1351 à 1354.

[2] *«Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans* R^N*»*. In Journées d'analyse non linéaire. Proceedings, Besançon, France (1977), Lectures notes in Mathematics no 665. Springer-Verlag.

[3] *«Caractérisation d'espaces fonctionnels»*. Bolletino U.M.I. (5) 15-B (1978) p. 687 à 714.

[4] *«Régularité locale des solutions d'un équation non linéaire»*. Thèse ch. V, Paris, (1977).

UHLENBECK K. [1] *«Regularity for a class of non linear elliptic systems»*. Acta Mathematica, 138 (1977) p. 219 à 240.

VISIK I.M. [1] *«Sur la résolution des problèmes aux limites pour des équations paraboliques quasi linéaires d'ordre quelconque».* Mat. Sbornik, 59 (101) (1962) p. 289 à 325.

(Manuscrit reçu le 21 janvier 1980)