GÉRARD RAUZY

Discrépance d'une suite complètement équirépartie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 3, nº 2 (1981), p. 105-112
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_2_105_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol III, 1981, P. 105 à 112

DISCREPANCE D'UNE SUITE COMPLETEMENT EQUIREPARTIE

Gérard Rauzy (1)

(1) Université d'Aix Marseille II, Faculté des Sciences de Luminy, Département de Mathématiques 13288 Marseille Cédex 2 - France.

Résumé : Nous construisons une suite complètement équirépartie sur [0,1] et de faible discrépance.

Summary : We construct a sequence completely uniformly distributed on the unit interval with small discrepancy.

Pour répondre à une question posée par COQUET, nous construisons une suite w à termes dans [0,1[*complètement* équirépartie et dont la discrépance à l'origine D*(N) vérifie :

$$\varlimsup_{N \to \infty} \frac{ND^*(N)}{\log N} \leqslant \frac{1}{\log 2} .$$

On peut du reste affiner ce résultat en employant les méthodes de R. BEJIAN et H. FAURE.

1. - LES SUITES w_T

Nous commençons par construire «à la Van der Corput» des suites w_T de la manière suivante. Soit T un couple (t,τ) où t appartient à IN et τ est une permutation de $\{0,\dots,2^t-1\}$.

La suite w_T associée est définie par :

(i) si $n < 2^t$ $\quad w_T(n) = \dfrac{\tau(n)}{2^t}$

(ii) si $n \geqslant 2^t$ et si k est l'entier défini par : $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ alors

$$w_T(n) = w_T(n-2^k) + \frac{1}{2^{k+1}} .$$

• Les propriétés suivantes sont évidentes :

(1.1) Si $k \geqslant t$, w_T induit une bijection de l'ensemble $\{0,\dots,2^k-1\}$ sur l'ensemble $\left\{\dfrac{h}{2^k} \; ; \; h = 0,\dots,2^k-1\right\}$.

(1.2) Si $k \geqslant t$, w_T induit une bijection de l'ensemble $\{2^k,\dots,2^{k+1}-1\}$ sur l'ensemble $\left\{\dfrac{2h+1}{2^{k+1}} \; ; \; h = 0,\dots,2^k-1\right\}$.

(1.3) Si n appartient à $\mathbb{N}$ et si r est le reste de la division de n par 2^t

$$w_T(n) \in \left[\frac{\tau(r)}{2^t} , \frac{\tau(r)+1}{2^t} \right[.$$

2. - DISCREPANCE DES SUITES w_T

• Soient a,b des entiers tels que $0 \leqslant a < b$, soient x un élément de $[0,1]$, v une suite à termes dans $[0,1]$. Nous désignons par $R(a,b,x,v)$ la quantité :

$$R(a,b,x,v) = \text{card}\,\{n \; ; a \leqslant n < b \, , \; v_n \in [0,x]\} - (b-a)x .$$

On a évidemment, si $a < b < c$,

$$R(a,c,x,v) = R(a,b,x,v) + R(b,c,x,v)$$

et la discrépance à l'origine D^* de la suite v est définie pour N supérieur ou égal à 1 par :

$$ND^*(N) = \sup_{x \in [0,1]} |R(0,N,x,v)| .$$

On sait par ailleurs que la discrépance D de la suite v vérifie :

$$\forall N \geqslant 1 \qquad D^*(N) \leqslant D(N) \leqslant 2D^*(N)$$

• Soit k un entier supérieur ou égal à t, soient θ un élément de $\left[0\,,\frac{1}{2^k}\right[$ et x un élément de [0,1] . Il résulte de la propriété (1.1) que pour tout entier n inférieur ou égal à 2^k, $w_T(n)+\theta$ appartient à [0,1] .

En outre, toujours d'après (1.1) :

$$\operatorname{card}\left\{n<2^k,\ w_T(n)+\theta<x\right\}=\operatorname{card}\left\{m<2^k,\ \frac{m}{2^k}+\theta<x\right\}=h+1$$

h désignant l'entier tel que $\frac{h}{2^k}<x-\theta\leqslant\frac{h+1}{2^k}$.

On en déduit la majoration :

$$|R(0,2^k,x,w_T+\theta)|\leqslant 1. \tag{2.1}$$

• Soit maintenant k un élément de IN, N un élément de $\left\{1,\dots,2^k\right\}$, θ un élément de $\left[0,\frac{1}{2^k}\right[$ et x un élément de [0,1] .

Nous allons montrer par récurrence la relation :

$$|R(0,N,x,w_T+\theta)|\leqslant 2^t+\frac{\log N}{\log 2} \tag{2.2}$$

La relation (2.2) est en effet vérifiée pour N inférieur ou égal à 2^t car dans ce cas, quelle que soit la suite v, on a :

$$|R(0,N,x,v)|\leqslant N\leqslant 2^t$$

Supposons la relation (2.2) vérifiée pour tout entier inférieur ou égal à 2^k où $k\geqslant t$ et soit N tel que $2^k<N\leqslant 2^{k+1}$ et θ tel que $0\leqslant\theta<\frac{1}{2^{k+1}}$. On a alors :

$$R(0,N,x,w_T+\theta)=R(0,2^k,x,w_T+\theta)+R(2^k,N,x,w_T+\theta)$$

Le deuxième terme s'écrit par définition de w_T :

$$R(2^k,N,x,w_T+\theta)=R(0,N-2^k,x,w_T+\theta')$$

où $\theta'=\theta+\frac{1}{2^{k+1}}$ appartient à $\left[0,\frac{1}{2^k}\right[$.

Majorant $R(0,2^k,x,w_T+\theta)$ en vertu de (2.1), et $R(0,N-2^k,x,w_T+\theta')$ en vertu de l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|\,R(0,N,x,w_T+\theta)\,| \leqslant 1+2^t+\frac{\log(N-2^k)}{\log 2}=2^t+\frac{\log(2N-2^{k+1})}{\log 2}$$

d'où la majoration cherchée puisque :

$$2N-2^{k+1}=N-(2^{k+1}-N)\leqslant N.$$

• La relation (2.2) permet de donner immédiatement une majoration de la discrépance des suites w_T. Il en résulte également que si k appartient à IN, si N est un entier tel que $2^k < N \leqslant 2^{k+1}$, et si x est un élément de [0,1] on a :

$$|\,R(2^k,N,x,w_T)\,| \leqslant 2^t+\frac{\log(N-2^k)}{\log 2}. \tag{2.3}$$

3. - LA SUITE w

• Soit $(t_k)_{k\in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant :

$$0\leqslant t_k\leqslant k \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} 2^{t_k}/k=0$$

Soit, par ailleurs, pour tout k dans IN, τ_k une permutation de $\{0,\dots,2^{t_k}-1\}$ et soit T_k le couple (t_k,τ_k).

Nous allons définir la suite w de la manière suivante :

$$w(0)=0 \quad \text{et si} \quad 2^k\leqslant n<2^{k+1} \quad w(n)=w_{T_k}(n)$$

Nous précisons ultérieurement le choix des T_k de manière à assurer la complète équirépartition de la suite w, mais nous pourrons d'ores et déjà majorer sa discrépance.

• Il résulte de la relation $0\leqslant t_k\leqslant k$ et de la proposition (1.2) que la suite w induit une bijection de l'ensemble $\{0,\dots,2^k-1\}$ sur l'ensemble des $\frac{h}{2^k}$ où $h=0,\dots,2^k-1$.

En particulier, pour tout k de IN et tout x de [0,1]

$$|\,R(0,2^k,x,w)\,|\leqslant 1.$$

Par ailleurs, si $2^k<N\leqslant 2^{k+1}$:

$$R(2^k,N,x,w)=R(2^k,N,x,w_{T_k})$$

et la majoration obtenue en (2.3) s'applique, d'où :

$$|R(0,N,x,w)| \leqslant 1 + 2^{t_k} + \frac{\log(N-2^k)}{\log 2} \leqslant 2^{t_k} + \frac{\log N}{\log 2}$$

Comme $2^{t_k}/\log N \leqslant 2^{t_k}/(k \log 2)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, on en déduit bien :

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{ND^*(N)}{\log N} \leqslant \frac{1}{\log 2}$$

4. - FIN DE LA CONSTRUCTION DE w

• Commençons par un lemme :

LEMME. *Soient* s *et* m *des entiers supérieurs ou égaux à* 1. *Il existe une suite* u *périodique de période* m^s (*c'est-à-dire, telle que* $u(n + m^s) = u(n)$), *à termes dans* $\{0,\dots,m-1\}$ *et telle que les* m^s s-uplets *de la forme :*

$$(u(n),\dots,u(n+s-1)) \text{ où } n = 0,\dots,m^s-1$$

soient tous distincts. C'est-à-dire encore que, pour tout s-uplet $(x_1,\dots,x_s)$ *d'éléments de* $\{0,\dots,m-1\}$, *il existe exactement un entier* n *dans l'intervalle* $\{0,\dots,m^s-1\}$ *tel que :*

$$(u(n),\dots,u(n+s-1)) = (x_1,\dots,x_s).$$

(Voir par exemple PRIMATH n° 3 - A. BLANCHARD - Quelques questions liées à la théorie des corps finis, ou PRIMATH n° 4 - G. RAUZY - Mots circulaires et réseaux électriques, ou KNUTH - The art of computer programming, Addison Wesley 1971 - Vol. 2 Ch. 3 paragraphe 3.2.2).

• Définissons maintenant une application σ de IN dans $0,\dots,m^s-1$ de la manière suivante :

(i) Si $0 \leqslant n < m^s$ et si $n = mq + r$ où $0 \leqslant r < m$ et donc $0 \leqslant q < m^{s-1}$, on pose $\sigma(n) = m^{s-1} u(r) + q$

(ii) Si $n \geqslant m^s$, $\sigma(n) = \sigma(n-m^s)$.

L'application σ possède alors les propriétés suivantes :

(4.1) La restriction de σ à $\{0,\dots,m^s-1\}$ est une permutation de cet ensemble.

(4.2) Si r désigne le reste de la division de n par m^{s-1}, $\frac{\sigma(n)}{m^s}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{u(r)}{m}, \frac{u(r)+1}{m}\right[$.

De (4.2) on déduit aisément en utilisant la propriété énoncée dans le lemme que si $P(x_1,\ldots,x_s)$ est le pavé de $[0,1[^s$

$$P(x_1,\ldots,x_s)=\left[\frac{x_1}{m},\frac{x_1+1}{m}\right[\times\ldots\times\left[\frac{x_s}{m},\ldots,\frac{x_s+1}{m}\right[$$

($x_1,\ldots,x_s$ entiers appartenant à $\{0,\ldots,m-1\}$, il existe exactement un entier n dans $\{0,\ldots,m^s-1\}$ tel que $\left(\frac{\sigma(n)}{m^s},\ldots,\frac{\sigma(n+s-1)}{m^s}\right)$ appartienne à $P(x_1,\ldots,x_s)$.

• Particularisons en posant $m = 2^s$. Soit $t = s^2$ et soit τ la permutation de $\{0,\ldots,2^t-1\}$ en lui-même, restriction de σ à cet ensemble.

Posons $T = (t, \tau)$.

D'après (1.3), si n appartient à IN et si r est le reste de la division de n par 2^t :

$$w_T(n)\in\left[\frac{\tau(r)}{2^t},\frac{\tau(r)+1}{2^t}\right[.$$

Posons

$$r=qm+\rho=q\times 2^s+\rho \quad \text{où} \quad 0\leqslant\rho<2^s.$$

Par construction de τ, c'est-à-dire de σ, on a :

$$\tau(r)=m^{s-1}\,u(\rho)+q$$

d'où :

$$\frac{\tau(r)}{2^t}=\frac{u(\rho)}{2^s}+\frac{q}{2^t} \quad \text{et} \quad \frac{q}{2^t}<\frac{1}{2^s} \quad \text{donc} \quad \frac{q+1}{2^t}\leqslant\frac{1}{2^s}$$

Par ailleurs, ρ est le reste de la division de n par 2^s. Finalement on obtient :

(4.3) *Si ρ désigne le reste de la division de* n *par* 2^s, *on a :*

$$w_T(n)\in\left[\frac{u(\rho)}{2^s},\frac{u(\rho)+1}{2^s}\right[$$

En outre, si $x_{,}\ldots,x_s$ sont des éléments de $\{0,\ldots,2^s-1\}$ et si $P(x_1,\ldots,x_s)$ désigne le pavé de $[0,1[^s$ défini par :

$$P(x_1,\ldots,x_s)=\left[\frac{x_1}{2^s},\frac{x_1+1}{2^s}\right[\times\ldots\times\left[\frac{x_s}{2^s},\frac{x_s+1}{2^s}\right[$$

dans tout intervalle I de IN formé de 2^t entiers consécutifs il existe exactement un entier n *tel que :*

$$(w_T(n),\ldots,w_T(n+s-1))\in P(x_1,\ldots,x_s)$$

• Appelons T(s) le couple (t, τ) construit dans ce paragraphe. Nous allons maintenant, complètement déterminer w, en choisissant T_k de la manière suivante :

(i) Si $k = 0,1,2$ $\quad T_k$ est l'unique couple (t, τ) avec $t = 0$.

(ii) Si $k \geqslant 3$ $\quad T_k = T\left(\left[(\log k)^{1/3}\right]\right)$ où [z] désigne la partie entière de z.

Pour $k \geqslant 3$, on aura alors $t_k = \left[(\log k)^{1/3}\right]^2 < (\log k)^{2/3}$, soit en particulier $t_k \leqslant k$ et $\lim\limits_{k\to\infty} 2^{t_k}/k = 0$.

5. - COMPLETE EQUIREPARTITION DE w

• Il suffit de montrer qu'étant donnés des entiers p et q strictement positifs et un q-uplet quelconque $(z_1,\ldots,z_q)$ d'entiers appartenant à $\{0,\ldots,2^{p-1}\}$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\left\{n < N,\ (w_{(n)},\ldots,w_{(n+q-1)}) \in P\right\} = \frac{1}{2^{pq}}$$

où P désigne le pavé de $[0,1[^{\,q}$ défini par :

$$P = \left[\frac{z_1}{2^p}, \frac{z_1+1}{2^p}\right[\times \ldots \times \left[\frac{z_q}{2^p}, \frac{z_q+1}{2^p}\right[$$

• Soit alors k un entier assez grand pour que :

$$s = \left[(\log k)^{2/3}\right] \geqslant \max(p,q)$$

et soit N un entier tel que $2^k < N \leqslant 2^{k+1}$. Nous allons évaluer :

$$F = \operatorname{card}\left\{n, 2^k \leqslant n < N,\ (w_{(n)},\ldots,w_{(n+q-1)}) \in P\right\}.$$

• Posons $t = t_k = s^2$, $T = T_k$ et remarquons que si $N + q-1 \leqslant 2^{k+1}$ ce nombre est égal à :

$$\operatorname{card}\left\{n, 2^k \leqslant n < N,\ (w_T(n),\ldots,w_T(n+q-1)) \in P\right\}$$

Supposons tout d'abord $N = 2^k + m\,2^t$ avec $m < 2^{k-t}$. Il résulte alors de (4.3) que :

$$\operatorname{card}\left\{n, 2^k \leqslant n < N,\ (w_T(n),\ldots,w_T(n+q-1)) \in P\right\} = \frac{m\,2^t}{2^{pq}} = \frac{N-2^k}{2^{pq}}$$

Par ailleurs, si $2^k + m\,2^t < N \leqslant 2^k + (m+1)^t$,

$$\operatorname{card}\left\{n, 2^k + m\,2^t \leqslant n < N,\ (w_T(n),\ldots,w_T(n+q-1)) \in P\right\} \leqslant 2^t$$

Finalement on a dans tous les cas :

$$\left| F - \frac{N-2^k}{2^{pq}} \right| \leqslant 2^t$$

On en déduit l'existence d'un réel C tel que si N vérifie $2^k < N \leqslant 2^{k+1}$ on a :

$$\left| \operatorname{card} \left\{ n < N, (w(n), \ldots, w(n+q-1)) \in P \right\} - \frac{N}{2^{pq}} \right| < C + \sum_{h=0}^{k} 2^{t_h}$$

Comme $2^{t_k}/k \to 0$ quand $k \to \infty$

$$\frac{1}{2^k} \left(C + \sum_{h=0}^{k} 2^{t_h} \right) \to 0 \text{ quand } k \to \infty$$

ce qui termine la démonstration.

Remarquons que l'on aurait pu donner de la même manière une majoration de la discrépance dans $[0,1[^q$ de la suite w.

(Manuscrit reçu le 24 février 1981)