LUCIO BOCCARDO

Régularité $W_0^{1,p}$ $(2 < p < +\infty)$ de la solution d'un problème unilatéral

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 3, nº 1 (1981), p. 69-74

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1981_5_3_1_69_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol III, 1981, P. 69 à 74

REGULARITE $W_0^{1,p}(2 < p < +\infty)$ DE LA SOLUTION D'UN PROBLEME UNILATERAL

Lucio Boccardo (1)

(1) Instituto di Matematica, Universita' Degli Studi Dell'Aquila Degli Abruzzi - 67100 L'Aquila - Italia.

Résumé : On démontre un résultat de régularité $W^{1,p}$, $p \in (2, +\infty)$, et de dépendance continue des données de la solution d'un problème unilatéral.

Summary : In this paper, we prove a $W^{1,p}$ regularity and continuous dependence result of solution to a unilateral problem.

Dans cet article on s'intéresse à la régularité $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la solution du problème unilatéral

$$(1)\quad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega),\ u \geqslant \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ a(u, v-u) \geqslant \langle f, v-u \rangle \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ v \geqslant \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de classe C^2 de R^N, $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ ($\psi \leqslant 0$ sur $\partial\Omega$) et $2 < p < +\infty$.

$$(4) \quad \begin{cases} (u-z) \in H_o^1(\Omega)\,,\ (u-z) \geqslant \psi - z \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ a((u-z)\,,\, v-(u-z)) \geqslant 0 \\ \forall\, v \in H_o^1(\Omega)\,,\ v \geqslant \psi - z \quad \text{p.p. dans } \Omega\,. \end{cases}$$

En changeant ψ en $\psi - z \in W^{1,p}(\Omega)$, on peut remplacer f par 0.

Deuxième étape.

On va voir maintenant que l'on peut supposer $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$. En effet, comme l'on a supposé $f = 0$, on a

$$a(u,\varphi) \geqslant 0 \qquad \forall\, \varphi \in H_o^1(\Omega),\ \varphi \geqslant 0\,;$$

et donc, d'après le principe du maximum, u est positive p.p. dans Ω. Mais on ne change pas la solution du problème unilatéral que nous considérons ici en remplaçant ψ par $\sup(\psi,0)$; et comme $\sup(\psi,0) \in W_o^{1,p}(\Omega)$, on voit qu'on peut supposer que l'obstacle ψ est dans $W_o^{1,p}(\Omega)$.

Troisième étape.

On s'est donc ramené au problème :

$$(5) \quad \begin{cases} u \in H_o^1(\Omega)\,,\ \ u \geqslant \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ a(u, v-u) \geqslant 0) \\ \forall\, v \in H_o^1(\Omega)\,,\ \ v \geqslant \psi \quad \text{p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

avec $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$. On va obtenir la conclusion en employant deux résultats d'interpolation : un théorème d'interpolation non linéaire de L. Tartar [11] et un théorème d'interpolation d'espaces de Sobolev de R. Devore et K. Schurer [8].

On définit par $S(\psi)$ la solution u de (5). On a, d'une part si ψ et $\hat{\psi} \in H_o^1(\Omega)$,

$$(6) \qquad \| S(\psi) - S(\hat{\psi}) \|_{H_o^1(\Omega)} \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \| \psi - \hat{\psi} \|_{H_o^1(\Omega)}$$

(la démonstration est classique) et, d'autre part si $\psi \in W_o^{1,\infty}(\Omega)$,

$$(7) \qquad \| S(\psi) \|_{W_o^{1,\infty}(\Omega)} \leqslant C_1 \| \psi \|_{W_o^{1,\infty}(\Omega)} \qquad (C_1 > 0)$$

(cf. [7], théorème 1).

D'après un théorème d'interpolation non linéaire de L. Tartar ([11] théorème 3) l'application S envoie $E_p := (H_0^1(\Omega), W_0^{1,\infty}(\Omega))_{1-2/p,p}$ dans lui-même et

$$\| S(\psi) \|_{E_p} \leqslant \sup(C_1, \beta/\alpha) \| \psi \|_{E_p} \tag{8}$$

Mais d'après un résultat de [8] , paragraphe 5, E_p n'est autre que $W_0^{1,p}(\Omega)$, avec une norme équivalente. On a donc

$$\| S(\psi) \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant C_2 \| \psi \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \cdot \quad (C_2 > 0) \tag{9}$$

Conclusion.

Revenant au problème initial (1), on a démontré que la solution u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ et, à partir de (9), on a

$$\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant C_3 \left\{ \| \psi \|_{W^{1,p}(\Omega)} + \| f \|_{W^{-1,p}(\Omega)} \right\} \quad \blacksquare \tag{10}$$

La majoration (10) montre que, pour $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ fixé, l'application qui à $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ associe la solution u de (1) est bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Le théorème suivant montre que cette application est séquentiellement continue de $W^{1,p}(\Omega)$-faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$-faible. Le problème de la continuité de $W^{1,p}(\Omega)$-fort dans $W_0^{1,p}(\Omega)$-fort est ouvert.

THEOREME 2. *Soient* $2 < p < +\infty$, $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ et ψ_ϵ *une suite de fonctions qui converge dans* $W^{1,p}(\Omega)$*-faible vers* ψ_0 ($\psi_\epsilon \leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$). *Alors, si l'on appelle* u_ϵ *(resp.* u_0*) la solution de l'inéquation posée sur* ψ_ϵ *(resp.* ψ_0*), on a que* u_ϵ *converge vers* u_0 *dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$*-faible et dans* $W_0^{1,q}(\Omega)$*-fort, pour tout* q *tel que* $2 < q < p$.

Démonstration. Puisque $p > 2$, le théorème 1 de [3] entraîne que u_ϵ converge vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$-fort. L'inégalité (10) donne alors la première conclusion.

Mais évidemment on a aussi

$$\| u_\epsilon - u_0 \|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \leqslant C_4 \| u_\epsilon - u_0 \|^r_{H_0^1(\Omega)} \| u_\epsilon - u_0 \|^s_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

$$\leqslant C_5 \| u_\epsilon - u_0 \|^r_{H_0^1(\Omega)},$$

où $r = \dfrac{2(p-q)}{q(p-2)}$ et $s = \dfrac{p(q-2)}{q(p-2)}$ $\blacksquare$

Remarque 1. La conclusion du théorème 2 est fausse si p = 2 (voir [3]).

Remarque 2. Toutes les conclusions précédentes restent valables si on étudie des problèmes bilatéraux.

Remerciements

Ce problème m'a été signalé par M. H. Brézis que je remercie vivement. Ce travail a été effectué pendant un séjour à l'Université Paris VI où l'auteur était boursier du C.N.R. (Italien).

REFERENCES

[1] M. BIROLI. *«Une estimation dans L^p du gradient de la solution d'une inéquation elliptique du second ordre»*. C.R. Acad. Sci. Paris 288 (1979), 453-455.

[2] L. BOCCARDO. *«An L^s-estimate for the gradient of solutions of some strongly nonlinear unilateral problems»*. Preprint.

[3] L. BOCCARDO, F. MURAT. *«Convergence des obstacles dans des problèmes unilatéraux»*. Preprint.

[4] H. BREZIS. *«Problèmes unilatéraux»*. J. Math. Pures et Appl. 5 (1972), 1-168.

[5] H. BREZIS, D. KINDERLEHRER. *«The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities»*. Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 831-844.

[6] H. BREZIS, G. STAMPACCHIA. *«Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques»*. Bull. Soc. Math. de France, 96 (1968), 153-180.

[7] M. CHIPOT. *«Sur la régularité lipschitzienne de la solution d'inéquations elliptiques»*. J. Math. Pures et Appl. 57 (1978), 69-76.

[8] R. DEVORE, K. SCHERER. *«Interpolation of linear operators on Sobolev spaces»*. Annals of Math. 109 (1975), 583-599.

[9] M. GIAQUINTA, G. MODICA. *«Regolarità lipschitziana per la soluzione di alcuni problemi di minimo con vincolo»*. Annali di Mat. Pura Appl. 106 (1975), 95- .

[10] J.L. LIONS, E. MAGENES. *«Problemi ai limiti non omogenei III»*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 15 (1961), 41-101.

[11] L. TARTAR. *«Interpolation non linéaire et régularité»*. J. Funct. Anal. 9 (1972), 469-489.

(Manuscrit reçu le 8 août 1980)