

MARIA JESUS ESTEBAN

**Existence d'une infinité d'ondes solitaires pour des équations  
de champs non linéaires dans le plan**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 3-4 (1980), p. 181-191

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1980\\_5\\_2\\_3-4\\_181\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_3-4_181_0)

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE D'UNE INFINITE D'ONDES SOLITAIRES  
POUR DES EQUATIONS DE CHAMPS NON LINEAIRES DANS LE PLAN

Maria Jesus Esteban <sup>(1)</sup>

(1) *Analyse Numérique, Tour 55-65, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu - 75230 Paris Cédex 05 - France.*

**Résumé :** On montre, sous des conditions générales, l'existence d'une solution positive et d'une infinité de solutions non triviales, radiales et exponentiellement décroissantes à l'infini, du problème :

$$-\Delta u = g(u) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

où  $g(0) = 0$ .

La démonstration utilise des résultats des points critiques.

**Summary :** We prove that, under general conditions, there exist one positive solution and infinitely many non-trivial and radial solutions, which decay exponentially at infinity, of the problem

$$-\Delta u = g(u) \text{ in } \mathbb{R}^2,$$

where  $g(0) = 0$ .

The proof relies on some critical-points results.

## INTRODUCTION

Dans cet article on étudie l'existence de solutions dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$  de l'équation semi-linéaire :

$$(1) \quad \begin{aligned} & -\Delta u + mu = g(u) \text{ dans } \mathbb{R}^2 \\ & u \neq 0 ; m > 0, m \text{ constante.} \end{aligned}$$

Ce problème intervient, en particulier, dans l'étude de l'existence d'ondes stationnaires dans des équations de Klein-Gordon ou Schrödinger non linéaires (voir, par ex., [3,7]). Ce type d'équations (appelées équations de champs non linéaires) apparaît également dans divers domaines de la Physique théorique.

Rappelons (voir [3,5,6]) que dans le cas  $N = 1$  et  $N \geq 3$ , ce problème est résolu sous des conditions qui semblent pratiquement optimales ; la démonstration dans le cas  $N \geq 3$  de [7] repose sur des méthodes variationnelles qui ne s'appliquent pas à l'équation (1) dans  $\mathbb{R}^2$ .

D'autre part, dans le cas d'un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , on dispose de résultats bien connus (voir, par exemple, [1,2]) obtenus, en particulier, par des méthodes de points critiques.

Dans cet article nous étudions le problème (1) par une méthode de points critiques ; plus précisément, nous obtenons l'existence d'une infinité de solutions, sous certaines hypothèses, en appliquant plusieurs théorèmes dûs à Ambrosetti-Rabinowitz (voir [1,2]).

Le plan de ce travail est le suivant :

1. - Hypothèses et résultats.
2. - Rappels sur quelques résultats de points critiques.
3. - Démonstration des résultats.
4. - Propriétés supplémentaires des solutions obtenues et autres remarques.

### 1. - HYPOTHESES ET RESULTATS

On supposera que  $g$  satisfait les conditions suivantes :

$$(2) \quad g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$(3) \quad g(s) = o(s) \text{ en } s = 0$$

$$(4) \quad g(s) = O(e^{s^{2-\eta}}), \text{ lorsque } s \rightarrow +\infty; \eta > 0$$

$$(5) \quad \exists \theta \in (0, 1/2) \text{ tel que } G(s) \leq \theta s g(s) \quad \forall s,$$

$$\text{où } G(s) = \int_0^s g(t) dt.$$

$$(6) \quad \exists \xi > 0 \text{ tel que } G(\xi) > 0$$

THEOREME 1. *Sous les hypothèses (2) - (6), le problème (1) admet une solution positive, u, dans l'espace  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  (\*). De plus, u est exponentiellement décroissante à l'infini, i.e,  $\exists M, C > 0$  tels que  $|u(x)| \leq M e^{-Cr}$ , lorsque  $r = |x| \rightarrow +\infty$ . Enfin,  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .*

THEOREME 2. *Sous les hypothèses (2) - (6), si l'on suppose de plus que g est impaire, il existe une infinité de solutions distinctes de (1) dans  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ , à décroissance exponentielle à l'infini, et qui appartiennent aussi à  $C^2(\mathbb{R}^2)$ .*

Remarque 3. Considérons le problème «non autonome» suivant :

$$(7) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= h(r, u) \text{ dans } \mathbb{R}^2. \\ u &\in H^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

Il est aisé de démontrer, en utilisant les mêmes techniques que pour les théorèmes 2 et 3, que si l'on fait sur h les hypothèses suivantes :

$$(8) \quad h \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

$$(9) \quad \forall r \geq 0, h \text{ est dérivable à } 0, \text{ par rapport à la deuxième variable, et l'on a :}$$

$$\frac{\partial h}{\partial s}(r, 0) = K(r) < 0 \quad \forall r.$$

$$(10) \quad h(r, s) = O(e^{s^{2-\eta}}) \text{ lorsque } s \rightarrow +\infty, \text{ avec } \eta > 0, \text{ uniformément en } r.$$

$$(11) \quad h(r, 0) = 0 \quad \forall r \geq 0.$$

---

(\*)  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  : espace des fonctions de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  qui sont à symétrie sphérique.

$$(12) \quad \exists \theta \in (0, 1/2) \text{ tel que } \forall r, \forall s,$$

$$H(r,s) \leq \theta s h(r,s) + \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial s}(r,0) \cdot (1-\theta) s^2,$$

$$\text{où } H(r,s) = \int_0^s h(r,t) dt, \quad \forall r.$$

$$(13) \quad \forall r \quad \exists \xi_r > 0 \text{ tel que } H(r, \xi_r) > 0.$$

Alors, on obtient les résultats suivants :

**THEOREME 4.** *Sous les hypothèses (8) - (13), le problème (7) admet dans  $H_r^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2)$  une solution positive, qui décroît exponentiellement à l'infini.*

**THEOREME 5.** *Si on suppose de plus que  $g(r,s)$  est impaire en  $s$ , on obtient l'existence d'une infinité de solutions, comme pour le théorème 2.*

## 2. - RAPPELS SUR QUELQUES RESULTATS DE POINTS CRITIQUES

La méthode utilisée consiste à appliquer deux théorèmes de points critiques dûs à Ambrosetti-Rabinowitz (voir th. 3.9 et th. 3.37 dans [1] ; voir également [2] ), que nous rappelons à présent.

Soit  $E$  un espace de Hilbert de dimension infinie et  $f \in C^1(E; \mathbb{R})$ .

Alors, si  $f$  vérifie :

(i) la condition (P.S.)<sup>+</sup> :  $\forall \alpha > 0, \forall M > 0, \forall \{u_n\} \subset E$  telle que  $\alpha \leq f(u_n) \leq M$  et  $f'(u_n) \rightarrow 0$  dans  $E'$  – fort, on peut extraire de  $\{u_n\}$  une sous-suite convergente dans  $E$ .

(ii)  $f(0) = 0$  et  $\exists \rho, \alpha > 0$  tels que

$$f > 0 \text{ dans } B_\rho - \{0\} \text{ et } f \geq \alpha \text{ sur } \partial B_\rho.$$

(iii)  $\exists e \in E, e \neq 0$ , tel que  $f(e) = 0$ .

Alors,  $f$  admet un point critique non trivial dans  $E$ .

D'autre part, si, de plus,  $f$  est paire, et au lieu de (iii),  $f$  vérifie la condition suivante :

(iv)  $\forall X$  sous-espace de dimension finie de  $E$ ,  $X \cap \{u \in E / f(u) \geq 0\}$  est borné dans  $E$ . Alors,  $f$  admet dans  $E$  une infinité de points critiques distincts.

En plus de ces deux théorèmes, rappelons aussi ici un lemme dû à Strauss (voir [3]), qu'on va utiliser par la suite :

LEMME 6. Soit  $P$  et  $Q$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Supposons que l'on ait :

(i)  $\frac{P(s)}{Q(s)} \rightarrow 0$  lorsque  $P \rightarrow +\infty$

(ii)  $\{u_n\}$  est une suite de fonctions mesurables :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\sup_n \int |Q(u_n)| dx < +\infty$$

(iii)  $P(u_n(x)) \rightarrow v(x)$  p.p. dans  $\mathbb{R}^2$

(iv)  $P(s) = o(Q(s))$  en  $s = 0$

(v)  $u_n(x) \rightarrow 0$ , lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ , uniformément en  $x$  et en  $n$

Alors, 
$$\int_{\mathbb{R}^2} |P(u_n) - v| dx \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

### 3. - DEMONSTRATION DES RESULTATS

On se bornera ici à la démonstration du théorème 2, car celle du théorème 1 s'effectue en utilisant mêmes techniques.

La démonstration du théorème 2 sera divisée en trois étapes, qui consistent essentiellement en la vérification des hypothèses du théorème 3.37 de [1], cité plus haut.

Définissons  $\forall u \in E = H_r^1(\mathbb{R}^2)$

$$(15) \quad S(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} G(u(x)) dx$$

C'est un résultat classique que  $S \in C^1(E; \mathbb{R})$  et que  $S'(u) = -\Delta u + m u - g(u)$  dans  $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ . Ainsi,  $u \in E$  est point critique de  $S$  si et seulement si  $u$  est solution de (1).

De plus, sous les hypothèses qu'on a,  $S$  est une fonctionnelle paire.

**Etape 1. - Vérification de la condition (PS)<sup>+</sup>**

Soit  $\alpha, M > 0$  et  $\{u_n\}$  une suite de  $E$  telle que  $\alpha < S(u_n) < M$  et  $S'(u_n) = \epsilon_n \rightarrow 0$  dans  $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$  - fort. On a, donc,

$$(16) \quad \alpha \leq \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^2} G(u_n) dx \leq M$$

$$(17) \quad -\Delta u_n + m u_n - g(u_n) = \epsilon_n \rightarrow 0 \text{ dans } H_r^{-1}(\mathbb{R}^2).$$

En multipliant (17) par  $\theta u_n$ , en intégrant par parties et en soustrayant la nouvelle équation de (16), on aura :

$$(18) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_n|^2 dx + m \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^2 dx \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^2} (G(u_n) - \theta u_n g(u_n)) dx + M + \theta \langle \epsilon_n, u_n \rangle, \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité entre  $H_r^{-1}$  et  $H_r^1$ .

En appliquant (5) on a :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} & \leq M' \left( \int |\nabla u_n|^2 + m \int |u_n|^2 \right) \leq \\ & M' M + M' \theta \|\epsilon_n\|_{H_r^{-1}} \|u_n\|_{H^1}; \epsilon_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc,  $\{u_n\}$  est une suite bornée de  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  et on peut en extraire une sous-suite, encore notée  $\{u_n\}$ , faiblement convergente dans  $E$  vers un certain élément  $u \in E$ .

Comme  $H_r^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ , avec injection compacte,  $\forall p > 2$ , on peut encore extraire une sous-suite, toujours notée  $\{u_n\}$ , qui converge vers  $u$  p.p. dans  $\mathbb{R}^2$ . Vérifions qu'en fait  $\{u_n\}$  converge vers  $u$  dans  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  - fort.

D'une part, en utilisant un raisonnement semblable à celui de l'étape 2, on remarque que  $g(u) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . D'une autre part, à l'aide des techniques de W.A. Strauss dans [3], et plus particulièrement, d'une adaptation de son lemme radial 1, et du lemme 6, on démontre que

$$\|g(u_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \rightarrow \|g(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

en reprenant les notations du lemme 6 dans la forme :

$$P(s) = |g(s)|^2 \text{ et } Q(s) = |s|^2 + e^{\frac{|s|^2}{CK}} - 1,$$

où  $K = \sup \|u_n\|_{H^1} < +\infty$  et  $C$  est la constante d'injection de  $H^1(\mathbb{R}^2)$  dans l'espace  $L_{\phi^*}$ , avec  $\phi(s) = e^{s^2} - 1$ .

Comme on sait, de plus, par (2) que  $g$  est continue,  $g(u_n) \rightarrow g(u)$  p.p. dans  $\mathbb{R}^2$ . Par conséquent,  $g(u_n) \rightarrow g(u)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et, donc, dans  $H_r^{-1}(\mathbb{R}^2)$  aussi.

Alors, on a que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Etape 2.** -  $S(o) = o$  et  $\exists \rho, \alpha > o$  telles que

$$S > o \text{ dans } B_\rho - \{o\} \text{ et } S \geq \alpha \text{ sur } \partial B_\rho.$$

Par définition de  $S$ , il est évident que  $S(o) = o$ . D'après (3) et (4),  $\forall \epsilon > o \exists \delta_\epsilon, M > o$  tels que :

$$|G(s)| \leq \epsilon |s|^2 \quad \forall |s| \leq \delta_\epsilon$$

$$|G(s)| \leq M e^{|s|^{2-\eta'}}, \quad \forall |s| > \delta_\epsilon, \text{ avec } o < \eta' < \eta.$$

Montrons, maintenant, que  $\int_{\mathbb{R}^2} G(u) dx = o(\|u\|_{H^1}^2)$ , lorsque  $\|u\|_{H^1} \rightarrow o$ , dans l'espace  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$ , ce qui implique évidemment le résultat qu'on cherche.

D'après une adaptation, facile à montrer, du lemme radial 1 de W.A. Strauss (cf. [3]),  $\exists C > o$  telle que  $\forall u \in H_r^1(\mathbb{R}^2), \forall x \neq o$ ,

$$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1/2}} \|u\|_{H^1}$$

Soit  $r = |x|$  et fixons  $R = R(u)$  tel que  $\delta_\epsilon = \frac{C}{\sqrt{R}} \|u\|_{H^1}$ . Choisissons à présent  $\|u\|_{H^1}$  suffisamment petit pour avoir  $R \leq 1$ . Alors, en appelant  $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |u(x)| \geq \delta_\epsilon\}$ , on a :



$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} G(u) dx \right| \leq \epsilon \|u\|_{H^1}^2 + M \int_{B_r \cap A_\epsilon} e^{|u|^{2-\eta'}} dx \leq \epsilon \|u\|_{H^1}^2 + M C R^{3/2} \left( \int_{B_r \cap A_\epsilon} e^{4|u|^{2-\eta'}} \right)^{1/4}$$

où l'on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Mais,

$$\int_{B_r \cap A_\epsilon} e^{4|u|^{2-\eta'}} dx \leq C R^2 + \int_{B_r \cap A_\epsilon} (e^{4|u|^{2-\eta'}} - 1) dx \leq C R^2 + 1 \leq C$$

où  $C$  est une constante générique, et ceci  $\forall u \in H_r^1(\mathbb{R}^2)$ , avec  $\|u\|_{H^1} \leq \frac{\delta \eta^{1/2}}{\sqrt{4C_1}}$ ,  $C_1$  étant la constante d'injection de  $H^1(B_1)$  dans l'espace d'Orlicz  $L_{\phi^*}$ , avec  $\phi(s) = e^{s^2} - 1$ .

Donc,  $\exists \eta_\epsilon > 0$  telle que  $\forall \|u\|_{H^1} \leq \eta_\epsilon$ , on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} G(u) dx \right| < C R^{3/2} + \epsilon \|u\|_{H^1}^2.$$

En exigeant que  $\|u\|_{H^1} \leq \delta_\epsilon^4$ , on aura que  $R \leq C^2 \|u\|_{H^1}^{3/2}$ , ce qui implique

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} G(u) dx \right| \leq C \|u\|_{H^1}^{9/4} + \epsilon \|u\|_{H^1}^2.$$

On voit, donc qu'on peut trouver  $\alpha_\epsilon > 0$  tel que  $\|u\|_{H^1} < \alpha_\epsilon$  implique

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} G(u) dx \right| \leq 2\epsilon.$$

**Etape 3.** - Si  $X$  est un sous-espace de dimension finie de  $E = H_r^1(\mathbb{R}^2)$ , l'ensemble  $X \cap \{u \in E \mid S(u) \geq 0\}$  est borné dans  $E$ .

Pour montrer ce fait on va utiliser le lemme suivant :

**LEMME 7.** Sous les hypothèses du théorème 2, il existe des constantes  $\beta, C, > 0$  telles que  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,

$$G(s) \geq -C|s|^2 + C|s|^{2+\beta}$$

*Démonstration.*

$$\frac{d}{ds} \left( G(s) s^{-\frac{1}{\theta}} \right) = \frac{1}{\theta} s^{-\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)} (\theta \operatorname{sg}(s) - G(s)) \geq 0, \quad \forall s \geq 0$$

Donc,  $\forall s > \xi, G(s)s^{-\frac{1}{\theta}} \geq G(\xi)\xi^{-\frac{1}{\theta}}, \exists C > 0$  telle que  $G(s) > Cs^{1/\theta}, \forall s > \xi$ .

De plus, d'après (3),  $\exists \delta, C > 0$  telles que  $\forall s \in [0, \delta], g(s) > -Cs$ .

En choisissant  $C$  suffisamment grand, on a montré donc que  $\forall s \geq 0, G(s) \geq -Cs^2 + C's^{2+\beta}$ , et par parité, on aura le résultat voulu.

Prenons, donc, un sous-espace de  $H_r^1(\mathbb{R}^2)$  de dimension finie,  $X$ , et  $u \in X$ .

D'après le lemme précédent,

$$S(u) \leq \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{m}{2} \int u^2 + \int |u|^2 - \int |u|^{2+\beta} < K \|u\|_{H^1}^2 - K' \|u\|_{H^1}^{2+\beta}$$

En effet, du fait que  $X$  est un espace de dimension finie,  $\|\cdot\|_{H^1}$  et  $\left(\int |\cdot|^{2+\beta}\right)^{\frac{1}{2+\beta}}$  sont deux normes équivalentes. Donc,  $\exists c > 0$  telle que  $u \in X$  et  $S(u) \geq 0$  impliquent  $\|u\|_{H^1} \leq C$ .

#### 4. - PROPRIETES SUPPLEMENTAIRES DES SOLUTIONS OBTENUES ET AUTRES REMARQUES

4.1. - En utilisant des méthodes analogues à celles de W.A. Strauss (voir [3], page 155), on montre facilement la décroissance exponentielle à l'infini des solutions obtenues, et leur appartenance à  $C^2(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ .

On peut montrer aussi qu'en fait ces solutions appartiennent à  $C^2(\mathbb{R}^2)$  (voir [7]), et, donc, qu'elles sont des solutions classiques de (1).

4.2. - A l'aide de l'identité de Pohozaev [4], on voit que  $\forall u$  solution de (1), on doit avoir :

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u) dx = \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx > 0$$

Donc, en recherchant des solutions non triviales de (1), on devra avoir  $\int_{\mathbb{R}^2} G(u(x)) dx > 0$ , et par conséquent, la condition (6) est une condition nécessaire.

4.3. - Les hypothèses (2) - (4) seules, peuvent être considérées comme assez optimales (voir, par exemple, une discussion d'hypothèses analogues dans [7]).

La condition (5), par contre, ne semble être due qu'à la technique utilisée. De toute façon, rappelons qu'en tout cas, cette condition est exigée dans tous les théorèmes qui donnent des résultats dans le cas des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^2$ . Nous conjecturons que les résultats précédemment exposés restent vrais sans cette hypothèse, moyennant peut-être, une exigence un peu plus forte que (4) pour le comportement de  $g$  à l'infini.

## REFERENCES

- [1] P.H. RABINOWITZ. «*Variational methods for Non Linear eigenvalue problems in Eigenvalues of NL problems*». G. Prodi, ed., C.I.M.E. Ediz. Cremonese, Roma, 1974.
- [2] A. AMBROSETTI et P.H. RABINOWITZ. «*Dual Variational methods in critical points theory and applications*». J. Funct. Anal. 14, 1973, p. 349-381.
- [3] W.A. STRAUSS. Comm. in math. physics, 55, 1977, p. 149-162.
- [4] S.I. POHOZAEV. Sov. Math. Doklady, 5, 1965, p. 1408-1411.
- [5] H. BERESTYCKI et P.L. LIONS. Comptes-Rendus, 287, Série A, 1978, p. 503.
- [6] H. BERESTYCKI et P.L. LIONS. Comptes-Rendus, 288, Série A, 1979, p. 395.
- [7] H. BERESTYCKI et P.L. LIONS. «*Existence of solutions of Non Linear equations. I. The ground state. II. Existence of infinitely many bound states*». (à paraître).
- [8] R.A. ADAMS. «*Sobolev spaces*». Ac. Press. N.Y., 1975.

(Manuscrit reçu le 23 mai 1980)