

PHILIPPE REVOY

Algèbres de Lie métabéliennes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 2, n° 2 (1980), p. 93-100

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_2_93_0

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES DE LIE METABELIENNES

Philippe Revoy ⁽¹⁾

(1) Université des Sciences et Techniques du Languedoc - 34000 Montpellier - France.

Résumé : L'étude des algèbres de Lie L de dimension finie sur un corps quelconque k et vérifiant $L^3 = 0$ se ramène à celle des sous-espaces vectoriels de la puissance extérieure seconde d'un k -espace vectoriel V . Cela permet de donner une définition simple de la dualité et surtout, à l'aide des puissances divisées, de l'invariant introduit par Scheunemann en caractéristique 0. Cet invariant ainsi que des résultats antérieurs obtenus dans un article sur les formes trilinéaires alternées permettent de classifier ces algèbres de Lie quand elles ont un petit nombre de générateurs (≤ 4) et de donner de nombreux exemples. On obtient ainsi une famille infinie d'algèbres de Lie métabeliennes de dimension 10, avec 8 générateurs deux à deux non isomorphes, sur un corps infini.

Summary : The study of finite dimensional Lie algebras over any field, with $L^3 = 0$ is equivalent to the study of sub-vector-spaces from $\Lambda^2 V$, V a finite dimensional vector space. This enables us to give a simple definition of duality and, with the help of divided powers, of the Scheunemann invariant already defined in characteristic 0 within the envelopping algebra. This invariant and other results from a previous article about trilinear alternate forms give tools to classify these Lie algebras when they have a few generators and we can give numerous examples. For instance, we explicitly give an infinite family of non isomorphic 10-dimensional metabelian Lie algebras with 8 generators over any infinite field.

La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie sur un corps commutatif est loin d'être bien connue. Parmi les algèbres de Lie nilpotentes, les plus simples sont les algèbres de Lie métabéliennes

$$(i.e [x, [y,z]] = 0 \quad \forall (x,y,z)).$$

Dans [4], J. Scheuneman définit une dualité dans cette classe d'algèbres, essentiellement unique ([1]), et un « invariant » polynômial I dans l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie. Dans ce travail, après avoir redéfini cette dualité, nous montrons comment obtenir de façon plus intrinsèque cet invariant. Cela permet de classer les algèbres de Lie métabéliennes qui ont un petit nombre de générateurs et de donner des exemples, à l'aide de [3].

1 - ALGÈBRES DE LIE METABELIENNES

Soit L une algèbre de Lie métabélienne *. On désigne par W l'algèbre dérivée de L, par U le centre de L et par V un supplémentaire de W dans L. Dire que L est métabélienne signifie que U contient W. Les dimensions de L, U, V et W sont des invariants numériques de L. Nous désignons par n la dimension de V et par r celle de W : n est le *nombre minimum de générateurs* de L et n + r est la dimension de L. On appellera (n,r) le *type* de L ; la codimension s de W dans U sera appelée le *corang* de L. Soit $U' = U \cap V$: c'est un idéal commutatif de L de dimension s : désignant par V' un supplémentaire de U' dans V, on voit que $L' = V' \oplus W$ est une sous-algèbre supplémentaire de U' et que L s'identifie au produit direct $L' \times U'$ où U' est l'algèbre de Lie abélienne K^s . L'algèbre L' a même algèbre dérivée W que L et son centre coïncide avec W : son corang est 0.

La structure d'algèbre de L est entièrement déterminée par la connaissance du crochet de deux éléments de V, qui se trouve dans W. C'est donc une application linéaire $\varphi : \Lambda^2 V \rightarrow W$ surjective par définition de W et on a $L \cong V \oplus \Lambda^2 V / W'$ où $W' = \text{Ker } \varphi$. Cela montre en particulier que $0 \leq r \leq \frac{1}{2} n(n-1)$. Par transposition, on obtient $\varphi^* : W^* \rightarrow \Lambda^2 V^*$ qui est injective ; cela revient à dire qu'on s'est donné un sous-espace de dimension r de $\Lambda^2 V^*$, à savoir $\varphi^*(W^*)$.

Inversement soit Z un sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 V^*$: à Z, on associe maintenant une algèbre de Lie métabélienne engendrée par V de façon canonique, à savoir $L_Z = V \oplus \Lambda^2 V / Z^0$ où Z^0 désigne l'orthogonal dans $\Lambda^2 V$ du sous-espace Z de $\Lambda^2 V^*$ pour la dualité entre sous-espaces de $\Lambda^2 V$ et $\Lambda^2 V^*$. Le sous-espace de $\Lambda^2 V^*$ associé à L_Z par le procédé décrit plus haut est naturellement isomorphe à Z.

* de dimension finie sur un corps commutatif K quelconque.

DEFINITION. On appelle support d'un sous-espace vectoriel Z de $\Lambda^2 V^*$, le plus petit sous-espace F de V^* tel que Z est contenu dans $\Lambda^2 F$. On appelle rang de Z la dimension de son support et corang sa codimension.

Dans le cas de L_Z , on voit que le corang de Z est la dimension de l'algèbre de Lie abélienne U' , c'est-à-dire le corang de L_Z .

La dualité dans la classe des algèbres de Lie métabéliennes peut alors s'exprimer ainsi : si $L_Z \cong V \oplus \Lambda^2 V / Z^0$, l'algèbre $(L_Z)^*$ est $V^* \oplus \Lambda^2 V^* / Z = L_{Z^0}$. Dans cette correspondance le type (n,r) donne le type $(n, \frac{1}{2}n(n-1)-r)$ et on a naturellement $(L^*)^* \cong L$.

La classification des algèbres de Lie métabéliennes de type (n,r) correspond d'après l'analyse précédente à la classification des orbites dans l'action du groupe linéaire $Gl(n,K)$ sur la grassmannienne $G_r(\Lambda^2 K^n)$ des sous-espaces de dimension r de $\Lambda^2 K^n$. On pourra naturellement se restreindre aux algèbres de corang nul, c'est-à-dire au sous-ensemble de la grassmannienne formée des éléments de support K^n tout entier. Dans ce contexte, la dualité entre algèbres de Lie métabéliennes est la dualité entre $G_r(\Lambda^2 V)$ et $G_{\frac{1}{2}n(n-1)-r}(\Lambda^2 V^*)$, pour $n = \dim V$. L'étude de $G_r(\Lambda^2 V)$ a été partiellement entreprise dans [3] (§2.4 et § 3) et nous allons la reprendre ici en traduisant ensuite en termes d'algèbres de Lie.

2 - INVARIANT D'UNE ALGÈBRE DE LIE METABELIENNE

Rappelons ([2]) que si M est un module unitaire sur l'anneau commutatif et unitaire A , l'algèbre $\Lambda^p M = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^{2p} M$ possède un système de puissances divisées γ_n , ce qui permet en particulier de définir le *pfaffien* d'une forme bilinéaire alternée sur un module projectif de type fini et de rang pair. C'est cela qui va nous fournir un invariant polynômial pour les éléments de $G_r(\Lambda^2 V)$.

Supposons V de rang pair $2n$ et soit $\gamma_n : \Lambda^2 V \rightarrow \Lambda^{2n} V$ l'application polynôme canonique. Si E est un sous-espace de dimension r de $\Lambda^2 V$, on obtient par restriction à E une application polynôme de degré n de E dans l'espace de dimension 1, $\Lambda^{2n} V$. Si on choisit un générateur de $\Lambda^{2n} V$ et une base dans E , on obtient une forme polynôme à r variables, qui est multipliée par une constante quand on change de bases. On obtient de cette façon une application de $G_r(\Lambda^2 V)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Gamma^n(K^r)^*) \cup \{0\}$. Il est clair que cette application est constante sur chaque orbite du groupe $Gl(V)$ dans $G_r(\Lambda^2 V)$ et cela fournit ainsi un invariant pour la classification de ces orbites et par voie de conséquence pour les algèbres de Lie métabéliennes.

Notons aussi, que si $E \in G_r(\Lambda^2 V)$ est de corang non nul, son invariant polynômial est nul (c'est clair aussi dans la définition de Scheunemann) mais la réciproque est fautive comme on le verra plus loin.

Supposons maintenant V de rang impair $2n + 1$: γ_n est une application polynôme de degré n à valeurs dans $\Lambda^{2n} V$. Ce dernier s'identifie canoniquement du fait de la multiplication dans ΛV à $V^* \otimes \Lambda^{2n+1} V = V^* \otimes \det V$. On voit de la même façon que plus haut, qu'on obtient maintenant une application de $G_r(\Lambda^2 V)$ dans l'espace projectif $P' = \mathbb{P}(\text{Hom}(\Gamma^n(K^r), V^* \otimes \det V) \cup \{0\})$ et que tous les points d'une même orbite dans la grassmannienne ont même invariant polynômial dans P' .

Dans ce dernier cas, l'invariant polynômial n'est nécessairement nul que si le corang est au moins égal à 2. Si le corang vaut 1, l'invariant est une application polynôme dont l'ensemble des valeurs est contenu dans un sous-espace de dimension 1 de $V^* \otimes \det V$.

Le lien entre l'invariant que nous venons de définir et l'invariant I de Scheuneman est facile à établir : si V est de rang $2n$ ou $2n+1$, $I = n! \gamma_n$. Pour établir ce résultat, il suffit de se placer dans l'algèbre de Lie métabélienne libre à $2n$ ou $2n+1$ générateurs et d'y calculer l'invariant I de Scheuneman. En rang $2n$, on voit immédiatement que si X_i , $1 \leq i \leq 2n$, est une base de V , $I = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (X_i X_j - X_j X_i) \right]^n = n! \text{Pf}(Y_{ij})$ avec $Y_{ij} = [X_i, X_j]$, $i < j$. En rang $2n+1$, il suffit d'utiliser une formule due à Scheuneman pour se ramener au cas précédent.

Le résultat général se ramène à ce résultat précédent par passage au quotient, d'après le principe de prolongement des identités algébriques. Un intérêt de notre invariant est qu'il garde sa valeur en toute caractéristique alors que l'invariant I est nul si $\dim V$ dépasse deux fois la caractéristique de K .

Remarque. Si L_1 et L_2 sont deux algèbres métabéliennes dont les nombres de générateurs ne sont pas tous les deux impairs, $I(L_1 \times L_2) = I(L_1) \times I(L_2)$; dans le cas contraire, $I(L_1 \times L_2) = 0$.

3 - ALGÈRES A QUATRE GÉNÉRATEURS AU PLUS

L'invariant de 2 va nous permettre de classifier ces algèbres de Lie métabéliennes. Dans [3], on décrit complètement les sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 K^4$ de corang nul. Cela permet de donner les résultats suivants : L_1 dénote l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1 sur K .

PROPOSITION 1. *Sur un corps algébriquement clos, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie métabéliennes à au plus quatre générateurs.*

Voici la liste de celle dont le corang est 0 suivant leurs types : l'algèbre de type (n,r) est donnée sous la forme $L = \{x_1, \dots, x_n ; y_1, \dots, y_r\}$ et seuls sont donnés les crochets $[x_i, x_j]$ avec $i < j$ qui sont non nuls.

$$\begin{aligned}
 (2,1) : \quad L_3 &= \{x_1, x_2 ; y_1\} \quad [x_1, x_2] = y_1 \\
 (3,2) : \quad L_{5,1} &= \{x_1, x_2, x_3 ; y_1, y_2\} \quad [x_1, x_2] = y_1, [x_1, x_3] = y_2 \\
 (3,3) : \quad L_{6,1} &= \{x_1, x_2, x_3 ; y_1, y_2, y_3\} \quad [x_1, x_2] = y_3, [x_1, x_3] = y_2, [x_2, x_3] = y_1 \\
 (4,1) : \quad L_{5,2} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1\} \quad [x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1 \\
 (4,2) : \quad L_{6,2} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2\} \quad [x_1, x_2] = y_1, [x_3, x_4] = y_2 \\
 &\quad L_{6,3} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2\} \quad [x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1, [x_1, x_3] = y_2 \\
 (4,3) : \quad L_{7,1} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2, y_3\} \quad [x_1, x_i] = y_{i-1} \text{ si } i > 1 \\
 &\quad L_{7,2} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2, y_3\} \quad [x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1, [x_1, x_3] = y_2, \\
 &\quad \quad [x_1, x_4] = y_3 \\
 &\quad L_{7,3} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2, y_3\} \quad [x_1, x_2] = y_1, [x_3, x_4] = y_2, [x_1, x_3] = y_3 \\
 &\quad L_{7,4} = \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2, y_3\} \quad [x_1, x_2] = y_1 \quad [x_3, x_4] = y_2, \\
 &\quad \quad [x_1, x_3] = [x_2, x_4] = y_3
 \end{aligned}$$

Les autres algèbres de dimension inférieure ou égale à 7 avec au plus quatre générateurs s'obtiennent en prenant $L_1, (L_1)^2, (L_1)^3, (L_1)^4, L_3 \times L_1, L_3 \times L_1^2, L_{5,1} \times L_1, L_{6,1} \times L_1$. Pour obtenir toutes les algèbres de Lie métabéliennes, il suffit de prendre les duales des algèbres de Lie précédentes. Notons que par exemple l'algèbre $L_{7,1}$ de corang nul a son invariant nul.

Dans le cas général, l'étude faite en [3] montre que :

PROPOSITION 2. *Sur un corps quelconque, deux algèbres de Lie métabéliennes de corang 0 avec au plus 4 générateurs sont isomorphes si et seulement si elles ont même invariant polynômial.*

La proposition est triviale si $n < 4$; avec 4 générateurs elle découle de l'analyse des sous-espaces de $\Lambda^2 K^4$ faite en [3]. Ainsi en caractéristique différente de 2 seules $L_{6,2}, L_{7,3}$ et $L_{7,4}$ ont des K -formes non triviales : $L_{6,2}$ et $L_{7,3}$ sont en bijection avec K^* / K^{*2} par : $L_{6,2}(d) = \{x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2\} \quad [x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1 \quad [x_1, x_3] = y_2 \quad [x_2, x_4] = dy_2$ (ce sont les algèbres $N(p)$ de [4]) et pour $L_{7,3}$ on a des formules analogues.

$L_{7,4}(d_2, d_3) = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 ; y_1, y_2, y_3 \}$ $[x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1$, $[x_1, x_3] = y_2$, $[x_2, x_4] = d_2 y_2$, $[x_1, x_4] = y_3$, $[x_2, x_3] = d_3 y_3$. L'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres de type $L_{7,4}$ est en bijection avec l'ensemble des classes de K-algèbres de quaternions.

En caractéristique 2, la situation est plus complexe : $L_{6,2}$, $L_{6,3}$ ainsi que $L_{7,2}$, $L_{7,3}$ et $L_{7,4}$ ont des K-formes non triviales. Pour $L_{6,2}$, $L_{7,3}$ et $L_{7,4}$, ce sont des algèbres formées comme en caractéristique différente 2. Pour $L_{6,3}$ et $L_{7,2}$, cela correspond aux applications semi-linéaires de K^2 et de K^3 respectivement dans K par rapport à l'endomorphisme $a \mapsto a^2$ de K . Formellement, les algèbres en question ont même table de multiplication que $L_{6,2}(d)$ et $L_{7,4}(d_2, d_3)$ mais elles en diffèrent en fait totalement.

4 - EXEMPLES DIVERS

Pour les algèbres de Lie métabéliennes à plus de quatre générateurs, la classification n'est pas possible à l'aide de l'invariant I . Les résultats de [3] donnent par exemple, les algèbres de type (5,2) sur un corps quelconque et celles de type (6,2) sur un corps algébriquement clos, corang 0 toujours. On voit ici apparaître le fait que l'invariant polynômial n'est plus suffisant : les algèbres $L = \{ x_1, \dots, x_6 ; y_1, y_2 \}$ avec $[x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1$ et $[x_1, x_3] = [x_5, x_6] = y_2$ et $L' = \{ x_1, \dots, x_6 ; y_1, y_2 \}$ avec $[x_1, x_2] = [x_3, x_4] = y_1$ et $[x_5, x_6] = y_2$ ont même invariant polynômial $X^2 Y$ sans être isomorphes ($L' = L_3 \times L_{5,2}$).

Nous allons donner quelques exemples montrant la variété des invariants polynômiaux possibles. Considérons l'algèbre L_3 , algèbre métabélienne libre à 2 générateurs. L'algèbre $L_3^n = L_3 \times \dots \times L_3$ a pour invariant polynômial la forme polynôme $X_1 \dots X_n$ et tout quotient L de L_3^n par un idéal contenu dans son centre (égale à l'algèbre dérivée) a pour invariant polynômial un polynôme homogène de degré n à r variables, produit de n formes linéaires. De façon précise L est de type $(2n, r)$ et est de la forme $L = \{ x_1, \dots, x_{2n} ; y_1, \dots, y_r \}$ avec si $1 \leq i \leq n$ $[x_{2i-1}, x_{2i}] = \sum_{j=1}^r a_{ij} y_j$ et les n formes linéaires donnant $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ forment un système de rang r . L'invariant polynômial est alors le polynôme $\prod_{i=1}^n (\sum_{j=1}^r a_{ij} X_j)$. Ce résultat découle immédiatement de la définition de l'invariant donné par Scheuneman ou bien de celle de 2, en remarquant que le sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 V^*$, $V = \{ x_1, \dots, x_{2n} \}$ qui définit L , admet pour base les $\gamma_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_{2i-1}^* \cdot e_{2i}^*$. On a alors $\sum_{j=1}^r X_j \gamma_j = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^r a_{ij} X_j) e_{2i-1}^* \cdot e_{2i}^*$ et on obtient le résultat en notant que

$$\gamma_n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_{2i-1}^* \cdot e_{2i}^* \right) = \alpha_1 \dots \alpha_n e_1^* \dots e_{2n}^* .$$

Cela permet de construire sur tout corps infini, une infinité d'algèbres de Lie métabéliennes de type (8,2) deux à deux non isomorphes. Soit pour cela λ un scalaire et L_λ l'algèbre $\{x_1, \dots, x_8 ; y_1, y_2\}$ avec $[x_1, x_2] = y_1$, $[x_3, x_4] = y_2$, $[x_5, x_6] = y_1 - y_2$ et $[x_7, x_8] = y_1 - \lambda y_2$. L'invariant polynômial est la forme à 2 variables $xy(x-y)(x-\lambda y) = f_\lambda(x, y)$ et il est bien connu qu'il y a une infinité de formes f_λ non équivalentes par un changement de variables linéaires.

Si K est algébriquement clos, toute forme homogène f à deux variables de degré 4 est équivalente à une forme du type f_λ , sauf si f a une racine triple ou deux racines doubles. Or une algèbre de Lie métabélienne de type (8,2) n'a aucune raison d'être quotient de $(L_3)^4$. Cela montre qu'il y a alors beaucoup d'algèbres de Lie métabéliennes qui ont même invariant polynômial sans être isomorphes ; c'est vrai de façon plus générale pour les algèbres de type $(2n, 2)$, $n \geq 4$, car toute forme homogène de degré n à deux variables est décomposable en produit de formes linéaires. On a montré en fait que l'application de $G_2(\Lambda^2 K^{2n})$ dans $\mathbb{P}(\Gamma^n(K^2)^*) \cup \{0\}$ est surjective.

La méthode même qui fournit les algèbres $L_{6,2}(d)$ va aussi nous donner un grand nombre d'algèbres. Soit K un corps, L une algèbre telle que $L \otimes_K K'$ est isomorphe à $(L_3)^n$ où K' est une extension séparable de K : alors l'invariant polynômial est une forme polynôme homogène de degré n à n variables, complètement décomposable F . On peut supposer que K' est galoisienne finie. Soit alors $E \subset \Lambda^2 V^*$ le sous-espace de dimension n sur K qui définit L et $E \otimes K'$ le sous-espace de $\Lambda^2 V^* \otimes K'$: si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ est une base de E , il existe des scalaires a_1, \dots, a_n dans K' tels que $\sum_{i=1}^n a_i \gamma_i = f_1 \cdot f_2$ où f_1 et f_2 sont dans $V^* \otimes K'$. Appliquant les éléments s de $G = \text{gal}(K'/K)$ à cette relation, on obtient $\sum_{i=1}^n s(a_i) \gamma_i = s(f_1) \cdot s(f_2)$. Comme la forme polynôme F est complète, $\text{Card } G = n$ et on obtient un système de n équations à n inconnues, qui permet de calculer les γ_i en fonction des f_i et d'obtenir ainsi la description explicite de la structure de l'algèbre L sur K .

Remarque. La relation $\sum_{i=1}^n a_i \gamma_i = f_1 \cdot f_2$ suffit pour calculer les γ_i : il suffit de prendre une base de K' sur K et d'écrire les a_i et f_1 et f_2 suivant cette base. On en déduit un système linéaire de n (= le degré de K' sur K) équations à coefficients dans K qui donnent les γ_i en fonction d'une base de V^* sur K ([3] 2.2.1 et 2.2.2 en est le cas particulier où $n = 2$).

REFERENCES

- [1] G. LEGER et E. LUKS. «*On a duality for metabelian Lie algebras*». J. Algebra 21 (1972), 266-270.
- [2] Ph. REVOY. «*Formes alternées et puissances divisées*». Séminaire Dubreuil, 26^e année, exposé n^o 8, 1972/1973.
- [3] Ph. REVOY. «*Trivecteurs de rang 6*». Coll. formes quad. Montpellier (1977). Mémoire 59 de la Soc. Math. F, 141-155.
- [4] J. SCHEUNEMAN. «*Two-step nilpotent Lie algebras*». J. Algebra 7 (1967), 152-159.

(Manuscrit reçu le 21 septembre 1979)