

JEAN COQUET

**Types de répartition complète des suites**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 2 (1980), p. 137-155

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1980\\_5\\_2\\_2\\_137\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_2_137_0)

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TYPES DE REPARTITION COMPLETE DES SUITES

Jean Coquet <sup>(1)</sup>

(1) *Département de Mathématiques, Université de Valenciennes - 59326 Aulnoy les Valenciennes France.*

**Résumé :** On étudie diverses notions de répartition complète modulo 1. Des exemples sont donnés. Les résultats sont appliqués aux ensembles normaux et à la répartition des suites dans les compacts.

**Summary :** Different notions of completely uniformly distributed sequences are studied. Examples are given and applied to normal sets and to the distribution of sequences in compact spaces.

### I - INTRODUCTION

#### I.1 - RAPPELS

$u : \mathbb{N} \rightarrow X$  désigne une suite à valeurs dans un espace compact métrisable,  $X$ ,  $\mu$  une mesure de probabilité borélienne sur  $X$  et  $\mathcal{C}(X)$  l'ensemble des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ .  $u$  est dite  $\mu$ -répartie dans  $X$ , si,

$$(1) \quad \forall f \in \mathcal{C}(X), \quad \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u(n)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_X f d\mu.$$

De nombreux auteurs ont étudié des cas particuliers de cette notion faisant intervenir la famille de suites  $(T^k u)_{k \in \mathbb{N}}$  où  $T^k u$  est la suite :  $n \mapsto u(n+k)$ .

Ainsi,  $u$  est dite *complètement  $\mu$ -répartie* dans  $X$  si la suite :  $n \curvearrowright (u(n+k))_{k \in \mathbb{N}}$  est répartie dans  $X^{\mathbb{N}}$  selon la mesure-produit  $\mu^{\mathbb{N}}$ , ou, ce qui revient au même ([8], p. 27) si,  $\forall s \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \curvearrowright (u(n+1), \dots, u(n+s))$  est répartie dans  $X^s$  selon  $\mu^s$ .

Et  $u$  est dite *uniformément  $\mu$ -répartie* dans  $X$  ([5], p. 27) si,

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u(n+k)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_X f d\mu,$$

uniformément par rapport à  $k \in \mathbb{N}$ .

Ces deux types de répartition sont incompatibles si  $\mu$  n'est pas concentrée en un point ([5], p. 204).

## 1.2 - REPARTITIONS MULTIPLICATIVES

On s'intéresse ici à des types de  $\mu$ -répartition liés à la famille de suites  $(M_k u)_{k \in \mathbb{N}^*}$  où  $M_k u(n) = u(kn)$ , ou à des familles analogues.

Cette étude nous a été suggérée par le résultat suivant [4] dû à Halász et Vaughan d'après une idée de Daboussi, qui est une version multiplicative du théorème de Van der Corput :

**THEOREME 1.**  *$f$  désigne une suite de réels,  $E$  un ensemble de nombres premiers tel que  $\sum_{p \in E} \frac{1}{p} = +\infty$ . On suppose que la suite  $M_p f - M_q f$  est équirépartie modulo 1 quels que soient  $p$  et  $q$  distincts, appartenant à  $E$ . Alors  $f + \lambda$  est équirépartie modulo 1 quelle que soit la suite  $\lambda$  additive réelle.*

**Définitions.** Les notations sont celles du paragraphe 1.1.

1)  $u$  est dite *complètement  $\mu$ -répartie multiplicativement* dans  $X$  si,  $\forall s \in \mathbb{N}^*$ , la suite :  $n \curvearrowright (u(n), u(2n), \dots, u(sn))$  est répartie dans  $X^s$  selon la mesure  $\mu^s$ .

2)  $u$  est dite *uniformément  $\mu$ -répartie multiplicativement* dans  $X$  si,

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u(kn)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_X f d\mu,$$

uniformément par rapport à  $k \in \mathbb{N}^*$ .

3) Lorsque  $X$  est un groupe muni de la mesure de Haar normalisée, on remplace le terme « $\mu$ -répartie» par «équirépartie».

Une suite  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement modulo 1* si la suite  $\hat{f} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  des projections canoniques sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement.

De même, une suite  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est dite *complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement modulo l'entier  $q \geq 2$*  si la suite de ses projections canoniques sur  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  est complètement (resp. uniformément) équirépartie multiplicativement.

*Remarque.* Si la mesure  $\mu$  n'est pas concentrée en un point, il n'existe aucune suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow X$  qui soit à la fois complètement  $\mu$ -répartie multiplicativement et uniformément  $\mu$ -répartie multiplicativement dans  $X$ .

### I.3 - PLAN DE L'ARTICLE

On peut démontrer que, pour presque tout réel  $\theta > 1$ , la suite  $n \mapsto \theta^n$  est complètement équirépartie multiplicativement modulo 1. Le but du paragraphe II est de construire effectivement une suite complètement équirépartie multiplicativement modulo 1 de la forme  $n \mapsto x u(n)$  où  $u$  est une suite d'entiers naturels et  $x$  un irrationnel arbitraire.

La construction réalisée est modifiée au paragraphe III afin de donner un exemple de suite  $n \mapsto x v(n)$  où  $x$  est irrationnel et  $v$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  possédant une propriété plus forte contenant à la fois la répartition complète et la répartition complète multiplicativement.

La suite  $v$  est utilisée au paragraphe IV pour démontrer une propriété des ensembles normaux et aussi pour donner une construction universelle associant à toute suite  $\theta : \mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $\mu$ -répartie, une suite  $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \theta(\mathbb{N})$ , complètement  $\mu$ -répartie multiplicativement dans  $X$ . En fait,  $\lambda$  possède également la propriété plus générale décrite au paragraphe III.

## II - UNE SUITE COMPLETEMENT EQUIREPARTIE MULTIPLICATIVEMENT

### II.1 - ENONCE DU RESULTAT

**THEOREME 2.** *Il existe une suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  possédant les propriétés suivantes :*

- 1)  *$u$  est complètement équirépartie multiplicativement modulo  $q$ , quel que soit  $q$  entier  $\geq 2$ .*
- 2)  *$x u$  est complètement équirépartie multiplicativement modulo 1, quel que soit  $x$  irrationnel.*

## II.2 - CONSTRUCTION DE $u$

$(q_k)_k \in \mathbb{N}^*$  désigne une suite d'entiers naturels, deux à deux premiers entre eux et telle que, pour tout  $y$  irrationnel :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y q_k\|^2 = +\infty,$$

où, pour tout  $t$  réel,  $\|t\| = \text{Min} \{ |t-n| ; n \in \mathbb{Z} \}$ .

D'autre part,  $(\sigma_k)_k \in \mathbb{N}^*$  est une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant les conditions :

$$(C1) : \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k^{-1} = +\infty \text{ et,}$$

$$(C2) : \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k \cdot (q_1 \dots q_k)^{-1} = +\infty .$$

Soit  $J_k = [\sigma_k, \sigma_{k+1}[$  et soit  $\rho_k(n)$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $q_k$ . On pose  $u(n) = 0$  si  $n < \sigma_1$  et

$$u(n) = \sum_{1 \leq k \leq K} \rho_k(n) \text{ si } n \in J_k, K \in \mathbb{N}^*.$$

## II.3 - PREMIERE ETAPE DE LA DEMONSTRATION

Pour tout  $t$  réel, on pose  $e(t) = e^{2i\pi t}$ . Démontrer le théorème 2. 1) revient, d'après le critère de Weyl, à prouver que la suite :

$$n \mapsto g(n) = e \left( \frac{1}{q} \sum_{j=1}^s d_j u(jn) \right)$$

a une valeur moyenne nulle lorsque le  $s$ -uple d'entiers relatifs  $(d_1, \dots, d_s)$  n'est pas congru à  $(0, \dots, 0)$  modulo  $q$ .

Il est clair qu'on peut supposer  $d_s \not\equiv 0$  modulo  $q$ , quitte à remplacer  $s$  par  $\text{Max} \{ j \in \mathbb{N}^* ; d_j \not\equiv 0 \text{ modulo } q \}$ .

$s$  étant fixé, on choisit  $N \in J_{K+1}$  où  $K$  est assez grand pour que  $\sigma_{K+2+t} > s \sigma_{K+1+t}$  quel que soit  $t \in \mathbb{N}$ , de sorte que, si  $n \in J_{K+t}$ ,  $bn \in J_{K+t} \cup J_{K+t+1}$  pour tout  $b \in \{1, \dots, s\}$ .

On partage  $J_{K+t}$  en sous-intervalles  $I_{K+t}^b$  définis par :

$$I_{K+t}^s = \{ n \in J_{K+t} ; sn \in J_{K+t} \} \text{ et,}$$

$$I_{K+t}^b = \left\{ n \in J_{K+t}; bn \in J_{K+t} \text{ et } (b+1)n \in J_{K+t+1} \right\} \text{ si } b < s.$$

Dans l'intervalle  $I_{K+t}^s$ ,  $g$  a pour période  $q_1 \dots q_{K+t}$  et sa valeur moyenne sur une période est donnée d'après le théorème chinois, par :

$$\mu_{K+t}^s = \prod_{k=1}^{K+t} \left( \frac{1}{q_k} \sum_{0 \leq m < q_k} e\left(\frac{1}{q} \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)\right) \right).$$

Et, pour  $b < s$ , dans l'intervalle  $I_{K+t}^b$ ,  $g$  a pour période  $q_1 \dots q_{K+t+1}$  et sa valeur moyenne sur une période est :

$$\mu_{K+t}^b = \mu_{K+t}^s \cdot \frac{1}{q_{K+t+1}} \cdot \sum_{0 \leq m < q_{K+t+1}} e\left(\frac{1}{q} \sum_{b < j \leq s} d_j \rho_{K+t+1}(jm)\right)$$

Soit  $A(K+t, b)$  le cardinal de  $I_{K+t}^b$  et soit  $\beta$  l'entier défini par  $N \in I_{K+1}^\beta$ . Lorsque  $\beta = s$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n < N} g(n) &= \sum_{n < \sigma_K} g(n) + \sum_{b=1}^s \sum_{n \in I_K^b} g(n) + \sum_{n \in I_{K+1}^s, n < N} g(n). \\ &= o(\sigma_K) + \sum_{b=1}^s A(K, b) \mu_K^b + o(q_1 \dots q_{K+1}) + (N - \sigma_{K+1}) \mu_{K+1}^s \\ &= o(N) + \sum_{b=1}^s A(K, b) \mu_K^b + (N - \sigma_{K+1}) \mu_{K+1}^s \end{aligned}$$

Lorsque  $\beta < s$

$$\begin{aligned} \sum_{n < N} g(n) &= \sum_{n < \sigma_K} g(n) + \sum_{b=1}^s \sum_{n \in I_K^b} g(n) + \sum_{\beta < b \leq s} \sum_{n \in I_{K+1}^b} g(n) \\ &\quad + \sum_{n \in I_{K+1}^\beta, n < N} g(n). \\ &= o(\sigma_K) + o(q_1 \dots q_{K+1}) + o(q_1 \dots q_{K+2}) + \sum_{b=1}^s A(K, b) \mu_K^b \\ &\quad + \sum_{\beta < b \leq s} A(K+1, b) \mu_{K+1}^b + \left( N - \left\lfloor \frac{\sigma_{K+2}}{\beta+1} \right\rfloor \right) \mu_{K+1}^\beta \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} N &> \frac{\sigma_{K+2}}{\beta+1}, \quad o(\sigma_K) + o(q_1 \dots q_{K+1}) + o(q_1 \dots q_{K+2}) \\ &= o(\sigma_{K+2}) = o(N). \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \sum_{n < N} g(n) = o(N) + \sum_{b=1}^s A(K,b) \mu_K^b + \sum_{\beta < b \leq s} A(K+1,b) \mu_{K+1}^b + (N - \frac{\sigma_{K+2}}{\beta+1}) \mu_{K+1}^\beta$$

Puisque  $|\mu_{K+t}^b| \leq |\mu_{K+t}^s|$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$  et tout  $b \leq s$ , il suffit de prouver que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \mu_K^s = 0.$$

Une remarque analogue vaut pour la deuxième partie du théorème 2 en posant cette fois

$$g(n) = e(x \sum_{j=1}^s d_j u(jn)) \text{ et en supposant que } x \text{ est irrationnel et que } d_s \in \mathbb{Z}^*.$$

## II.4 - FIN DE LA PREUVE DU THEOREME 2. 1)

### II.4.1 - Cas où $s=1$

$$\text{Puisque } q \text{ ne divise pas } d_1, \left| \sum_{m < q_k} e(q^{-1} d_1 \rho_k(m)) \right| \leq \frac{2}{|e(q^{-1} d_1) - 1|} < \frac{q_k}{2}$$

pour  $k$  assez grand. Donc  $\mu_K^1 \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$ .

### II.4.2 - Cas où $s \geq 2$

$$\left| \sum_{m < q_k} e(q^{-1} \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)) \right| \leq q_k - [(s-1)^{-1} q_k]$$

$$+ \left| \sum_{m < [s^{-1} q_k]} e\left(\frac{m}{q} \sum_{j=1}^s j d_j\right) + \sum_{[s^{-1} q_k] \leq m < [(s-1)^{-1} q_k]} e\left(-\frac{d_s q_k}{q}\right) e\left(\frac{m}{q} \sum_{j=1}^s j d_j\right) \right|$$

Lorsque  $q$  ne divise pas  $\sum_{j=1}^s j d_j$ ,

$$\left| \sum_{m < q_k} e(q^{-1} \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)) \right| \leq q_k - [(s-1)^{-1} q_k] + \frac{4}{|e(\frac{1}{q}) - 1|}$$

$$(1) \quad \leq q_k \left(1 - \frac{1}{2s}\right) \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

Dans le cas contraire,

$$\left| \sum_{m < q_k} e(q^{-1} \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)) \right| \leq q_k - [(s-1)^{-1} q_k]$$

$$+ \left| [s^{-1} q_k] + e\left(-\frac{d_s q_k}{q}\right) ([s^{-1} q_k] - [(s-1)^{-1} q_k]) \right|$$

Pour  $k$  assez grand,  $(q_k, q) = 1$  donc  $q$  ne divise pas  $d_s q_k$ . Il en résulte qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de  $s$  et  $q$ , telle que :

$$(2) \quad \left| \sum_{m < q_k} e(q^{-1} \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)) \right| \leq q_k (1-C), \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

Les majorations (1) et (2) donnent :  $\lim_{K \rightarrow \infty} \mu_K^s = 0$ .

## II.5 - FIN DE LA PREUVE DU THEOREME 2. 2)

Lorsque  $\sum_{j=1}^s j d_j \neq 0$ , on a une majoration analogue à (1) de

$$\left| \sum_{m < q_k} e(x \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)) \right|, \text{ pour } x \text{ irrationnel et } k \text{ assez grand.}$$

Dans le cas contraire,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m < q_k} e(x \sum_{j=1}^s d_j \rho_k(jm)) \right| &\leq q_k - [(s-1)^{-1} q_k] \\ &+ \left| [s^{-1} q_k] + e(-x d_s q_k) ([ (s-1)^{-1} q_k ] - [s^{-1} q_k]) \right| \\ &\leq q_k (1-C' \|x d_s q_k\|^2) \text{ pour } k \text{ assez grand,} \end{aligned}$$

$C'$  étant une constante  $> 0$ , dépendant de  $s$ . Dans ce cas, la divergence de  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x d_s q_k\|^2$  permet de conclure.

## II.6 - REMARQUE

$$\text{Si } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} = +\infty, \text{ la suite } x u \text{ est également complètement équirépartie modulo 1}$$

pour tout  $x$  irrationnel.

## III - REPARTITION POLYNOMIALEMENT COMPLETE

### III.1 - DEFINITIONS

On désigne par  $\mathbf{N}^1[x]$  l'ensemble des polynômes à coefficients entiers naturels, de



degré  $\geq 1$ .

1) Une suite  $u$  à valeurs dans un compact métrisable  $X$  muni d'une mesure de probabilité  $\mu$  borélienne, est dite *complètement  $\mu$ -répartie polynomialement* si, quel que soit  $s \in \mathbb{N}^*$  et quels que soient les polynômes distincts  $P_1, \dots, P_s$  appartenant à  $\mathbb{N}^1[x]$ , la suite de terme général  $(u(P_1(n)), \dots, u(P_s(n)))$  est répartie dans  $X^s$  selon la mesure  $\mu^s$ .

2)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  est *complètement équirépartie polynomialement modulo 1* si la suite  $\hat{f}$  des projections canoniques sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est complètement équirépartie polynomialement dans le tore.

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est *complètement équirépartie polynomialement modulo  $q$* , entier  $\geq 2$ , si la suite des projections canoniques sur  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  est complètement équirépartie polynomialement dans  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .

### III.2 - UN EXEMPLE

$P$  et  $Q$  étant des éléments de  $\mathbb{N}^1[x]$ , on note  $P \prec Q$  si  $P(n) < Q(n)$  pour  $n$  assez grand.

THEOREME 3. *Il existe une suite  $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  possédant les propriétés suivantes :*

1<sup>o</sup>)  $v$  est *complètement équirépartie polynomialement modulo  $q$* , quel que soit l'entier  $q \geq 2$ .

2<sup>o</sup>)  $xv$  est *complètement équirépartie polynomialement modulo 1*, quel que soit  $x$  irrationnel.

### III.3 - CONSTRUCTION DE $v$

$(q_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux telle que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k} = +\infty$ .

$(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  désigne une suite strictement croissante d'entiers positifs vérifiant les conditions :

$$(C'1) \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{k+1} \cdot \sigma_k^{-k} = +\infty$$

$$(C 2) \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k \cdot (q_1 \dots q_k)^{-1} = +\infty.$$

On pose encore  $J_k = [\sigma_k, \sigma_{k+1}[$  et  $\rho_k(n) = n - q_k \left[ \frac{n}{q_k} \right]$ .

Enfin,  $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  désigne une application, dont l'existence est établie au paragraphe suivant, et possédant la propriété suivante :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{quel que soit } s \in \mathbf{N}^*, \text{ quels que soient les entiers relatifs } d_1, \dots, d_s \text{ et les polynômes} \\ P_1 \prec P_2 \prec \dots \prec P_s \text{ appartenant à } \mathbf{N}^1[x], \text{ il existe } u_0 \in \mathbf{N} \text{ tel que :} \\ \sum_{j=1}^s d_j h(P_j(u_0)) = d_s + \sum_{j=1}^s d_j h(P_j(u_0-1)). \end{array} \right.$$

On pose  $v(n) = 0$  si  $n < \sigma_1$  et,

$$v(n) = \sum_{1 \leq k \leq K} h(\rho_k(n)) \text{ si } n \in J_K, K \in \mathbf{N}^*.$$

### III.4 - EXISTENCE DE h

#### III.4.1 - Un lemme

LEMME. Il existe une suite  $(z_r)_{r \in \mathbf{N}^*}$  d'entiers naturels telle que :

$$(C1), \quad z_{r+1} \cdot (z_r)^{-r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$$

et

$$(Int) \quad \forall P \in \mathbf{N}^1[x], \{z_r; r \in \mathbf{N}^*\} \cap \{P(n); n \in \mathbf{N}\} \text{ est infini.}$$

*Démonstration.* On numérote les éléments de  $\mathbf{N}^1[x]$  sous la forme  $Q_\ell$ ,  $\ell \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $t(r)$  l'entier défini par :

$$\frac{(t(r)-1)t(r)}{2} < r \leq \frac{t(r)(1+t(r))}{2}$$

$$\text{et soit } \ell(r) = r - \frac{t(r)(t(r)-1)}{2}.$$

On pose  $z_r = \text{Inf} \{ Q_{\ell(r)}(m); m \in \mathbf{N} \text{ et } Q_{\ell(r)}(m) \geq r(z_{r-1})^{r-1} \}$  par exemple.

#### III.4.2 - DEFINITION DE h

On pose  $h(n) = 0$  si  $n < z_1$  et  $h(n) = r$  si  $n \in [z_r, z_{r+1}[$ . Il existe  $M$  tel que, pour tout  $n \geq M$  et tout couple d'entiers  $(i, j)$  :

$$1 \leq i < j \leq s \Rightarrow P_i(n) < P_j(n)$$

On choisit  $u_0 > M$  de manière que  $P_s(u_0)$  soit un terme  $z_t$  et que  $P_1(u_0-1) \geq z_{t-1}$  ce qui est possible d'après la condition de croissance rapide de  $(z_r)$ .

Alors

$$\sum_{j=1}^s d_j h(P_j(u_0)) = (t-1)(d_1 + \dots + d_{s-1}) + t d_s \text{ et,}$$

$$\sum_{j=1}^s d_j h(P_j(u_0-1)) = (t-1)(d_1 + \dots + d_s).$$

### III.5 - REDUCTION DU PROBLEME

On démontre par exemple la deuxième partie du théorème 3. Soit  $x$  irrationnel et soit  $(d_1, \dots, d_s) \in \mathbb{Z}^s - \{(0, \dots, 0)\}$ . On peut supposer  $d_s \neq 0$ . Il s'agit de vérifier que la suite :

$$n \curvearrowright g(n) = e(x \sum_{j=1}^s d_j v(P_j(n))) \text{ a une moyenne nulle.}$$

On suppose  $K$  assez grand pour que  $\sigma_K$  soit au moins égal à l'entier  $M$  défini au paragraphe précédent, et que, pour tout  $t \geq K$ ,

$$n \in J_t \Rightarrow \{P_1(n), \dots, P_s(n)\} \subset J_t \cup J_{t+1},$$

ce qui est possible d'après (C'1).

Pour tout  $t \geq K$  on partage  $J_t$  comme au II.3 en sous-intervalles :

$$I_t^s = \{n \in J_t ; P_s(n) \in J_t\} \text{ et, pour } b < s,$$

$$I_t^b = \{n \in J_t ; P_b(n) \in J_t \text{ et, } P_{b+1}(n) \in J_{t+1}\}.$$

Dans  $I_t^s$ ,  $g$  a pour période  $q_1 \dots q_t$  ; soit  $\mu_t^s$  sa valeur moyenne sur une période. Et dans  $I_t^b$ ,  $b < s$ ,  $g$  a pour période  $q_1 \dots q_{t+1}$  avec une moyenne  $\mu_t^b$  sur une période.

Comme dans II.3, on se ramène à prouver que :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t^s = 0$ .

### III.6 - FIN DE LA DEMONSTRATION

On a cette fois :

$$(3) \quad \mu_t^s = \bigcap_{1 \leq k \leq t} \left( \frac{1}{q_k} \sum_{m < q_k} e(x \sum_{j=1}^s d_j h(\rho_k(P_j(m)))) \right)$$

Soit  $u_0 > M$ , l'entier défini au paragraphe III.3 et soit  $k$  assez grand pour que :

$$\begin{aligned}
 P_1(u_0) &< \dots < P_s(u_0) < q_k. \\
 \left| \sum_{m < q_k} e(x \sum_{j=1}^s d_j h(\rho_k(P_j(m)))) \right| &\leq q_k - (u_0 + 1) + \left| \sum_{m \leq u_0} e(x \sum_{j=1}^s d_j h(P_j(m))) \right| \\
 &\leq q_k - 2 + \left| e(x \sum_{j=1}^s d_j h(P_j(u_0 - 1))) + e(x \sum_{j=1}^s d_j h(P_j(u_0))) \right| \\
 &= q_k - 2 + |1 + e(x d_s)| \text{ d'après la propriété } (\mathcal{P}).
 \end{aligned}$$

Donc, il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour  $k$  assez grand :

$$(4) \quad \frac{1}{q_k} \left| \sum_{m < q_k} e(x \sum_{j=1}^s d_j h(\rho_k(P_j(m)))) \right| \leq 1 - \frac{C}{q_k}$$

D'après la divergence de  $\sum \frac{1}{q_k}$ , (3) et (4) donnent  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t^s = 0$ .

La première partie du théorème 3 se démontre de la même manière en remplaçant  $x$  par  $\frac{1}{q}$  et en supposant  $d_s \not\equiv 0 \pmod{q}$ .

## IV - APPLICATIONS DU THEOREME 3

### IV.1 - ENSEMBLES NORMAUX

#### IV.1.1 - Enoncé du résultat

Un sous-ensemble  $B$  de  $\mathbf{R}^*$  est dit *normal* [7] s'il existe une suite  $\lambda : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que, pour tout  $x$  réel :

$$x \in B \Leftrightarrow x\lambda \text{ équirépartie mod. } 1.$$

Ainsi,  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  est normal. Le théorème 3 permet de préciser que  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  est complètement normal polynomialement dans le sens suivant :

*Définition.*  $B \subset \mathbf{R}^*$  est dit *complètement normal polynomialement* s'il existe une suite  $\theta : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que, pour tout  $x$  réel,

$x \in B \Rightarrow x \theta$  est complètement équirépartie polynomialement modulo 1.  
 $x \notin B \Rightarrow x \theta$  n'est pas équirépartie modulo 1.

On se propose de prouver le théorème suivant qui généralise le théorème de [2] :

**THEOREME 4.** *Tout sous-ensemble normal de  $\mathbb{R}^*$  est complètement normal polynomialement.*

**IV.1.2 - Une construction universelle**

$\mathcal{B}_q$  désigne l'ensemble formé par les polynômes non constants de degré  $\leq q$  et dont les coefficients sont des entiers naturels  $\leq q$ .

$\mathcal{B}_q$  étant fini et  $v$  étant complètement équirépartie polynomialement modulo  $q(q+1)$ , il existe une suite d'entiers positifs  $M_q$  satisfaisant aux conditions suivantes :

(C'1) 
$$\lim_{q \rightarrow \infty} M_{q+1} \cdot M_q^{-q} = +\infty \quad \text{et,}$$

(Cong.) 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } N \geq M_q, \text{ quels que soient les polynômes } P_1 \prec P_2 \dots \prec P_q \text{ appartenant à} \\ \mathcal{B}_q, \text{ et quel que soit le } q\text{-uple } (m_1, \dots, m_q) \text{ d'éléments de } \{0, 1, \dots, q(q+1) - 1\}, \\ \\ \left| \frac{1}{N} \text{Card} \left\{ n < N ; \forall j \leq q, v(P_j(n)) \equiv m_j \pmod{q(q+1)} \right\} - \frac{1}{q^q(q+1)^q} \right| \\ \\ \leq \frac{1}{2^q q^q (q+1)^q} . \end{array} \right.$$

Soit  $\mathcal{I}_q = [M_q, M_{q+1}[$ . On pose  $v^*(n) = 0$  si  $n < M_1$  et  $v^*(n) = v(n) - q \left\lfloor \frac{v(n)}{q} \right\rfloor$  si  $n \in \mathcal{I}_q$ .

Soit d'autre part  $B$  un ensemble normal et soit  $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une suite telle que :

$$x \in B \Leftrightarrow x\lambda \text{ équirépartie modulo 1.}$$

On va montrer que la suite  $\theta = \lambda \circ v^*$  possède la propriété :

$$\begin{cases} x \in B \Rightarrow x \theta \text{ complètement équirépartie polynomialement modulo 1.} \\ x \notin B \Rightarrow x \theta \text{ non équirépartie modulo 1.} \end{cases}$$

**IV.1.3 - Preuve du théorème 4 : cas où  $x \in B$**

Soit  $(d_1, \dots, d_s) \in \mathbb{Z}^s$  tel que  $d_s \neq 0$  et soient  $P_1 \prec P_2 \prec \dots \prec P_s$  des éléments de  $\mathbb{N}^1[x]$ . Il s'agit de vérifier que :

$$n \curvearrowright h(n) = e(x \sum_{j=1}^s d_j \lambda(v^*(P_j(n)))) \text{ a une valeur moyenne nulle.}$$

Dans la suite  $T$  est un entier assez grand vérifiant :

(5)  $T \geq \text{Max} \{ s, \text{deg } P_1, \dots, \text{deg } P_s, H(P_1), \dots, H(P_s) \}$ , où  $H(P_j)$  est la hauteur de  $P_j$ , c'est à dire son plus grand coefficient, et

(6)  $n \geq M_T \Rightarrow P_1(n) < \dots < P_s(n)$ , et

(7)  $\forall t \geq T, n \in \mathcal{J}_t \Rightarrow P_s(n) \in \mathcal{J}_t \cup \mathcal{J}_{t+1}$ ,

ce qui est possible puisque  $(M_q)$  satisfait à (C1).

Pour  $t \geq T$ , on partage  $\mathcal{J}_t$  de la même manière que  $J_t$ . Ainsi,

$$\mathcal{J}_t^s = \{ n \in \mathcal{J}_t; P_s(n) \in \mathcal{J}_t \} \text{ et si } b < s,$$

$$\mathcal{J}_t^b = \{ n \in \mathcal{J}_t; P_b(n) \in \mathcal{J}_t \text{ et } P_{b+1}(n) \in \mathcal{J}_{t+1} \}$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Puisque  $x\lambda$  est équirépartie modulo 1, il existe  $K_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$(8) \quad \forall K \geq K_0, \left| \frac{1}{K} \sum_{m < K} e(x d_s \lambda(m)) \right| \leq \epsilon.$$

Soit maintenant  $N \in \mathcal{J}_{K+1}$  avec  $K \geq \text{Max}(T, K_0)$ . Soit  $\beta \leq s$  défini par  $N \in \mathcal{J}_{K+1}^\beta$ .

$$(9) \quad \sum_{n < N} h(n) = O(M_K) + \sum_{b=1}^s \sum_{n \in \mathcal{J}_K^b} h(n) + \sum_{\beta < b \leq s} \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^b} h(n) + \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^\beta, n < N} h(n)$$

D'autre part, si  $(m_1, \dots, m_s) \in \{0, \dots, K-1\}^s$ , on pose :

$$\begin{aligned} A(K, s, (m_1, \dots, m_s)) &= \text{Card} \{ n \in \mathcal{J}_K^s, \forall j \leq s, v^*(P_j(n)) = m_j \} \\ &= \text{Card} \{ n \in \mathcal{J}_K^s, \forall j \leq s, v(P_j(n)) \equiv m_j \pmod{K} \}. \end{aligned}$$

On pose aussi  $M_{k,b} = \text{Max } \mathcal{J}_K^b$ , pour tout  $b \leq s$ .

D'après la condition (Cong.) :

$$\left| A(K, s, (m_1, \dots, m_s)) - \frac{\text{Card } \mathcal{J}_K^s}{K^s} \right| \leq \frac{2 M_{K,s}}{2^k K^s}$$

Ceci entraîne, en faisant varier  $(m_1, \dots, m_s)$  dans  $\{0, \dots, K-1\}^s$  :

$$\left| \sum_{n \in \mathcal{J}_K^s} h(n) - \text{Card } \mathcal{J}_K^s \cdot \prod_{j=1}^s \left( \frac{1}{K} \sum_{m_j < K} e(xd_j \lambda(m_j)) \right) \right| \leq \frac{M_{K,s}}{2^{K-1}}$$

puis, d'après (8),

$$(10) \quad \left| \sum_{n \in \mathcal{J}_K^s} h(n) \right| \leq \epsilon \cdot \text{Card } \mathcal{J}_K + \frac{M_{K,s}}{2^{K-1}}$$

De même, pour  $b < s$  et  $(m_1, \dots, m_s) \in \{0, \dots, K-1\}^b \times \{0, \dots, K\}^{s-b}$ , on pose

$$\begin{aligned} A(K, b, (m_1, \dots, m_s)) &= \text{Card} \{ n \in \mathcal{J}_K^b ; \forall j \leq s, v^*(P_j(n)) = m_j \} \\ &= \text{Card} \{ n \in \mathcal{J}_K^b ; \forall j \leq b, v(P_j(n)) \equiv m_j \pmod{K}, \text{ et } \forall j > b, v(P_j(n)) \equiv m_j \pmod{K+1} \} \end{aligned}$$

On obtient, comme précédemment

$$(11) \quad \left| \sum_{n \in \mathcal{J}_K^b} h(n) \right| \leq \epsilon \cdot \text{Card } \mathcal{J}_K^b + \frac{M_{K,b}}{2^{K-1}}$$

(10) et (11) donnent :

$$(12) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{b=1}^s \sum_{n \in \mathcal{J}_K^b} h(n) \right| &\leq \epsilon \cdot \text{Card } \mathcal{J}_K + \frac{1}{2^{K-1}} (M_{K,1} + \dots + M_{K,s}) \\ &< M_{K+1} \left( \epsilon + \frac{s}{2^{K-1}} \right) \end{aligned}$$

De même, à l'aide de la condition (Cong.) :

$$(13) \quad \left| \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^\beta, n < N} h(n) \right| \leq (N + M_{K+1, \beta+1}) \frac{1}{2^K} + \epsilon(N - M_{K+1, \beta+1})$$

puisque  $\text{Card} \{ n \in \mathcal{J}_{K+1}^\beta, n < N \} = N - M_{K+1, \beta+1}$ .

On a également :

$$(14) \quad \left| \sum_{\beta < b \leq s} \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^b} h(n) \right| \leq \epsilon(M_{K+1, \beta+1} - M_{K+1}) + \frac{1}{2^K} (M_{K+1, \beta+1} + \dots + M_{K+1, s})$$

(13) et (14) entraînent :

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\beta < b \leq s} \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^b} h(n) + \sum_{n \in \mathcal{J}_{K+1}^\beta, n < N} h(n) \right| \\
 & \leq \epsilon(N - M_{K+1}) + \frac{1}{2^K} (N + s M_{K+1, \beta+1}) \\
 (15) \quad & \leq \epsilon(N - M_{K+1}) + \frac{(s+1)N}{2^K}
 \end{aligned}$$

Finalement, (9), (12) et (15) donnent :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n < N} h(n) \right| & \leq M_K + \epsilon N + N \frac{(3s+1)}{2^K} \\
 & \leq 2 \epsilon N,
 \end{aligned}$$

pour  $K$  (donc  $N$ ) assez grand.

#### IV.1.4 - Cas où $x \notin B$

Pour un calcul plus simple que le précédent, on voit que :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} e(xd\lambda(v^*(n))) \right| \geq \overline{\lim}_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \left| \sum_{m < K} e(xd\lambda(m)) \right|$$

et le second membre de cette inégalité est  $> 0$  pour au moins une valeur de  $d \in \mathbf{N}^*$ . Donc  $x(\lambda \circ v^*)$  n'est pas équirépartie.

## IV.2 - REPARTITION DANS UN COMPACT

On se contente d'énoncer le résultat dont la démonstration est calquée sur celle du théorème 4.

**THEOREME 5.** Soit  $\lambda : \mathbf{N} \rightarrow X$ , une suite répartie dans le compact métrisable  $X$  selon la mesure de probabilité  $\mu$ . La suite  $\lambda \circ v^*$  est complètement  $\mu$ -répartie polynomialement dans  $X$ .

(Bien entendu,  $v^*$  désigne la suite construite au paragraphe IV.1.2).



### IV.3 - SUITES A CROISSANCE LENTE ET SUITES NON DECROISSANTES

#### IV.3.1 - Suites à croissance lente

Le résultat qui suit généralise le théorème 1 de [3]:

**THEOREME 6.** Soit  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$  telle que  $\phi(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Il existe une suite  $v$  d'entiers naturels telle que :

- 1)  $v(n) = O(\phi(n))$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,
- 2)  $v$  soit complètement équirépartie polynomialement modulo  $q$ , pour tout  $q$  entier  $\geq 2$ .
- 3)  $xv$  soit complètement équirépartie polynomialement modulo 1 pour tout  $x$  irrationnel.

*Démonstration.* Soit  $v$  la suite construite au III.3. Si

$$n \in J_K, v(n) = \sum_{1 \leq k \leq K} h(\rho_k(n)) \leq \sum_{1 \leq k \leq K} \rho_k(n) < (q_1 + \dots + q_K) < Kq_K \text{ (si } (q_k) \text{ est croissante).}$$

On peut se ramener au cas où  $\phi$  est non décroissante. Il suffit alors que  $(\sigma_K)$  vérifie la condition :

$$Kq_K = O(\phi(\sigma_K)) \text{ lorsque } K \rightarrow +\infty.$$

#### IV.3.2 - Suites non décroissantes

A l'aide du théorème de Van der Corput, on démontre en posant  $V(n) = \sum_{m=0}^n v(m)$  où  $v$  est la suite précédente, le résultat suivant qui améliore le théorème 3 de [3].

**THEOREME 7.** Soit  $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$  telle que  $\phi(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Il existe une suite  $V$  non décroissante d'entiers naturels vérifiant  $V(n) = O(n\phi(n))$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et telle que  $xV$  soit complètement équirépartie polynomialement modulo 1 pour tout  $x$  irrationnel.

Notons qu'on ne peut remplacer  $O(n\phi(n))$  par  $O(n)$  d'après le théorème 3 de [3].

## V - REMARQUES ET PROBLEMES

### V.1 - UN RESULTAT METRIQUE

P. LIARDET a démontré [6] que presque toute suite à valeurs dans le tore  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  était complètement équirépartie polynomialement.

### V.2 - SUITES POLYNOMIALES

Si le polynôme  $P-P(0)$  possède au moins un coefficient irrationnel, la suite  $n \mapsto P(n)$  est uniformément équirépartie modulo 1. Cependant, une telle suite n'est ni uniformément équirépartie multiplicativement modulo 1 ni complètement équirépartie multiplicativement modulo 1.

### V.3 - LES SUITES $(n^c)$

Il n'existe aucun réel  $c > 0$  tel que la suite  $n \mapsto n^c$  soit complètement équirépartie modulo 1. Par contre, d'après le critère de Weyl, cette suite est complètement équirépartie multiplicativement modulo 1 lorsque  $c$  n'appartient pas à l'ensemble dénombrable :

$$D = \left\{ c \in \mathbf{R} ; (1, 2^c, \dots, j^c, \dots) \text{ soit une famille liée sur } \mathbf{Q} \right\}.$$

Que peut-on dire de  $D$  ?

### V.4 - UN PROBLEME D'ANALYSE HARMONIQUE

Le théorème de Halász et Vaughan cité au 1.2 suggère de considérer la famille des suites  $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  de module  $\leq 1$  telles que, pour tout couple  $(s, t) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$  :

$$\delta_g(s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(sn) g(\bar{t}n) \text{ existe.}$$

$\delta_g$  est la corrélation multiplicative de  $g$ . Est-il vrai qu'il existe une mesure  $\nu_g$  bornée, positive, borélienne, sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , nécessairement symétrique par rapport à la diagonale de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , telle que :

$$\forall (s, t) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, \delta_g(s, t) = \iint_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}} s^{ix} t^{-iy} d\nu_g(x, y) ?$$

Si c'est le cas, peut-on traduire en termes de décomposition de  $\nu_g$  (diffuse ?) le fait que  $|\delta_g|$  ait une moyenne nulle et obtenir ensuite une version harmonique du théorème de Halasz et Vaughan, analogue au théorème de Bertrandias [1] qui dit que si la mesure spectrale (ordinaire) de  $g$  est diffuse,  $g$  est pseudo-aléatoire et a donc une valeur moyenne nulle ?

## REFERENCES

- [1] J.P. BERTRANDIAS. «Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre  $p$ ». Bull. Soc. Math. France, mémoire 5, 1-66 (1966).
- [2] J. COQUET. «Ensembles normaux et équirépartition complète». Acta Arithmetica 39, à paraître.
- [3] J. COQUET. «Sur l'équirépartition des suites à croissance lente et des suites non décroissantes». Bull. Soc. Math. France, n<sup>o</sup> 108-2 (1980), 251-258.
- [4] G. HALASZ, R.C. VAUGHAN. Communication privée.
- [5] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER. «Uniform distribution of sequences». Wiley-Interscience.
- [6] P. LIARDET. Communication privée.
- [7] G. RAUZY. «Caractérisation des ensembles normaux». Bull. Soc. Math. France 98, 401-414 (1970).
- [8] G. RAUZY. «Propriétés statistiques de suites arithmétiques». P.U.F., Collection Sup., le Mathématicien 15 (1976).

(Manuscrit reçu le 29 avril 1980)