ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ERIC REYSSAT

Approximation de nombres liés à la fonction sigma de Weierstrass

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 1 (1980), p. 79-91
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_79_0>

© Université Paul Sabatier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 79 à 91

APPROXIMATION DE NOMBRES LIES A LA FONCTION SIGMA DE WEIERSTRASS

Eric Reyssat (1)

(1) Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, Tour 45-46, 4 Place Jussieu - 75230 Paris Cédex 05.

Résumé : On prouve ici des mesures de transcendance de nombres liés à une fonction sigma de Weierstrass d'invariants algébriques ; on montre en particulier que les nombres considérés ont un type de transcendance fini.

Summary : We give here transcendence measures for some numbers connected with a Weierstrass sigma-function having algebraic invariants ; in particular, we show that these numbers have a finite transcendence type.

I - INTRODUCTION

On considère un réseau Λ de $\mathbb{C}$, et les fonctions σ, ζ, $\wp$ de Weierstrass associés à ce réseau. On suppose que les invariants g_2, g_3 de Λ sont algébriques. Nous avons entrepris dans un papier précédent [R] une étude systématique des mesures de transcendance de nombres liés aux fonctions ζ et $\wp$. Nous prolongeons ici ce travail en étudiant des nombres liés à la fonction σ, dont M. Waldschmidt a montré la transcendance ([A et W]). La démonstration utilise une fonction $f_{\beta,u}$, définie plus bas, vérifiant un théorème d'addition algébrique ; nous donnons dans ce papier une forme explicite de ce théorème d'addition.

Précisons quelques notations avant d'énoncer les résultats. On note β un nombre algébrique, et u un point algébrique de $\wp$ sans torsion, c'est-à-dire un nombre complexe tel que pour tout entier n non nul, $\wp(n\,u)$ soit défini et algébrique. On définit alors la fonction $f_{\beta,u}$ par la formule

$$f_{\beta,u}(z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\sigma(u)}\, e^{(\zeta(u)+\beta)z}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion, on notera simplement f la fonction $f_{\beta,u}$.

Soient θ un nombre complexe, et $g : \mathbb{N} \times [1,\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ une fonction. On dit que g est une mesure de transcendance de θ si pour tout nombre algébrique α de degré $\leqslant$ d et de hauteur $\leqslant$ H, avec $H > e^e$, on a

$$|\theta - \alpha| > g(d,H).$$

La remarque suivante facile à vérifier sera utile pour démontrer les corollaires énoncés plus bas.

Remarque. Soient θ_1 et θ_2 deux nombres complexes liés par une relation du type $P(\theta_1,\theta_2) = 0$ où $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X,Y]$ et $\deg_X P \neq 0$. On suppose que g est une mesure de transcendance de θ_1, vérifiant les propriétés suivantes (ce qui sera toujours le cas en pratique) :

a) g est fonction décroissante en chaque variable.

b) $g(d,H) < \exp\{-d(d + \log H)\}$ pour $d,H \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour tout entier $a \geqslant 1$, il existe un entier $a' \geqslant 1$ tel que

$$g(d,H)^{a'} \leqslant g(ad, e^{ad} H^a) \leqslant g(d,H)^a.$$

Il existe alors une constante C ne dépendant que de θ_1 et θ_2 telle que la fonction g^C soit une mesure de transcendance de θ_2.

On peut alors énoncer.

THEOREME. *Soit* v *un point algébrique de* $\wp$ *tel que* v *et* v–u *ne soient pas pôles de* $\wp$. *Il existe une constante effectivement calculable* C_1 *ne dépendant que de* $\wp$, β, u, v *telle que* f(v) *admette pour mesure de transcendance*

$$g(C_1,d,H) = \exp\{-C_1\, d^4 ((\log H)(\log\log H)^4 + d(\log d)^5)\}$$

si v *est un point de torsion, et*

$$g'(C_1,d,H) = \exp\left\{ -C_1(d / \log(d+1))^4 \,((\log H)\,(\log\log H)^3 + d^2(\log d)^3)\right\}$$

si v *est sans torsion.*

La fonction f admet des quasi-périodes multiplicatives :

$$f_{\beta,u}(z+\omega) = f_{\beta,u}(z) \,.\, \exp\left\{\omega\,\zeta\,(u) - \eta\, u + \beta\,\omega\right\} \quad \text{pour } \omega \in \Lambda$$

où η est la quasi-période de ζ associée à ω. En remarquant que si ω est une période primitive de $\wp$, alors

$$\text{(1)} \qquad \exp\left\{\omega\zeta\,(u) - \eta\, u + \beta\,\omega\right\} = \kappa \,.\, (f_{\beta,u}(\omega/2))^2$$

où κ est un nombre algébrique non nul ne dépendant que de u et ω, on déduit du théorème le corollaire suivant

COROLLAIRE 1. *Soit ω une période non nulle de $\wp$. Il existe une constante effectivement calculable* C_2 *ne dépendant que de $\wp$,* β, u, v *telle que la fonction* $g(C_2,d,H)$ *soit une mesure de transcendance de la quasi-période* $\exp\left\{\omega\,\zeta\,(u) - \eta\, u + \beta\,\omega\right\}$ *de* f.

Remarque. On peut améliorer les mesures $g(C_1,d,H)$ et $g(C_2,d,H)$ moyennant des hypothèses sur l'approximation de certaines quasi-périodes de f par les racines de l'unités, vérifiées en particulier si l'on sait que les logarithmes de ces quasi-périodes (i.e les nombres $\omega\zeta\,(u) - \eta\, u + \beta\,\omega$) forment un réseau dans $\mathbb{C}$.

Lorsque $\beta = 0$, le théorème permet enfin de montrer les deux corollaires suivants

COROLLAIRE 2. *Si* u *est un point algébrique de $\wp$ sans torsion, il existe une constante effectivement calculable* C_3 *ne dépendant que de $\wp$ et* u, *telle que* $g'(C_3,d,H)$ *soit une mesure de transcendance de* $\sigma\,(u)e^{-u\,\zeta\,(u)/2}$.

Cela résulte en effet du théorème si l'on remarque que $f_{0,-u}(2u)\,.\,\sigma\,(u)^{-4}\,.\,e^{2u\,\zeta\,(u)}$ est un nombre algébrique ne dépendant que de u et $\wp$.

COROLLAIRE 3. *On suppose que Λ admet une multiplication complexe par* i (resp. $\rho = e^{2i\pi/3}$), *et que* u *est un point algébrique de $\wp$ sans torsion. Il existe une constante effectivement calculable* C_4 *ne dépendant que de $\wp$ et* u, *telle que* $g'(C_4,d,H)$ *soit une mesure de transcendance de*

$e^{iu\zeta(u)}$ (resp. $e^{i\sqrt{3}u\zeta(u)}$).

En effet, les formules de multiplication complexe de σ montrent que $f_{o,-u}(iu)e^{iu\zeta(u)}$ (resp. $f_{iu}(i\sqrt{3}u)\, e^{i\sqrt{3}u\zeta(u)}$) est un nombre algébrique ne dépendant que de u et $\wp$.

La démonstration du théorème fera l'objet du paragraphe III. On étudie auparavant la fonction $f = f_{\beta,u}$ introduite plus haut.

II - QUELQUES PROPRIETES DE LA FONCTION f

Les fonctions σ et σf sont entières d'ordre 2. Ainsi la fonction f est une fonction méromorphe d'ordre 2. Elle vérifie l'équation différentielle

$$f'(z) = f(z) \left\{ \beta + \frac{1}{2} \; \frac{\wp'(z) + \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)} \right\}$$

qui permet de vérifier le lemme suivant :

LEMME 4. *Soient* k, L *deux entiers* $\geqslant 0$. *On note*

$$G(z) = 2^k(\wp(z) - \wp(u))^k f^L(z).$$

Alors

$$G^{(k)}(z) = f^L(z)\, P(\wp(z), \wp'(z), \wp''(z), \wp(u), \wp'(u), \beta)$$

où P *est un polynôme à coefficients entiers rationnels, de degré* $\leqslant 2k$ *et de hauteur* $\leqslant (L\,k)^{c_o k}$, *où* c_o *est une constante absolue.*

Démonstration. Grâce à l'équation différentielle de f, il suffit d'écrire, pour $j \leqslant k$

$$G^{(j)}(z) = f^L(z)\, 2^{k-j}\, (\wp(z) - \wp(u))^{k-j}\, T_j(\wp(z), \wp'(z), \wp''(z), \wp(u), \wp'(u), \beta)$$

et de majorer par récurrence le degré d_j et la longueur ℓ_j de T_j en utilisant les relations

$$d_{j+1} \leqslant d_j + 2 \;\; ; \;\; \ell_{j+1} \leqslant (4L + 2(k-j) + 14\, d_j)\, \ell_j.$$

Le lemme suivant explicite le théorème d'addition algébrique de la fonction f.

LEMME 5. *Si on note* $z_o = -u$, *alors*

$$\frac{f(z_1+z_2)}{f(z_1)\,f(z_2)} = \frac{1}{2}\sum_{i=o}^{2} \frac{\wp'(z_i)}{(\wp(z_i)-\wp(z_{i-1}))\,(\wp(z_i)-\wp(z_{i+1}))}$$

où l'on prend les indices modulo 3, *et où l'égalité est une égalité entre fonctions méromorphes. En particulier*

$$f(2z) = f^2(z)\,\frac{1}{(\wp(z)-\wp(u))}\left\{\frac{\wp'(z)+\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)} - \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right\}$$

Démonstration. La deuxième formule se déduit de la première par passage à la limite. Pour démontrer la première, on remarque que le membre de gauche est une fonction elliptique de u, de pôles simples z_1 et z_2, le résidu en z_1 étant

$$\frac{\sigma^2(z_1)\,\sigma^2(z_2)}{\sigma(z_1+z_2)\,\sigma(z_1-z_2)} = \frac{1}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\,.$$

Ainsi, la fonction

$$\frac{f(z_1+z_2)}{f(z_1)\,f(z_2)} - \frac{\zeta(u-z_1)-\zeta(u-z_2)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}$$

est elliptique en u et sans pôle, donc indépendante de u. Sa valeur en u = 0 montre que

$$\frac{f(z_1+z_2)}{f(z_1)\,f(z_2)} = \frac{1}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\left\{(\zeta(u-z_1)+\zeta(z_1))-(\zeta(u-z_2)+\zeta(z_2))\right\}$$

et le théorème d'addition de la fonction ζ donne le résultat.

COROLLAIRE 6. *Pour tout entier* $m > 0$, *il existe des polynômes* A_m, B_m, C_m, D_m, *vérifiant*

1°)

$$\wp(mz) = A_m(\wp(z))\,/\,B_m(\wp(z))$$

$$f(mz) = f^m(z)\,\frac{C_m}{D_m}\,(\wp(z),\ \wp'(z),\ \wp(u),\ \wp'(u))$$

2°) Ces polynômes sont de degré $\leqslant c_1\,m^2$ *et leurs coefficients sont des éléments de* $\mathbf{Z}[g_2/4, g_3]$ *de taille* $\leqslant c_1\,m^2$, *où* c_1 *ne dépend que de* $\wp$.

3°) Soit v *un point algébrique de* $\wp$ *tel que* mv, v+u *et* v−u *ne soient pas pôles de* $\wp$. *Alors*

$$D_m(\wp(v),\ \wp'(v),\ \wp(u),\ \wp'(u)) \neq 0$$

Démonstration. Les assertions concernant A_m et B_m résultent du lemme 4.8 de [R]. Pour C_m et D_m, on commence par construire des polynômes $C_m^{(1)}$ et $D_m^{(1)}$ vérifiant seulement les conditions 1°) et 2°), ce qui se fait par récurrence : l'existence de $C_m^{(1)}$ et $D_m^{(1)}$ est assurée pour m = 1 et m = 2 grâce au lemme 5. De plus, ce lemme permet d'exprimer f(2mz) et f((2m+1)z) en fonction de f(mz) et f((m+1)z), ce qui assure l'existence de $C_m^{(1)}$ et $D_m^{(1)}$ vérifiant 1°). En outre, si on note t_m un majorant de la taille (maximum du degré et des tailles des coefficients) de $C_m^{(1)}$ et $D_m^{(1)}$, alors ces expressions de f(2mz) et f((2m+1)z) ainsi que les formules de multiplication de $\wp$ permettent d'établir les formules de récurrence suivantes

$$t_{2m} \leqslant 2t_m + c_2\, m^2 \;;\; t_{2m+1} \leqslant t_m + t_{m+1} + c_2\, m^2$$

d'où l'on déduit la condition 2°) pour $C_m^{(1)}$ et $D_m^{(1)}$.

Par ailleurs, si $\psi_m(X,Y)$ est le polynôme défini au lemme 4.8 de [R], vérifiant

$$\psi_m(\wp(z), \wp'(z)) = (-1)^{m-1}\, \sigma(mz)\, \sigma(z)^{-m^2},$$

on voit facilement que la fonction

$$(\wp(z) - \wp(u))^m\, \psi_m(\wp(z), \wp'(z))\, f(mz)\, f(z)^{-m}$$

est une fonction elliptique en z, ayant 0 pour unique pôle. C'est donc un polynôme en $\wp(z)$ et $\wp'(z)$ (et dont les coefficients dépendent de u). Comme fonction de u, elle admet également 0 pour seul pôle ; c'est donc un polynôme C_m en $\wp(z)$, $\wp'(z)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$, à coefficients constants. En posant

$$D_m(X,Y,Z,T) = (X-Z)^m\, \psi_m(X,Y)$$

on en déduit les assertions 1°) et 3°). La condition 2°) est vérifiée pour D_m d'après les estimations classiques (cf. lemme 4.8 de [R]). Elle est encore vérifiée pour C_m grâce à la relation $C_m D_m^{(1)} = C_m^{(1)} D_m$, et au lemme de Gel'fond (cf. [G] chap. III, lemme II p. 135).

Enfin, la fonction f est algébriquement indépendante de $\wp$, le point u étant sans torsion (cf. [W]). On en déduit le résultat suivant, dont l'idée de la démonstration est due à D. Brownawell et D. Masser.

LEMME 7. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ *un polynôme non nul de degré* $\leqslant L_1$ *en* X, *et de degré* $\leqslant L_2$ *en* Y, *avec* $L_1, L_2 \geqslant 1$. *Soient* $a_1,\ldots,a_n$ *des nombres complexes non nuls,* $b_1,\ldots,b_n$ *des nombres complexes non pôles de* $\wp$, *tels que* $b_i \neq \pm b_j \pmod{\Lambda}$ *si* $i \neq j$. *On suppose que pour* $i = 1,\ldots,n$, *la fonction* $F_i(z) = P(a_i\, f(z), \wp(z))$ *a un zéro d'ordre* k_i *au point* b_i. *Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 14\, L_1\, L_2 + 5n\, L_1$$

et en particulier, si $k_i \geqslant 20\, L_1$ *pour tout* i, *alors*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 20\, L_1\, L_2$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 4.4 de [R]. Lorsque $\deg_Y P = 0$, on voit facilement que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 4n\, L_1. \tag{2}$$

De même, si $\deg_X P = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 2\, L_2. \tag{3}$$

On suppose maintenant que P est irréductible et que $\deg_X P.\ \deg_Y P \neq 0$. On peut évidemment supposer que $k_i \geqslant 1$ pour tout i. Par dérivation, l'hypothèse montre que

$$\operatorname{ord}_{b_i} \left\{ a_i\, f'(z)\, P'_X(a_i\, f(z), \wp(z)) + \wp'(z)\, P'_Y(a_i\, f(z), \wp(z)) \right\} \geqslant k_i - 1.$$

En tenant compte des équations différentielles vérifiées par f et $\wp$, on en déduit que si on définit le polynôme

$$Q(X,Y) = (4Y^3 - g_2\, Y - g_3)(X\, P'_X + 2(Y - \wp(u))P'_Y)^2 - X^2\, P'^2_X(\wp'(u) + 2\beta\,(Y - \wp(u)))^2$$

alors

$$\operatorname{ord}_{b_i} Q(a_i\, f(z), \wp(z)) \geqslant k_i - 1.$$

Ainsi, si R désigne le résultant de P et Q par rapport à X, alors

$$\operatorname{ord}_{b_i} R(\wp(z)) \geqslant k_i - 1.$$

Si R est non nul, on en déduit

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1) \leqslant 2 \deg R \leqslant 8 L_1 L_2 + 6 L_1.$$

Montrons que R est effectivement non nul. Dans le cas contraire, P divise Q. Ainsi, si l'on définit localement une fonction g vérifiant $P(g(z), \wp(z)) \equiv 0$, alors $\frac{d}{dz} P(g(z), \wp(z)) \equiv 0$ et $Q(g(z), \wp(z)) \equiv 0$, d'où l'on déduit

$$g(z)\{ \wp'(z) + \epsilon (\wp'(u) + 2\beta(\wp(z) - \wp(u)))\} P'_X(g(z), \wp(z)) =$$

$$= 2g'(z) (\wp(z) - \wp(u)) P'_X(g(z), \wp(z))$$

où $\epsilon = \pm 1$.

Or, $P'_X(g(z), \wp(z))$ ne peut être identiquement nul car P est irréductible, donc

$$g'(z) = g(z) \left\{ \epsilon \beta + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(u)}{\wp(z) - \wp(u)} \right\},$$

et par suite $g(z) = c f_{\epsilon \beta, \epsilon u}(z)$ où $c \in \mathbb{C}$, ce qui est absurde puisque les fonctions $\wp$ et $f_{\epsilon \beta, \epsilon u}$ sont algébriquement indépendantes. Cela prouve la majoration (4). Enfin un polynôme quelconque $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ peut se décomposer sous la forme

$$P = Q.R. \prod_{k=1}^{t} S_k$$

où $\deg_X Q = 0$, $\deg_Y R = 0$, $\deg_X S_k \cdot \deg_Y S_k \neq 0$, et S_k irréductible. En appliquant respectivement aux polynômes Q, R, S_k les majorations (2), (3) et (4), on en déduit finalement

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \leqslant 14 L_1 L_2 + 5n L_1.$$

III - DEMONSTRATION DU THEOREME

On suppose d'abord que v est un point de torsion, soit $v = \frac{\omega}{n}$, où ω est une période primitive de $\wp$ et n un entier $\geqslant 2$. D'après le corollaire 6, $f(v) f(\omega / 2)^{-2/n}$ est un nombre algébrique ne dépendant que de v. La remarque précédant l'énoncé du théorème permet ainsi de supposer que $v = \omega / 2$.

La fonction $g(C_1, d, H)$ étant fonction décroissante de d, on peut supposer que d est le degré exact de α. Soit ν un entier suffisamment grand, ne dépendant que de $\wp$, u, v, β. Les constantes c_3 et c_4 ne dépendent que de $\wp$, u, v, β, mais non de ν.

On définit les paramètres

$$h = \log H \; ; M = \nu \, [d \log dh] \; ; L_1 = \nu^2 M \, [h + M] \; ; L_2 = \nu^2 M^2 \; ; K = \nu \, M L_1 \; ;$$

on suppose alors par l'absurde que l'on a

$$(5) \qquad | f(v) - \alpha | < \exp(-\nu^2 M L_1 L_2).$$

On construit alors une fonction auxiliaire F, polynomiale en f et $\wp$, de la façon suivante : pour $m \geqslant 0$, $0 \leqslant \lambda_1 < L_1$, $0 \leqslant \lambda_2 < L_2$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $k \geqslant 0$, on note

$$\psi_{\lambda,k}(z) = 2^k(\wp(z) - \wp(u))^k \, \wp(z)^{\lambda_1} \, f(z)^{\lambda_2}.$$

Alors la relation (1) montre que

$$\psi^{(k)}_{\lambda,k}(v+m\,\omega) = Q_{\lambda,k}(\wp(v), \wp'(v), \wp(u), \wp'(u), \beta) \, \kappa^{m\lambda_2} \, f(v)^{(2m+1)\lambda_2},$$

où $Q_{\lambda,k}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}[g_2 / 2]$, de taille majorée par $c_3 \, k \log(k + \lambda_1 + \lambda_2 + 1)$ et de degré inférieur à $c_3(k + \lambda_1)$.

On définit les nombres algébriques

$$\phi_{m,\lambda,k} = (\alpha / f(v))^{(2m+1)\lambda_2} \, \psi^{(k)}_{\lambda,k}(v)$$

LEMME 8. *Le système*

$$\sum_{\lambda_1=o}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=o}^{L_2-1} \sum_{\mu=o}^{d-1} x_{\lambda\mu} \, \alpha^{\mu} \, \phi_{m,\lambda,k} = 0 \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant k < K \\ 0 < m \leqslant M \end{matrix}$$

a une solution non triviale $(x_{\lambda\mu}) \in \mathbf{Z}^{dL_1L_2}$ *vérifiant*

$$\log \max | x_{\lambda\mu} | \leqslant c_4 K \log K$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le lemme de Siegel, sous la forme donnée au lemme 4.2 de [R], en remarquant que $L_1 L_2 \geqslant \nu \, MK$, pour obtenir le résultat.

On choisit alors une telle solution, et on pose

$$(6) \qquad F(z) = \sum_{\lambda_1=o}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=o}^{L_2-1} p(\lambda)\, \mathscr{P}(z)^{\lambda_1} f(z)^{\lambda_2}$$

et

$$(7) \qquad \phi_{m,k} = \sum_{\lambda_1=o}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=o}^{L_2-1} p(\lambda)\, \phi_{m,k,\lambda}$$

où

$$(8) \qquad p(\lambda) = p(\lambda_1,\lambda_2) = \sum_{\mu=o}^{d-1} x_{\lambda\mu}\, \alpha^{\mu},$$

de sorte que $\phi_{m,k} = 0$ pour $m \leqslant M$ et $k < K$; de plus, $\phi_{m,k}$ est un nombre algébrique, que l'on sait minorer lorsqu'il n'est pas nul, grâce au lemme 4.1 de [R].

De même que dans [R] (§ IV B/ et C/), en appliquant les formules d'interpolation à la fonction entière $F(z)\,\sigma(z)^{2L_1+L_2}$ (lemme 4.5 de [R]) une récurrence permet de déduire de l'hypothèse (5) et de la construction faite au lemme 8 que $\phi_{o,k}$ est nul pour $k \leqslant \nu\, L_1\, L_2$, d'où l'on déduit facilement que $\theta^{(k)}(v) = 0$ pour $k \leqslant \nu\, L_1\, L_2$ où

$$\theta(z) = \sum_{\lambda} p(\lambda)\, \mathscr{P}(z)^{\lambda_1}\, (\alpha\, f(z) / f(v))^{\lambda_2}$$

ce qui contredit le lemme 7 (où l'on choisit $i = 1$, $a_1 = \alpha / f(v)$, $b_1 = v$).

La première assertion du théorème est ainsi démontrée.

Supposons maintenant que v est sans torsion, et montrons la deuxième assertion. On se ramène aisément au cas où $v + u$ et $v - u$ ne sont pas pôles de $\mathscr{P}$. En effet, si $v + u$ est pôle de $\mathscr{P}$, alors $v/2$ est sans torsion, et $u + v/2$ et $-u + v/2$ ne sont pas pôles de $\mathscr{P}$ puisque u est sans torsion. Le théorème étant vérifié pour $v/2$ le sera encore pour v d'après le lemme 5 et la remarque précédant l'énoncé du théorème.

De même que précédemment, on peut supposer que α est de degré d. ν désigne un entier suffisamment grand ne dépendant que de $\mathscr{P}$, u, v, β. On définit les paramètres

$$h = \log H \; ; M = [\nu\, d(\log dh) / \log(d+1)] \; ; L_1 = \nu^2[(Mh + dM^2) / \log(d+1)]$$

$$L_2 = \nu^2[dM^2 / \log(d+1)] \; ; K = \nu\, dML_1 / \log(d+1).$$

On suppose par l'absurde que l'on a

$$|f(v)-\alpha| < \exp\left\{-\nu^3 MK\log(d+1)\right\}. \tag{9}$$

On construit une fonction auxiliaire F, polynômiale en f et $\wp$, de la manière suivante : pour $m > 0$, $0 \leqslant \lambda_1 < L_1$, $0 \leqslant \lambda_2 < L_2$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, on pose

$$\psi_{m,\lambda}(z) = B_m^{L_1}(\wp(z))\, D_m^{L_2}(\wp(z), \wp'(z), \wp(u), \wp'(u))\, \wp(mz)^{\lambda_1}\, f(mz)^{\lambda_2}.$$

Il résulte alors du corollaire 6 que

$$\psi_{m,\lambda}(z) = f(z)^{m\lambda_2} P_{m,\lambda}(\wp(z), \wp'(z), \wp(u), \wp'(u))$$

où $P_{m,\lambda}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[g_2/4, g_3]$, de taille majorée par $c_5(L_1 + L_2)\, m^2$ où c_5 dépend de $\wp$, u, v, β mais non de ν.

D'après le lemme 4, on en déduit que si on définit

$$\psi_{m,\lambda,k}(z) = 2^k(\wp(z) - \wp(u))^k\ \psi_{m,\lambda}(z)$$

alors

$$\psi^{(k)}_{m,\lambda,k}(z) = Q_{m,\lambda,k}(\wp(z), \wp'(z), \wp(u), \wp'(u), \beta) f^{m\lambda_2}(z)$$

où $Q_{m,\lambda,k}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[g_2/4, g_3]$, de taille majorée par $c_6((L_1 + L_2)m^2 + k\log k)$ et de degré majoré par $c_6((L_1 + L_2)m^2 + k)$, où c_6 est indépendante de α et ν.

On définit les nombres algébriques

$$\phi_{m,\lambda,k} = (\alpha / f(v))^{m\lambda_2}\ \psi^{(k)}_{m,\lambda,k}(v).$$

Comme précédemment, le lemme 8 reste valable avec les nouveaux paramètres M, L_1, L_2, K, ce qui permet d'achever la construction de F par les formules (6) et (8). En appliquant ici encore les formules d'interpolation (lemme 4.5 de [R] avec $R/R_1 = d^{1/2}$) à la fonction entière $F(z)\,\sigma(z)^{2L_1+L_2}$, une récurrence permet de déduire de l'hypothèse (9) et de la construction de F que $\phi_{m,k}$ (défini par (7)) est nul pour $1 \leqslant m \leqslant M$ et $k \leqslant K_1 = 2\nu^2 K$.

On considère la fonction $\theta_m(z)$ définie par

$$\theta_m(z) = \sum_{\lambda} p(\lambda)\, (\alpha / f(v))^{m\lambda_2}\, \psi_{m,\lambda,K_1}(z).$$

On vérifie facilement que le système d'inégalités

$$\phi_{m,k} = 0 \qquad 0 \leqslant k \leqslant K_1$$

entraîne

$$\theta_m^{(k)}(v) = 0 \qquad 0 \leqslant k \leqslant K_1$$

et par suite la fonction

$$H_m(z) = \sum_{\lambda} p(\lambda)\, .\wp(z)^{\lambda_1}\, (\alpha^m f(v)^{-m} f(z))^{\lambda_2}$$

admet au point $z = mv$ un zéro d'ordre $\geqslant K_1$, car $\theta_m(z) = F_m(z)\, H_m(mz)$ où F_m est une fonction qui ne s'annule pas en $z = v$. Cela étant vrai pour $0 < m \leqslant M$, l'inégalité

$$MK_1 \geqslant \nu\, L_1\, L_2$$

contredit le lemme 7, ce qui prouve le théorème.

REFERENCES

[A] *«Nombres transcendants et groupes algébriques»*. Astérisque (Société Mathématique de France), à paraître en 1979.

[G] A.O. GELFOND. *«Transcendental and algebraic numbers»*. Dover, New-York, 1960.

[R] E. REYSSAT. *«Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielles»*. à paraître en 1980 au Bull. S.M.F.

[W] M. WALDSCHMIDT. *«Nombres transcendants et fonctions sigma de Weierstrass»*. C.R. Math. Rep. Acad. Sc. Canada. 1 (1979), p. 111-114.

(Manuscrit reçu le 28 janvier 1980)