ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

FELIPE ACKER
MARC-ANTOINE PRESTEL

Convergence d'un schéma de minimisation alternée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 2, nº 1 (1980), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_1_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol II, 1980, P. 1 à 9

CONVERGENCE D'UN SCHEMA DE MINIMISATION ALTERNEE

Felipe Acker *(1)*(*) **et Marc-Antoine Prestel** *(2)*

(1) 19, rue de Richemont - 75013 Paris.
(2) 127, rue St Denis - 75001 Paris.

Résumé : On considère les suites $\begin{cases} x_n = (I + \partial\varphi_1)^{-1}\, y_{n-1} \\ y_n = (I + \partial\varphi_2)^{-1}\, x_n\,, \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

où φ_1, $\varphi_2 : H \to]-\infty, +\infty]$ sont convexes, s.c.i. et propres et où $y_o \in H$ a été fixé. On pose $\phi(x,y) = \frac{1}{2} | x-y |^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$. On montre que $\lim_{n \to +\infty} \phi(x_n,y_n) = \inf \phi$ et que si ϕ est bornée inférieurement, alors la suite $(x_n-y_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $u \in H$ indépendant de y_o. On montre aussi que si ϕ atteint son minimum, alors (x_n,y_n) converge faiblement dans $H \times H$ vers $(\overline{x}, \overline{y})$ vérifiant $\phi(\overline{x}, \overline{y}) = \underset{(x,y) \in H \times H}{\mathrm{Min}} \phi(x,y)$ et que, dans le cas contraire on a : $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} |y_n| = \infty$.

Summary : We are considering the sequences $\begin{cases} x_n = (I + \partial\varphi_1)^{-1}\, y_{n-1} \\ y_n = (I + \partial\varphi_2)^{-1}\, x_n\,, \quad n \geqslant 1 \end{cases}$

where φ_1, $\varphi_2 : H \to]-\infty, +\infty]$ are convex, lower-semicontinuous and proper functions and where $y_o \in H$ is fixed. Setting $\phi(x,y) = \frac{1}{2} | x - y |^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$, we show that $\lim_{n \to +\infty} \phi(x_n,y_n) = \inf \phi$ and we also show that if ϕ is bounded from below, then the sequence $(x_n-y_n)_{n \geqslant 1}$ converges in H to u (u independant from y_o). Moreover we can prove that if ϕ reaches its minimum, then $(x_n,y_n)_{n \geqslant 1}$ converges in $H \times H$ to $(\overline{x}, \overline{y})$ such that
$\phi(\overline{x}, \overline{y}) = \underset{(x,y) \in H \times H}{\mathrm{Min}} \phi(x,y)$. If on the contrary ϕ does not reach its minimum, then we get :
$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \lim_{n\to+\infty} |y_n| = +\infty$.

(*) *Boursier du C.N.P. Brésil.*

Notations : H est un espace de Hilbert réel, de produit scalaire $<\cdot>$ et de norme $|\cdot|$. I désigne l'identité de H. On note $D(\varphi)$ le domaine de φ, $\partial\varphi$ (resp. $\partial\phi$) le sous-différentiel de φ (resp. ϕ) défini sur $D(\partial\varphi) \subset H$ (resp. $D(\partial\phi) \subset H \times H$) (pour les notations et propriétés élémentaires des sous-différentiels, voir [1]).

I - PRESENTATION DU PROBLEME

Soient H un espace de Hilbert réel, $\varphi_1, \varphi_2 \quad H \to]-\infty, +\infty]$ deux fonctions convexes, semi-continues inférieurement et propres. Soient T_1 et T_2 les contractions de H dans H définis par

$$T_1 = (I + \partial\varphi_1)^{-1}, \quad T_2 = (I + \partial\varphi_2)^{-1}$$

On fixe $y_o \in H$ et on définit les suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $(y_n)_{n \geqslant 1}$ de H par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n = T_1(y_{n-1}), \quad y_n = T_2(x_n)$$

on se propose d'étudier la convergence de la suite $(x_n - y_n)_{n \geqslant 1}$.

Ce problème est directement lié à la minimisation de la fonction ϕ définie par $\phi : H \times H \to]-\infty, \infty]$

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x-y)^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$$

En effet, $x_1 = T_1(y_o)$ est un point de minimum de l'application $x \mapsto \phi(x,y_o)$. Si $y_o \in D(\varphi_2)$, x_1 est même l'unique point de minimum de $x \mapsto \phi(x,y_o)$. Pour $n \geqslant 1$, x_n appartient à $D(\partial\varphi_1) \subset D(\varphi_1)$ et $y_n \in D(\partial\varphi_2) \subset D(\varphi_2)$. Par un raisonnement analogue, on obtient que, pour tout $n \geqslant 1$,

y_n est le point de minimum de $y \mapsto \phi(x_n,y)$
x_{n+1} est le point de minimum de $x \mapsto \phi(x,y_n)$.

on en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\infty > \phi(x_n,y_n) \geqslant \phi(x_{n+1},y_n) \geqslant \phi(x_{n+1},y_{n+1}).$$

II - PROPRIETE DES SUITES MINIMISANTES DE ϕ

PROPOSITION. *Soit* $\varphi : H \times H \to]-\infty, +\infty]$ *, convexe et propre. On suppose que l'application* $\phi : H \times H \to]-\infty, \infty]$

$$(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x-y)^2 + \varphi(x,y)$$

est bornée inférieurement. Il existe alors $u \in H$ *tel que pour toute suite* (x_n,y_n) *de* $H \times H$ *avec* $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n,y_n) = \inf_{x,y\in H} \phi$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n-y_n) = u$$

Démonstration. Soit (x_n,y_n) une suite minimisante. Pour montrer que (x_n-y_n) est une suite de Cauchy, on observe que pour tous $m,n \geqslant 1$,

$$\phi\left(\frac{x_n+x_m}{2}, \frac{y_n+y_m}{2}\right) = \frac{1}{2}\left|\frac{x_n-y_n}{2} + \frac{x_m-y_m}{2}\right|^2 + \varphi\left(\frac{x_n+x_m}{2}, \frac{y_n+y_m}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left\{|x_n-y_n|^2 + |x_m-y_m|^2 + 2 < x_n-y_n, x_m-y_m >\right\} + \frac{1}{2}\left\{\varphi(x_n,y_n) + \varphi(x_m,y_m)\right\}$$

à cause de la convexité de φ. On a donc

$$\phi(x_n,y_n) + \phi(x_m,y_m) - 2\phi\left(\frac{x_n+x_m}{2}, \frac{y_n+y_m}{2}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\left\{|x_n-y_n|^2 + |x_m-y_m|^2 - 2 < x_n-y_n, x_m-y_m>\right\} \geqslant \frac{1}{4}|(x_n-y_n) - (x_m-y_m)|^2.$$

Puisque $\phi(x_n,y_n)$ et $\phi(x_m,y_m)$ tendent vers inf ϕ, qui est fini, ϕ étant propre et minorée, il résulte de la majoration précédente que :

$$\lim_{m,n\to\infty} |(x_n-y_n) - (x_m-y_m)|^2 = 0.$$

Soit alors $u = \lim_{n\to\infty} (x_n-y_n)$. Si (x'_n,y'_n) est une suite minimisante de ϕ, on sait que $(x'_n - y'_n)$ converge vers $u' \in H$. Or, la suite obtenue en alternant les (x_{2n},y_{2n}) et les (x'_{2n+1},y'_{2n+1}) est aussi une suite minimisante, donc convergente et on en conclut que $u' = u$.

Remarques. 1) Si $\varphi(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$, φ_1, φ_2 définies par

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases} \qquad \varphi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = y_0 \\ +\infty & \text{si } y \neq y_0 \end{cases}$$

où $y_o \in H$ et $K \subset H$ est un convexe fermé, on retrouve le théorème de projection sur un convexe fermé.

2) Dans la démonstration de la proposition, on obtenait en fait l'inégalité suivante :

$$\forall (x,y) \in H \times H,\ \forall n \geq 1,\ \phi(x,y) + \phi(x_n,y_n) - 2\phi(\frac{x+x_n}{2}, \frac{y+y_n}{2}) \geq \frac{1}{4} |(x-y) - (x_n-y_n)|^2$$

Puisque $\phi(\frac{x+x_n}{2}, \frac{y+y_n}{2}) \geq \inf \phi$, on a,

$$\phi(x,y) + \phi(x_n,y_n) - 2 \inf \phi \geq \frac{1}{4} |(x-y) - (x_n-y_n)|^2.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\forall (x,y) \in H \times H,\ |(x-y)-u|^2 \leq 4(\phi(x_n,y_n) - \inf \phi).$$

III - CONVERGENCE DE LA SUITE (x_n-y_n)

On reprend $\phi(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$. On vérifie facilement que $D(\partial\phi) = D(\partial \varphi_1) \times D(\partial \varphi_2)$ et que pour tout

$$(x,y) \in D(\partial\phi),\ \partial\phi(x,y) = \{ x-y + \partial\varphi_1(x) \} \times \{ y-x + \partial\varphi_2(y) \}$$

Puisque, par définition des suites (x_n) et (y_n), on a pour tout $n \geq 1$

$$(x_n-y_n) \in \partial \varphi_2(y_n),\ (y_n-x_{n+1}) \in \partial\varphi_1(x_{n+1}),\ (x_{n+1}-y_{n+1}) \in \partial\varphi_2(y_{n+1}),$$

on obtient en particulier

$$\forall n \geq 1,\ (0,x_n-x_{n-1}) \in \partial\phi(x_{n+1},y_n) \text{ et } (y_n-y_{n+1},0) \in \partial\phi(x_{n+1},y_{n+1}).$$

LEMME. *Pour tout* $(x,y) \in H \times H$ *et pour tout* $n \geq 1$, *on a*

$$< x-x_{n+1},y-y_{n+1} > \leq <x-x_n,y-y_n> + 2\,\phi(x,y) - \phi(x_{n+1},y_n) - \phi(x_{n+1},y_{n+1})$$

Démonstration. On a :

$$(1)\ <x-x_{n+1},y-y_{n+1}> = <x-x_n,y-y_n> + <x_n-x_{n+1},y-y_n> + <x-x_{n+1},y_n-y_{n+1}>$$

Puisque

$$(0,x_n-x_{n+1}) \in \partial\phi(x_{n+1},y_n) \text{ et } (y_n-y_{n+1},0) \in \partial\phi(x_{n+1},y_{n+1})$$

il vient aussi

(2) $$\phi(x,y)-\phi(x_{n+1},y_n) \geqslant \langle x_n-x_{n+1},y-y_n \rangle$$

(3) $$\phi(x,y)-\phi(x_{n+1},y_{n+1}) \geqslant \langle x-x_{n+1},y_n-y_{n+1} \rangle$$

le lemme découle directement de (1), (2) et (3).

On se servira maintenant du fait que si φ est convexe, s.c.i et propre et $T=(I+\partial\varphi)^{-1}$, alors :

$$\forall\ (u,v) \in H \times H,\ \langle u-v\ ,\ Tu-Tv \rangle\ \geqslant\ |Tu-Tv|^2.$$

THEOREME 1.

(i) *la suite* (x_n,y_n) *vérifie :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi(x_n,y_n) = \inf\limits_{x,y\in H} \phi(x,y)$

(ii) *si* ϕ *est bornée inférieurement, il existe* $u \in H$ *indépendant de* y_0 *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n-y_n)=u.$

Démonstration.

(i) Puisque $(\phi(x_n,y_n))$ est décroissante, on peut poser $d=\lim\limits_{n\to\infty} \phi(x_n,y_n)$ (si $d=-\infty$, il n'y a plus rien à démontrer).

Le lemme nous assure que pour tout $(\overline{x},\overline{y}) \in H \times H$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\langle \overline{x}-x_{n+1},\overline{y}-y_{n+1} \rangle \leqslant \langle \overline{x}-x_n,\overline{y}-y_n \rangle + 2\,\phi(\overline{x},\overline{y})-\phi(x_{n+1},y_n)-\phi(x_{n+1},y_{n+1})$$

Puisque $d=\inf\limits_n \phi(x_n,y_n)=\inf\limits_n \phi(x_{n+1},y_{n+1})$, on a

$$\langle \overline{x}-x_{n+1},\overline{y}-y_{n+1} \rangle \leqslant \langle \overline{x}-x_n,\overline{y}-y_n \rangle + 2\,(\phi(\overline{x},\overline{y})-d)$$

En faisant varier n de 1 à m et en additionnant les inégalités correspondantes, on obtient :

$$\forall\ (\overline{x},\overline{y}) \in H \times H,\ \forall\ m \geqslant 1,$$

$$\langle \overline{x}-x_{m+1},\overline{y}-y_{m+1} \rangle \leqslant \langle \overline{x}-x_1,\overline{y}-y_1 \rangle + 2m(\phi(\overline{x},\overline{y})-d)$$

Soit $x \in H$. On porte (x,T_2x) à la place de $(\overline{x},\overline{y})$ dans la dernière inégalité, et on obtient, compte-tenu de ce que $y_{m+1} = T_2(x_{m+1})$:

$$\forall x \in H,\ \forall m \geqslant 1,\ 0 \leqslant |T_2x-y_{m+1}|^2 \leqslant \langle x-x_{m+1}, T_2x-y_{m+1}\rangle$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant |T_2x-y_{m+1}|^2 \leqslant \langle x-x_1, T_2x-y_1\rangle + 2m(\phi(x,T_2x)-d)$$

D'où
$$\phi(x,T_2x) \geqslant d - \frac{\langle x-x_1, T_2x-y_1\rangle}{2m}$$

On fait alors tendre m vers l'infini pour obtenir :

$$\forall x \in H,\ \phi(x,T_2x) \geqslant d.$$

Puisque $\phi(x,T_2x) = \inf\limits_{y \in H} \phi(x,y)$, il en résulte que :

$$\forall (x,y) \in H \times H \quad \phi(x,y) \geqslant d.$$

Donc, $d = \lim\limits_n \phi(x_n,y_n)$ est égal à $\inf \phi$ et si $\inf \phi > -\infty$, (x_n,y_n) est une suite minimisante.

(ii) se déduit de (i) et de la proposition du § II.

Remarque. La condition posée dans la partie (ii) (ie. ϕ est borné inférieurement) est suffisante mais n'est pas nécessaire, comme on peut le voir en posant $\varphi_1 \equiv 0$ et $\varphi_2(y) = \langle p,y\rangle$, $p \neq 0$.

IV - CONVERGENCE DES SUITES (x_n) ET (y_n)

Soit $M = \{(x,y) \in H \times H \mid \phi(x,y) = \inf \phi\}$ (ϕ n'est plus supposée bornée inférieurement).

Puisque ϕ est convexe et s.c.i., M est convexe et fermé.

D'autre part, puisque $(x,y) \in M \Leftrightarrow (0,0) \in \partial\phi(x,y)$ et que pour tout $(x,y) \in H \times H$, $\partial\phi(x,y) = (x-y+\partial\varphi_1(x)) \times (y-x+\partial\varphi_2 y)$, on a :

$$(x,y) \in M \Leftrightarrow (y-x) \in \partial\varphi_1(x) \text{ et } (x-y) \in \partial\varphi_2(y)$$

On a donc

(i) $M = \{(x,y) \in H \times H \mid T_2x = y \text{ et } T_1y = x\}$

(ii) $M = \{(x,T_2x) \mid x \in H \text{ et } T_1T_2x = x\}$,

(iii) $M = \{ (x,x+u) \mid x \in H$ et $T_1T_2x = x \}$, u étant l'élément de H cité dans le Théorème du paragraphe III.

Il découle de (i) que, pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $(x,y) \in M$,

$$|x_{n+1}-x| = |T_1y_n - T_1y| \leqslant |y_n - y| = |T_2x_n - T_2(x)| \leqslant |x_n - x|$$
$$|y_{n+1}-y| = |T_2x_{n+1} - T_2x| \leqslant |x_{n+1}-x| \leqslant |y_n - y|$$

THEOREME 2.

(i) *Si* $M = \emptyset$, *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = \infty$

(ii) *Si* $M \neq \emptyset$, *alors il existe* $(\bar{x},\bar{y}) \in M$ *tel que* $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ *et* $y_n \rightharpoonup \bar{y}$.

Démonstration. (i) Si (x_n) ne tend pas vers l'infini, il existe une sous-suite (x_{n_m}) bornée. Puisque $y_{n_m} = T_2x_{n_m}$ et que T_2 est contractante, la suite (x_{n_m}, y_{n_m}) est alors bornée dans $H \times H$. Soit donc $(\bar{x},\bar{y}) \in H \times H$ un point limite faible d'une sous-suite de (x_{n_m}, y_{n_m}). Le fait que $\phi(x_n,y_n) \to \inf \phi$ et la s.c.i. faible de ϕ entraînent que $(\bar{x},\bar{y}) \in M$, ce qui contredit l'hypothèse. Le même raisonnement peut être fait si on suppose que $(y_n) \not\to \infty$.

(ii) Si $(x,y) \in M$, les suites $(|x_n - x|)_{n \geqslant 1}$ et $(|y_n - y|)_{n \geqslant 1}$ sont décroissantes et $\{(x_n,y_n)\}_{n \geqslant 1}$ est bornée. La démonstration du (i) montre que toute sous-suite de (x_n,y_n) admet une sous-suite convergeant faiblement vers un élément $(\bar{x},\bar{y}) \in M$. Il suffit alors de prouver que $(\bar{x},\bar{y})$ ne dépend pas de la sous-suite considérée.

Si $(x_{n_{\bar{m}}}, y_{n_{\bar{m}}}) \rightharpoonup (\bar{x},\bar{y})$ et $(x_{n_m}, y_{n_m}) \rightharpoonup (x,y)$, on a $(x,y) \in M$ et $(\bar{x},\bar{y}) \in M$. Soient alors $\bar{\ell} = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - \bar{x}|$, $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x|$.

On a les identités

(*) $$|x_{n_m} - \bar{x}|^2 = |x_{n_m} - x|^2 + |x - \bar{x}|^2 + 2 \langle x_{n_m} - x, x - \bar{x} \rangle$$

(**) $$|x_{n_m} - x|^2 = |x_{n_m} - \bar{x}|^2 + |\bar{x} - x|^2 + 2 \langle x_{n_m} - \bar{x}, \bar{x} - x \rangle$$

En faisant tendre $\bar{m}$ vers l'infini dans (*) et m dans (**) on obtient

$$\bar{\ell}^2 = \ell^2 - |x - \bar{x}|^2 \text{ et } \ell^2 = \bar{\ell}^2 - |x - \bar{x}|^2 .$$

On en déduit que $x = \bar{x}$, et donc $x_n \rightharpoonup \bar{x}$.

On montre de même que $\bar{y} = y$ (ou bien on remarque que $x_n - y_n \to u$, d'où $y_n \rightharpoonup \bar{x} - u$).

Exemple. Comme application des Théorèmes 1 et 2, citons le résultat suivant :

- Soient H un espace de Hilbert, $K_1, K_2 \subset H$ deux convexes fermés, p_i la projection sur K_i (i=1,2). Si $y_o \in H$, on forme le schéma de projection alternée $x_n = p_1(y_{n-1})$, $y_n = p_2(x_n)$ pour $n \geqslant 1$.

On a alors

(i) Il existe $u \in H$, ne dépendant que de K_1 et K_2 tel que :

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = u \text{ et } |u| = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} |x-y| = d(K_1, K_2)$$

(ii) Si K_1 (ou K_2) est borné, $\{(x_n, y_n)\}_{n \geqslant 1}$ converge faiblement vers $(x,y) \in K_1 \times K_2$ tel que $|x-y| = d(K_1,K_2)$. Si K_1 (ou K_2) est compact, (x_n,y_n) converge fortement vers (x,y).

En effet, si φ_i est la fonction indicatrice de K_i, on a $p_i = (I + \partial\varphi_i)^{-1}$ (i=1,2).

REFERENCES

[1] H. BREZIS. *«Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert»*. North-Holland, 1973.

[2] R.T. ROCKAFELLAR. *«Convex Analysis»*. Princeton Univ. Press, 1970.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1979)