ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-MICHEL CORON

Résolution de l'équation $Au + Bu = f$ où A est linéaire et B dérive d'un potentiel convexe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^{e} série, tome 1, n^{o} 3 (1979), p. 215-234

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_3_215_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol I, 1979, P. 215 à 234

RESOLUTION DE L'EQUATION Au + Bu = f OU A EST LINEAIRE ET B DERIVE D'UN POTENTIEL CONVEXE

Jean-Michel Coron *(1)*

(1) 115, avenue du Roule - 92200 Neuilly.

Résumé : On montre par une méthode simple de Max-Min un théorème de Bahri et Morel [3] concernant l'équation $Au + Bu = f$ où A est linéaire auto adjoint et où B dérive d'un potentiel convexe. On applique les résultats obtenus à une équation de Laplace à la résonance, à un système hamiltonien et à une équation des ondes non linéaire.

Summary : We give a simple proof, based on a Max-Min argument, of a result of Bahri and Morel [3] concerning the equation $Au + Bu = f$ where A is a linear self adjoint operator and B is a non linear potential operator. We also study the existence of non-trivial solutions for $Au + Bu = 0$. We present applications to a Laplace'equation, an Hamiltonian system and a non linear wave equation.

INTRODUCTION

Soit H un espace de Hilbert réel, soit A un opérateur linéaire de domaine dense, auto adjoint et d'image fermée. On a donc $H = R(A) \oplus N(A)$, où $\oplus$ désigne la somme hilbertienne, R(A) l'image de A et N(A) le noyau de A. De plus $A \mid D(A) \cap R(A)$ à valeurs dans R(A) est bijectif d'inverse borné. On suppose que cet inverse que l'on notera A^{-1} est compact. On désigne par λ_{-1} la première valeur propre négative de $A (\lambda_{-1} = -\infty$ si A n'a pas de valeur propre négative).

Soit B le sous-différentiel d'une fonction convexe φ. On note conv R(B) l'enveloppe convexe de l'image R(B) de B.
On considère deux problèmes distincts :

Au § 1, on étudie R(A+B). On montre que si $\overline{\lim\limits_{|u|\to+\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$ alors

$$\overline{R(A+B)} = \overline{R(A) + \mathrm{conv}\, R(B)}$$

et

$$\mathrm{Int}\,[R(A+B)] = \mathrm{Int}\,[R(A) + \mathrm{conv}\, R(B)]$$

Ce résultat généralise un théorème de Brézis-Nirenberg [5] ou [7]. On retrouve, par une démonstration élémentaire de Max-Min, un résultat de Bahri-Morel [3].

Au § 2, on étudie l'existence de solution non triviale de l'équation :

(1) $\quad 0 \in Au + Bu \quad$, en supposant que $0 \in B0$.

On prouve que si $\overline{\lim\limits_{|u|\to+\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$ et si $\underline{\lim\limits_{|u|\to 0}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} > \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$, alors il existe $u \neq 0$ solution de (1). On se restreint ensuite au cas où $H = L^2(\Omega)^p$, Ω ouvert de R^n et $\varphi(u) = \int_\Omega j[u(x)]dx$ où j est une fonction convexe de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\overline{\lim\limits_{|x|\to\infty}} \dfrac{j(x)}{|x|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$ et $\underline{\lim\limits_{|x|\to 0}} \dfrac{j(x)}{|x|^2} > \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$ et on montre, moyennant d'autres hypothèses sur A, l'existence d'une solution non nulle à (1). On applique ce résultat à une équation de Laplace à la résonance non linéaire, à la recherche de solutions périodiques de systèmes hamiltoniens ; on étudie ensuite le cas d'une équation des ondes non linéaire ; les résultats obtenus sont à rapprocher de ceux de [1], [6], [9], [10], [11], [13], [14], [15].

Je remercie Monsieur BREZIS qui a dirigé ce travail.

I - ETUDE DE R(A+B)

Notations. On note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ ; on pose $H_1 = (\bigoplus_{\lambda<0} E_\lambda) \cap D(A)$,

$$H_2 = (\bigoplus_{\lambda\geqslant 0} E_\lambda) \cap D(A) \text{ ; on a donc } H = \overline{H}_1 \oplus \overline{H}_2$$

THEOREME 1. *Si* $\overline{\lim\limits_{|u|\to+\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$, *alors*

$$\overline{R(A+B)} = \overline{R(A) + \mathrm{conv}\, R(B)}$$

et

$$\mathrm{Int}\,[R(A+B)] = \mathrm{Int}\,[R(A) + \mathrm{conv}\, R(B)]$$

De plus si $f \in \operatorname{Int}[R(A) + \operatorname{conv} R(B)]$, *il existe* $(u_1,u_2) \in H_1 \times H_2$ *tel que si* $u = u_1 + u_2$:

(i) $f \in Au + Bu$

(ii) $\phi(u_1+u_2) = \underset{x_1 \in H_1}{\operatorname{Max}} \ \underset{x_2 \in H_2}{\operatorname{Inf}} \ \phi(x_1+x_2)$

et

$$\phi(u_1+u_2) = \underset{x_2 \in H_2}{\operatorname{Min}} \ \phi(u_1+x_2)$$

(iii) $\varphi^*(f-Au) + \frac{1}{2}(Au,u) = \underset{x \in D(A)}{\operatorname{Min}} \ \varphi^*(f-Ax) + \frac{1}{2}(Ax,x) = -\phi(u)$

où $\phi(x) = \frac{1}{2}(Ax,x) + \varphi(x) - (f,x)$ *et*

$$\varphi^*(x) = \underset{y \in H}{\operatorname{Sup}} \ (x,y) - \varphi(y).$$

Démonstration. Soit $f \in R(A) + \operatorname{conv} R(B)$; $f = Av + \sum_{i=1}^{n} t_i w_i^*$ avec $w_i^* \in Bw_i, t_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. On pose $b_2 = -\frac{1}{2}(Av_2,v_2) + \sum_{i=1}^{n} t_i [\varphi(w_i) - (w_i^*,w_i)]$ où v_2 est la projection de v sur H_2 ; évidemment $v_2 \in H_2$.

On considère la fonction ϕ_ϵ de D(A) dans R définie par :

$$\phi_\epsilon(u) = \frac{1}{2}(Au,u) + \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + \varphi(u) - (f,u)$$

Etape 1. Soit F un sous-espace de dimension finie stable par A et inclus dans D(A).

On pose : $F_1 = H_1 \cap F$

$F_2 = H_2 \cap F$

on pose, pour tout u_1 de F_1, $\alpha_\epsilon(u_1) = \underset{x_2 \in F_2}{\operatorname{Inf}} \ \phi_\epsilon(u_1+x_2)$.

a) on se donne u_1 dans F_1.

La fonction de F_2 dans $\mathbb{R}$, $\phi_\epsilon(u_1 + .)$ est strictement convexe, continue et tend vers l'infini à l'infini. Il existe donc un élément de F_2 et un seul, que l'on notera $h_\epsilon(u_1)$ tel que $\alpha_\epsilon(u_1) = \phi_\epsilon(u_1+h_\epsilon(u_1))$.

b) α_ϵ et h_ϵ sont continues.

En effet : Soit $(u_{1,n})_{n\in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F_1 convergeant vers u_1 ; on a $\phi_\epsilon(u_{1,n} + h_\epsilon(u_{1,n})) \leqslant \phi_\epsilon(u_{1,n}) \leqslant C$.

De plus $u_{1,n}$ est bornée donc $h_\epsilon(u_{1,n})$ est bornée ; on peut en extraire une suite convergente $h_\epsilon(u_{1,n_k}) \to u_2$

$$\alpha_\epsilon(u_{1,n_k}) = \phi_\epsilon(u_{1,n_k} + h_\epsilon(u_{1,n_k})) \to \phi_\epsilon(u_1+u_2) \geqslant \alpha_\epsilon(u_1)$$

mais α_ϵ est s.c.s. donc $\phi_\epsilon(u_1+u_2) = \alpha_\epsilon(u_1)$ d'où $u_2 = h_\epsilon(u_1)$, d'où $h_\epsilon(u_{1,n}) \to h_\epsilon(u_1)$; h_ϵ est donc continue et par suite α_ϵ est aussi continue.

c) Il existe $(\epsilon_o, \rho, c) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ tel que : si $0 < \epsilon < \epsilon_o$ $\forall u_1 \in H_1 \cap F, \alpha_\epsilon(u_1) \leqslant -\rho|u_1|^2 + C$ où ρ est indépendant de F ainsi que C et ϵ_o.

En effet $\alpha_\epsilon(u_1) \leqslant \phi_\epsilon(u_1) \leqslant -\dfrac{|\lambda_{-1}|}{2} |u_1|^2 + \dfrac{\epsilon}{2} |u_1|^2 + \varphi(u_1) - (f,u_1)$.

Mais comme $\overline{\lim\limits_{|u| \to +\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$, $\exists R$, $\exists \theta$ avec $\theta < |\lambda_{-1}|$ tels que $\forall u \in H$,

$|u| \geqslant R \Rightarrow \varphi(u) \leqslant \dfrac{\theta}{2} |u|^2$.

En utilisant la convexité de φ et le fait que φ est bornée sur la sphère de centre 0 et de rayon R (d'après l'implication précédente), on voit que φ est bornée sur la boule de centre 0 et de rayon R donc $\exists C'$ tel que :

$\forall u \in H$ $\varphi(u) \leqslant \dfrac{\theta}{2} |u|^2 + C'$, ce qui termine la démonstration de c.

d) De a,b,c il résulte qu'il existe $u_{1,F}$ tel que :

$$\alpha_\epsilon(u_{1,F}) = \operatorname*{Max}_{x_1 \in F_1} \alpha_\epsilon(x_1)$$

on note P_F la projection (orthogonale) sur F. On pose $B_F = P_F B$, B_F est le sous différentiel de $\varphi_F : F \to R, x \to \varphi(x)$ (en effet, si I_F est la fonction indicatrice de F, comme $F \cap \operatorname{Int}(D(\varphi)) \neq \emptyset$, on a $\partial I_F + \partial\varphi = \partial(I_F + \varphi)$ d'où l'on en déduit facilement que $B_F = \partial\varphi_F$).

Montrons (*) que :

$$P_F f \in \epsilon u_F + A u_F + B_F u_F \tag{2}$$

Pour alléger l'écriture on écrira u, u_1, u_2 à la place de u_F, $u_{1,F}$, $u_{2,F}$ (où $u_{2,F} = h_\epsilon(u_{1,F})$ et $u_F = u_{1,F} + u_{2,F}$).

On remarque d'abord que :

$$\forall (x,y) \in F^2, \ \forall \eta \in B_F x$$

$$\phi_\epsilon(x+ty) - \phi_\epsilon(x) \geqslant (\epsilon x + Ax + \eta - f, ty) + \frac{t^2}{2}(Ay,y) \tag{3}$$

en effet :

$$\frac{\epsilon}{2}|x+ty|^2 - \frac{\epsilon}{2}|x|^2 \geqslant (\epsilon x, ty) \tag{4}$$

(*) Je remercie M. Brézis qui m'a fourni cette démonstration de (2). Ma démonstration supposait φ de classe C^1.

(5) $$\frac{1}{2}(A(x+ty),x+ty) - \frac{1}{2}(Ax,x) = (Ax,ty) + \frac{t^2}{2}(Ay,y)$$

(6) $$\varphi(x+ty) - \varphi(x) \geqslant (\eta,ty)$$

En additionnant (4), (5), (6) on obtient (3).

Supposons que $P_F f \notin \epsilon u + Au + B_F u$.

Comme $B_F u$ est un convexe fermé $\exists\, a \in F$ tel que :

(7) $$\forall\, \eta \in B_F u \ (f-\epsilon u-Au,a) < (\eta\,,a)$$

on pose $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in F_1$ et $a_2 \in F_2$.

On applique l'inégalité (3) avec $x = u_1 - ta_2 + h_\epsilon(u_1+ta_1) = u_t$

$y = a_1 + a_2 = a$

$$\forall\ \eta_t \in B_F\, u_t,\ \phi_\epsilon(u_t+t(a_1+a_2)) - \phi_\epsilon(u_t) \geqslant (\epsilon u_t+Au_t+\eta_t-f,t(a_1+a_2)) + \frac{t^2}{2}(Aa,a)$$

mais
$$\begin{aligned}\phi_\epsilon(u_1+ta_1+h_\epsilon(u_1+ta_1)) &\leqslant \phi_\epsilon(u_1+h_\epsilon(u_1))\\ &\leqslant \phi_\epsilon(u_1+h_\epsilon(u_1+ta_1)-ta_2)\\ &= \phi_\epsilon(u_t)\end{aligned}$$

donc $\forall\ \eta_t \in B_F u_t$:

$$\forall\, t>0 \qquad (\epsilon u_t + Au_t + \eta_t - f,a_1 + a_2) + \frac{t}{2}(Aa,a) \leqslant 0$$

$u_t \to u$ donc η_t est borné ; soit $t_n \to 0^+$ tel que $\exists\, \eta_{t_n} \in B_F(u_{t_n})$
$\eta_{t_n} \to \eta$; on a $\eta \in Bu$ et $(\epsilon u + Au + \eta - f,a) \leqslant 0$
en contradiction avec (7) ce qui termine la démonstration de (2).

Etape 2. On fait varier F.

Remarquons d'abord que $\phi_\epsilon(u_{1,F}+u_{2,F}) \geqslant b_2$.

En effet : soit $x_2 \in F_2$, on a :

$$\varphi(x_2) - \varphi(w_i) \geqslant (w_i^*,x_2-w_i).$$

On multiplie par t_i et on somme

(8) $$\varphi(x_2) - \sum_{i=1}^{n} t_i\, \varphi(w_i) \geqslant \sum_i (t_i w_i^*,x_2) - \sum_{i=1}^{n} t_i(w_i^*,w_i)$$

de plus

$$\frac{1}{2}(Ax_2,x_2) - \frac{1}{2}(Av_2,v_2) \geqslant (Av_2,x_2-v_2). \tag{9}$$

On ajoute (8) et (9) et on remplace $Av + \sum_{i=1}^{n} t_i w_i^*$ par f ; il vient :

$$\phi_\epsilon(x_2) \geqslant -\frac{1}{2}(Av_2,v_2) + \sum_{i=1}^{n} t_i [\varphi(w_i) - (w_i^*,w_i)] = b_2$$

d'où $\alpha_\epsilon(0) \geqslant b_2$ et donc $\alpha_\epsilon(u_{1,F}) \geqslant b_2$

donc

$$b_2 \leqslant \phi_\epsilon(u_{1,F}+u_{2,F}) \leqslant \phi_\epsilon(u_{1,F}) \leqslant -\rho|u_{1,F}|^2 + C \leqslant C. \tag{10}$$

$u_{1,F}$ est donc borné ainsi que $\phi_\epsilon(u_{1,F}+u_{2,F})$ et $\phi_\epsilon(u_{1,F})$ donc $u_{2,F}$ est borné. Mais φ est bornée sur tout borné, donc B est aussi bornée sur tout borné, comme on le voit en utilisant l'inégalité $\varphi(x+h) - \varphi(x) \geqslant (\eta,h)$ $\forall \eta \in \partial\varphi(x)$, $\forall$ h ; mais $-\epsilon u_F - Au_F + P_F f \in P_F Bu_F$ donc Au_F est aussi borné.

On peut extraire du filtre des sous-espaces de dimension finie de D(A) stable par A un ultrafiltre convergent tel que

$$u_F \longrightarrow u$$
$$Au_F \longrightarrow v$$

Le graphe de A est un sous-espace vectoriel fermé de H × H. Il est donc faiblement fermé donc v = Au ; du fait de la compacité de A^{-1}, $P_{R(A)}u_F \to P_{R(A)}u$ et donc $(Au_F,u_F) \to (Au,u)$.

Montrons que $u_F \to u$; soit F_o un sous-espace de l'ultrafiltre, soit $x \in F_o$; si $F_o \subset F$ on a (car $P_F f - \epsilon u_F - Au_F \in P_F Bu_F$) :

$$\varphi(x) - \varphi(u_F) \geqslant (P_F f - \epsilon u_F - Au_F, x-u_F)$$

En passant à la limite :

$$\varphi(x) - \overline{\lim}\ \varphi(u_F) \geqslant (f-\epsilon u - Au, x-u) + \epsilon(\overline{\lim}\ |u_F|^2 - |u|^2) \tag{11}$$

et ceci pour tout vecteur x d'un élément de l'ultrafiltre ; φ étant continue, on en déduit que (11) est vrai pour tout x de H on prend x = u ; comme $\underline{\lim}\ \varphi(u_F) \geqslant \varphi(u)$ il vient $\overline{\lim}\ |u_F|^2 \leqslant |u|^2$ donc $u_F \to u$; de plus d'après (11),

$$\forall x \in H \quad \varphi(x) - \varphi(u) \geqslant (f-\epsilon u-Au, x-u)$$

et donc

$$f \in \epsilon u + Au + Bu.$$

En passant à la limite dans (10) il vient :

(12) $$b_2 \leqslant \phi_\epsilon(u_1+u_2) \leqslant \phi_\epsilon(u_1) \leqslant -\rho|u_1|^2 + C \leqslant C$$

Montrons que :

(13) $$\inf_{x_2 \in H_2} \phi_\epsilon(x_1+x_2) \leqslant \phi_\epsilon(u_1+u_2) \qquad \forall x_1 \in H_1$$

Soit x_1 un élément de H_1 et $x_{1,F}$ la projection de x_1 sur F.

Soit $x_{2,F}$ réalisant le minimum de $\phi_\epsilon(x_{1,F} + .)$ sur F_2, d'après (10) et la définition de $u_{1,F}$:

(14) $$\phi_\epsilon(x_{1,F}+x_{2,F}) \leqslant \phi_\epsilon(u_{1,F}+u_{2,F}) \leqslant C$$

comme $(Ax_{1,F},x_{1,F}) \geqslant (Ax_1,x_1)$ et comme $|x_{1,F}| \leqslant |x_1|$, $x_{2,F}$ est borné ; $x_{2,F} \longrightarrow x_2$ (quitte à extraire un nouvel ultrafiltre). La restriction de A à $\overline{H}_2$ dans $\overline{H}_2$ est autoadjointe et positive ; on note $A_2^{1/2}$ sa racine carrée. En passant à la limite dans (14) il vient :

$$\frac{\epsilon}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) + \frac{1}{2}(A_2^{1/2}x_2, A_2^{1/2}x_2) + \frac{1}{2}(Ax_1,x_1) + \varphi(x_1+x_2) - (f,x_1+x_2) \leqslant \phi_\epsilon(u_1+u_2)$$

Il ne reste plus qu'à approcher x_2 par des éléments $x_{2,n}$ de H_2 tels que $x_{2,n} \to x_2$ et $(Ax_{2,n},x_{2,n}) \to (A_2^{1/2}x_2, A_2^{1/2}x_2)$; on obtient (13).

Etape 3. On va maintenant faire tendre ϵ vers zéro. Pour marquer la dépendance en ϵ de u_1, u_1 sera noté $u_{1\epsilon}$; de même u_2 sera noté $u_{2\epsilon}$; d'après (12) $u_{1\epsilon}$, $\phi_\epsilon(u_{1\epsilon})$, $\phi_\epsilon(u_{1\epsilon}+u_{2\epsilon})$ sont bornés. De plus :

(15) $$b_2 \leqslant \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}+u_{2\epsilon}) = \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}) + \frac{\epsilon}{2}|u_{2\epsilon}|^2 + \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon},u_{2\epsilon}) + \varphi(u_{1\epsilon}+u_{2\epsilon}) - \varphi(u_{1\epsilon}) - (f,u_{2\epsilon})$$

Comme $f \in \epsilon u_\epsilon + Au_\epsilon + Bu_\epsilon$ (avec $u_\epsilon = u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}$)

$$\varphi(u_{1\epsilon}) - \varphi(u_{1\epsilon}+u_{2\epsilon}) \geqslant (f-\epsilon u_\epsilon - Au_\epsilon, -u_{2\epsilon})$$

En utilisant en plus (15), on déduit que : $b_2 + \frac{\epsilon}{2}|u_{2\epsilon}|^2 + \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon},u_{2\epsilon}) \leqslant \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}) \leqslant c$ donc $\epsilon|u_{2\epsilon}|$ est borné d'où $\epsilon u_{2\epsilon} \to 0$ et par suite

$$f \in \overline{R(A+B)}$$

Etape 4. On suppose maintenant que $f \in \operatorname{Int}[R(A) + \operatorname{conv} R(B)]$.

Donc $\exists \tau > 0$ tel que si $|h| \leqslant \tau$ $\exists v_h \in H$ $\exists (w_{i,h})$ $1 \leqslant i \leqslant n_h$

$$\exists (t_{i,h})_{1 \leqslant i \leqslant n_h} \ \exists (w^*_{i,h})_{1 \leqslant i \leqslant n_h} \quad \text{avec}$$

1) $f+h = Av_h + \sum_{i=1}^{n_h} t_i\, w^*_{i,h}$

2) $\sum_i t_{i,h} = 1$ et $t_{i,h} \geq 0$

3) $w^*_{i,h} \in B\, w_{i,h}$

Donc : $$\varphi(u_\epsilon) - \varphi(w_{i,h}) \geq (w^*_{i,h}, u_\epsilon - w_{i,h})$$

On multiplie par $t_{i,h}$ et on somme :

$$\varphi(u_\epsilon) - \sum_i t_{i,h}\, \varphi(w_{i,h}) \geq (f+h-Av_h, u_\epsilon) - \sum_i t_{i,h}(w^*_{i,h}, w_{i,h}) \tag{16}$$

Soit $v_{2,h}$ [resp $v_{1,h}$] la projection de v_h sur H_2 (resp H_1)

$$\frac{1}{2}(Au_{2\epsilon}, u_{2\epsilon}) - \frac{1}{2}(Av_{2,h}, v_{2,h}) \geq (Av_{2,h}, u_{2\epsilon} - v_{2,h}) \tag{17}$$

en ajoutant (16) et (17) et en utilisant le fait que $u_{1\epsilon}$ est borné (voir étape 3) il vient :

$$\exists\, C_h / C_h + \varphi(u_\epsilon) + \frac{1}{2}(Au_{2\epsilon}, u_{2\epsilon}) - (f, u_\epsilon) \geq (h, u_\epsilon)$$

d'où

$$C_h + \phi_\epsilon(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon}) - \frac{1}{2}(Au_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) \geq (h, u_\epsilon) \tag{18}$$

mais $\phi_\epsilon(u_{1\epsilon} + u_{2\epsilon})$ est borné d'après (12) et de plus

$$b_2 \leq \phi_\epsilon(u_{1\epsilon}) \leq \frac{1}{2}(Au_{1\epsilon}, u_{1\epsilon}) + \frac{\epsilon}{2}|u_{1\epsilon}|^2 + \varphi(u_{1\epsilon}) - (f, u_{1\epsilon})$$

donc $\frac{1}{2}(Au_{1\epsilon}, u_{1\epsilon})$ est borné inférieurement ; on utilise alors (18) pour voir qu'il existe C'_h tel que $\forall\, \epsilon > 0 \quad (h, u_\epsilon) \leq C'_h$; donc u_ϵ est borné mais $-\epsilon u_\epsilon - Au_\epsilon + f \in Bu_\epsilon$ donc $\epsilon u_\epsilon + Au_\epsilon$ est borné, mais $\epsilon u_\epsilon \to 0$ donc Au_ϵ est borné.

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers zéro telle que

$$Au_{\epsilon_n} \longrightarrow v$$
$$u_{\epsilon_n} \longrightarrow u$$

on a $v = Au$; montrons que $f \in Au + Bu$.

$$\forall\, x \in H,\ \varphi(x) - \varphi(u_{\epsilon_n}) \geq (f - Au_{\epsilon_n} - \epsilon_n u_{\epsilon_n}, x - u_{\epsilon_n})$$

Comme à l'étape 2, $(Au_{\epsilon_n}, u_{\epsilon_n}) \to (Au, u)$ donc

$$\forall\, x \in H,\ \varphi(x) - \overline{\lim}\, \varphi(u_{\epsilon_n}) \geq (f - Au, x - u) \tag{19}$$

mais $\underline{\lim}\ \varphi(u_{\epsilon_n}) \geq \varphi(u)$ d'où

$$\forall\, x \in H \quad \varphi(x) - \varphi(u) \geq (f-Au, x-u)$$

ce qui montre que $f \in Au + Bu$.

De plus en prenant $x = u$ dans (19), on voit que $\varphi(u) \geq \overline{\lim}\ \varphi(u_{\epsilon_n})$ et donc $\varphi(u_{\epsilon_n}) \to \varphi(u)$; comme $\epsilon_n |u_{\epsilon_n}|^2 \to 0$ et $(Au_{\epsilon_n}, u_{\epsilon_n}) \to (Au,u)$, on voit que $\phi_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n}) \to \phi(u)$.

Soit $x_1 \in H_1$ d'après (13) comme $\phi \leq \phi_\epsilon$ on a :

$$\operatorname*{Inf}_{x_2 \in H_2} \phi(x_1+x_2) \leq \phi_{\epsilon_n}(u_{\epsilon_n})$$

et donc $(n \to +\infty)$ $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{x_2 \in H_2} \phi(x_1+x_2) \leq \phi(u) \quad \forall\, x_1 \in H_1$

et on a donc bien :

$$\phi(u_1+u_2) = \operatorname*{Max}_{x_1 \in H_1}\ \operatorname*{Inf}_{x_2 \in H_2} \phi(x_1+x_2).$$

De plus, comme $f \in A(u_1+u_2) + B(u_1+u_2)$, on a

$$\phi(u_1+u_2) = \operatorname*{Min}_{x_2 \in H_2} \phi(u_1+x_2).$$

Reste à vérifier (iii) :

Soit $y \in D(A)$ $y = y_1+y_2$ où $y_1 \in H_1$ et $y_2 \in H_2$. Soit $\epsilon > 0$.

Comme $\phi(u) = \displaystyle\operatorname*{Max}_{x_1 \in H_1}\ \operatorname*{Inf}_{x_2 \in H_2} \phi(x_1+x_2)$ il existe un élément $\overline{y}_2$ de H_2 tel que si $\overline{y} = y_1 + \overline{y}_2$:

$$-(f,\overline{y}) + \varphi(\overline{y}) + \frac{1}{2}(A\overline{y},\overline{y}) \leq \varphi(u) + \frac{1}{2}(Au,u) - (f,u) + \epsilon$$

et comme $\varphi^*(f-Ay) \geq (f-Ay,y) - \varphi(y)$ on a :

$$\varphi^*(f-Ay) \geq \frac{1}{2}(Ay,y) - \varphi(u) - \frac{1}{2}(Au,u) + (f,u) - \epsilon \ - (Ay,y).$$

Mais comme $f \in Au + Bu$, $\varphi^*(f-Au) + \varphi(u) = (u,f-Au)$

d'où

$$\varphi^*(f-Ay) + \frac{1}{2}(Ay,y) \geq \varphi^*(f-Au) + \frac{1}{2}(Au,u) + \frac{1}{2}(A(y-\overline{y}),y-\overline{y}) - \epsilon$$

$$= \varphi^*(f-Au) + \frac{1}{2}(Au,u) + \frac{1}{2}(A(y_2-y_2),y_2-y_2) - \epsilon$$

$$\geq \varphi^*(f-Au) + \frac{1}{2}(Au,u) - \epsilon \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

ce qui finit la démonstration du Théorème 1.

Remarques.

1) Si $\overline{\lim_{|u|\to\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} = \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{4}$, on a en plus des propriétés de bornitude des solutions de $Au + Bu = f$. En particulier les projections de ces solutions sur $R(A)$ sont bornées. En outre on peut se passer de l'hypothèse A autoadjoint en la remplaçant par $(Au,u) \geqslant -\dfrac{1}{|\lambda_{-1}|}|Au|^2$ (λ_{-1} n'étant plus nécessairement une valeur propre avec $R(A) = N(A)^{\perp}$ et A^{-1} compact). Pour les démonstrations de ces propriétés et d'autres compléments sur ces questions, voir [5] et [7].

2) Par contre, si on a seulement $\overline{\lim_{|u|\to\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$, les projections sur $R(A)$ des solutions de $f = Au + Bu$ ne sont plus nécessairement bornées (voir [3]).

3) On peut démontrer le Théorème 1 (excepté (ii)) en étudiant le problème de la minimisation de $\varphi^*(f-Ax) + \dfrac{1}{2}(Ax,x)$ sur $D(A)$ (à la place du problème $\underset{x_1\in H_1}{\text{Max}}\ \underset{x_2\in H_2}{\text{Inf}}\ \phi(x_1+x_2)$). On est là aussi amené à remplacer φ par φ_ϵ avec $\varphi_\epsilon(x) = \varphi(x) + \dfrac{\epsilon}{2}|x|^2$.

4) La méthode que nous employons à l'étape 1 est voisine de la méthode de Min Max employée par Castro et Lazer [8] ou celle de Berger et Schechter [4] ou encore celle de Amann [1].

5) La démonstration ci-dessus est à peu près celle de [3]. La seule modification importante est dans l'étape 1 où on montre l'existence de u_F sans utiliser le Théorème de Rabinowitz, avec une méthode de Max-Min qui donne des renseignements supplémentaires sur u.

II - EXISTENCE DE SOLUTION NON TRIVIALE DE L'EQUATION $0 \in Au + Bu$

Les hypothèses sur A et B sont celles de l'introduction ; on suppose que $\varphi(0) = 0$ et que $|\lambda_{-1}| < +\infty$

1)

THEOREME 2. *Si* *1)* $\overline{\lim_{|u|\to\infty}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} < \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$ (20)

2) $\underline{\lim_{|u|\to 0}} \dfrac{\varphi(u)}{|u|^2} > \dfrac{|\lambda_{-1}|}{2}$ (21)

alors il existe un u *non nul tel que* $0 \in Au + Bu$.

a) Remarque préliminaire.

Avant de donner une démonstration du Théorème 2, remarquons que (21) implique que $0 \in B0$ (et donc $0 \in A0 + B0$). En effet d'après (21), $\exists\ \eta > 0$ tel que $|x| \leqslant \eta \Rightarrow \varphi(x) \geqslant 0 = \varphi(0)$.

Soit $I\eta$ la fonction indicatrice de la boule fermée de centre 0 et de rayon η, d'après l'implication précédente $0 \in \partial(\varphi + I\eta)(0)$ mais $D(\varphi) \cap \operatorname{Int} D(I\eta) \neq \emptyset$, donc $\partial(\varphi + I\eta) = \partial\varphi + \partial I\eta$ et comme $\partial I\eta\,(0) = 0$, on a bien $0 \in B0$.

b) Démonstration du Théorème 2.

D'après (21), $\exists\, \eta > 0$, $\exists\, \theta > |\lambda_{-1}|$ tels que

$$|u| \leqslant \eta \;\Rightarrow\; \varphi(u) \geqslant \frac{\theta}{2}|u|^2$$

Montrons que
$$|u^*| \leqslant \frac{\theta\eta}{2} \;\Rightarrow\; \varphi^*(u^*) \leqslant \frac{|u^*|^2}{2\theta}$$

si $|u| \geqslant \eta$ on a $\dfrac{\theta\eta^2}{2} \leqslant \varphi\left(\dfrac{\eta}{|u|}u\right) = \varphi\left(\left(1-\dfrac{\eta}{|u|}\right)0 + \dfrac{\eta}{|u|}u\right) \leqslant \eta\,\dfrac{\varphi(u)}{|u|}$

soit
$$\varphi(u) \geqslant \frac{\theta\eta}{2}|u|$$

Il est alors facile de voir que $\varphi \geqslant \psi$ où ψ est la fonction convexe continue définie par :

$$|u| \leqslant \frac{\eta}{2} \Rightarrow \psi(u) = \frac{\theta}{2}|u|^2$$
$$|u| \geqslant \frac{\eta}{2} \Rightarrow \psi(u) = \frac{\theta\eta}{2}|u| - \frac{\theta}{8}\eta^2$$

On a
$$\varphi^* \leqslant \psi^*$$

Or $|u^*| \leqslant \dfrac{\theta\eta}{2} \Rightarrow \psi^*(u^*) = \dfrac{|u^*|^2}{2\theta}$ et donc

(22)
$$|u^*| \leqslant \frac{\theta\eta}{2} \;\Rightarrow\; \varphi^*(u^*) \leqslant \frac{|u^*|^2}{2\theta}$$

0 est donc intérieur au domaine de φ^* d'où $0 \in \operatorname{int} R(\partial\varphi)$ et par suite $0 \in \operatorname{int}[R(A) + R(B)]$. On peut appliquer le Théorème 1 :

$\exists$ u tel que α) $0 \in Au + Bu$

$$\beta)\ \phi(u) = \max_{x_1 \in H_1}\ \inf_{x_2 \in H_2}\ \phi(x_1 + x_2)$$

on va montrer que $\phi(u) > 0$, ce qui prouvera que $u \neq 0$ et terminera donc la démonstration ; soit a_1 un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(A - \lambda_{-1} I)$ tel que $|a_1| \leqslant \dfrac{\theta\eta}{2|\lambda_{-1}|}$; d'après (22) on a :

$$\varphi^*(|\lambda_{-1}|a_1) \leqslant |\lambda_{-1}|^2\,\frac{|a_1|^2}{2\theta}$$

donc

$$\forall x_2 \in H_2 \quad \varphi(x_2+a_1) \geqslant |\lambda_{-1}|\,|a_1|^2 - |\lambda_{-1}|^2 \frac{|a_1|^2}{2\theta} \tag{23}$$

mais

$$\phi(u) \geqslant \inf_{x_2 \in H_2} \phi(a_1+x_2) \geqslant \inf_{x_2 \in H_2} \varphi(x_2+a_1) - \frac{|\lambda_{-1}|}{2}|a_1|^2$$

d'où avec (23)

$$\phi(u) \geqslant \frac{1}{2}|\lambda_{-1}|\,.\,|a_1|^2\left(1 - \frac{|\lambda_{-1}|}{\theta}\right) > 0.$$

2)

On se restreint maintenant au cas où $H = L^2(\Omega)^p$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^\ell$ et où il existe une fonction convexe continue j de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(u) = \int_\Omega j(u(x))dx$.

THEOREME 3. *On suppose que*

$$\exists\, k < |\lambda_{-1}|,\ \exists\, a \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^p \quad j(x) \leqslant \frac{k}{2}|x|^2 + a \tag{24}$$

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{j(x)}{|x|^2} > \frac{|\lambda_{-1}|}{2} \tag{25}$$

$$\dim N(A) < +\infty \tag{26}$$

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda_{-1} I) \cap [L^\infty(\Omega)]^p \neq \{0\}. \tag{27}$$

Alors il existe une fonction u *de* H *non nulle telle que*

$$0 \in Au + Bu \tag{28}$$

$$\phi(u) = \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1+x_2) > 0 \tag{29}$$

$$\varphi(u) \leqslant \frac{|\lambda_{-1}|\, a\, m(\Omega)}{|\lambda_{-1}| - k} \quad \text{où } m(\Omega) \text{ est la mesure de } \Omega. \tag{30}$$

Démonstration du Théorème 3. D'après (25), $\exists\, \eta > 0$, $\exists\, \theta > |\lambda_{-1}|$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| \leqslant \eta \Rightarrow j(x) \geqslant \frac{\theta}{2}|x|^2$$

Soit $$k : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$$

$$|x| \leqslant \frac{\eta}{2} \rightarrow k(x) = \frac{\theta}{2}|x|^2$$

$$|x| \geqslant \frac{\eta}{2} \rightarrow k(x) = \frac{\theta\eta}{2}|x| - \frac{\theta\eta^2}{8}$$

k est convexe ; soit $\psi : H \rightarrow R$

$$u \rightarrow \int_\Omega k\,[u(\alpha)]d\alpha$$

ψ est convexe continue et on a $\varphi \geqslant \psi$.

Montrons que $0 \in \mathrm{Int}\,[R(A) + \mathrm{conv}\, R(B)]$. On sait (voir [5] p. 265) qu'il suffit de vérifier que

$\forall\, u \in N(A) - \{0\} \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\varphi(tu)}{t} > 0.$

Or $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{k(tu(\alpha))}{t} = \dfrac{\theta\eta}{2}|u(\alpha)|$, donc :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(tu)}{t} \geqslant \int_\Omega \frac{\theta\eta}{2}|u(\alpha)|\,d\alpha > 0$$

on peut appliquer le Théorème 1 : $\exists\, u \in H$ tel que :

$$0 \in Au + Bu$$

$$\phi(u) \geqslant \max_{x_1 \in H_1} \inf_{x_2 \in H_2} \phi(x_1 + x_2)$$

on va montrer que $\phi(u) > 0$ (ce qui assurera que $u \neq 0$).

D'après (27) $\exists\, a_1 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_{-1} I)$ tel que $\|a_1\|_\infty < \dfrac{\eta}{2}$ avec $a_1 \neq 0$; $\partial\psi(a_1) = \theta a_1$ donc

$$\forall\, x_2 \in H_2 \qquad \psi(a_1 + x_2) \geqslant \psi(a_1) + (\theta a_1, x_2) = \psi(a_1) = \frac{\theta}{2}|a_1|^2$$

mais $\varphi \geqslant \psi$ donc $\varphi(a_1 + x_2) \geqslant \dfrac{\theta}{2}|a_1|^2$ et par suite

$$\inf_{x_2 \in H_2} \phi(a_1 + x_2) > 0$$

et donc

$$0 < \phi(u)$$

Reste à montrer (30)

$$0 < \phi(u_1 + u_2) \leqslant \phi(u_1) \leqslant \frac{k}{2}|u_1|^2 + am(\Omega) - \frac{|\lambda_{-1}|}{2}|u_1|^2$$

donc

(31) $$|u_1|^2 \leqslant \frac{2am(\Omega)}{|\lambda_{-1}| - k}$$

on a $\phi(u_1+u_2) \geqslant \varphi(u_1+u_2) + \frac{1}{2}(Au_1,u_1)$

où $\phi(u_1+u_2) \leqslant \phi(u_1) = \varphi(u_1) + \frac{1}{2}(Au_1,u_1)$

donc $\varphi(u_1+u_2) \leqslant \varphi(u_1) \leqslant \frac{k}{2} |u_1|^2 + am(\Omega)$

On utilise alors (31) et on obtient (30).

3)
Application.

a) Equation de Laplace.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^\ell$ de frontière régulière. On note $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots$ la suite croissante des valeurs propres distinctes de l'opérateur $-\Delta$ relatives aux conditions aux limites $u = 0$ sur $\partial\,\Omega$. Soit j, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application convexe telle que $j(0) = 0$. On a alors la proposition suivante, où $\beta = \partial j$.

PROPOSITION 1. *Si* $\overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} \frac{j(x)}{x^2} < \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}$ *et* $\underline{\lim\limits_{x \to 0}} \frac{j(x)}{x^2} > \frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{2}$
alors il existe une fonction u *de* $H^2(\Omega)$ *telle que*

i) $u \neq 0$

ii) $-\Delta u - \lambda_{k+1} u + \beta(u) \ni 0$

iii) $u = 0$ *sur* $\partial\,\Omega$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 3 à :

a) $H = L^2(\Omega)$
b) $Au = -\Delta u - \lambda_{k+1} u$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Remarque. La Proposition 1 est à rapprocher de certains résultats de [1].

b) Mécanique hamiltonienne.

Soit $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\mathcal{H}(0,0) = 0$ on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2. *Si (i)* $\exists\ k < \frac{2\pi}{T}$ *tel que* $\exists$ a *avec*

$$\mathcal{H}(x,p) \leqslant \frac{k}{2}(|x|^2 + |p|^2) + a \quad \forall (x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$\textit{(ii)} \quad \lim_{|x|^2+|p|^2 \to 0} \frac{\mathcal{H}(x,p)}{|x|^2+|p|^2} > \frac{\pi}{T}$$

alors il existe une fonction (x,p) *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *absolument continue de période minimale* T *et une constante* $h > 0$ *telles que*

(32) $\quad (-\dot{p}(t), \dot{x}(t)) \in \partial \mathcal{H}\,(x(t),p(t))$ *presque partout*

(33) $\quad \mathcal{H}(x(t),p(t)) = h \qquad \forall\, t \in R$

(34) $$h \leqslant \frac{2a\pi}{2\pi - kT}\,.$$

Démonstration. On applique le Théorème 3 avec

- pour espace de Hilbert $(L^2([0,T]))^{2n}$
- pour fonction j, $\mathcal{H}$
- pour opérateur A : $D(A) = \{(x,p),\ (x,p,\dot{x},\dot{p}) \in L^2(0,T),\ x(0) = x(T) \text{ et } p(0) = p(T)\}$

$$A(x,p) = (\dot{p}, -\dot{x})$$

on vérifie facilement que A est autoadjoint, d'image fermée et que $A^{-1} : R(A) \to R(A)$ est compact (et même de Hilbert Schmidt). Précisons les vecteurs propres et les valeurs propres de A. Soit $(e_p)_{1 \leqslant p \leqslant n}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $a_{m,p}$ la fonction $[0,T] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$t \to (\cos \frac{2\pi mt}{T} e_p\,,\ \sin \frac{2\pi mt}{T} e_p)$$

On note $b_{m,p}$ la fonction : $[0,T] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$t \to (\sin(\frac{2\pi}{T} mt)e_p,\ -\cos(\frac{2\pi}{T} mt)e_p)$$

Il est facile de voir que les valeurs propres de A sont les réels $\frac{2\pi m}{T}$ avec $m \in Z$ et que $\mathrm{Ker}(A - \frac{2\pi m}{T} I)$ admet comme base $\{a_{m,p}\ \ 1 \leqslant p \leqslant n\} \cup \{b_{m,p}\ \ 1 \leqslant p \leqslant n\}$.
La première valeur propre négative de A est $-\frac{2\pi}{T}$.

On applique le Théorème 3. Il existe donc une fonction (x,p) de R dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ absolument continue telle que :

(x,p) admet T pour période

(35) $\quad (-\dot{p}(t),\dot{x}(t)) \in \partial \mathcal{H}(x(t),p(t))$ presque partout (et donc $\exists\, h \,/\, \forall\, t\ \mathcal{H}\,(x(t),p(t)) = h$) avec de plus les propriétés (29) et (30). On note (x_1,p_1) (resp. (x_2,p_2)) la projection de (x,p) sur H_1 (resp. H_2). Montrons que T est la période minimale de (x,p). Supposons que (x,p) admette $\frac{T}{k}$ comme période où k est un entier strictement supérieur à 1. Les expressions des vecteurs de H_1 et de H_2 en fonction des $a_{m,p}$ et $b_{m,p}$ montrent que (x_1,p_1) admet aussi $\frac{T}{k}$ comme période.

On pose

$$y_1(t) = k\, x_1\left(\frac{t}{k}\right)$$
$$q_1(t) = k\, p_1\left(\frac{t}{k}\right).$$

Il est facile de voir que (y_1,q_1) appartient à H_1.

On doit donc avoir

$$\inf_{y_2 q_2 \in H_2} \phi(y_1+y_2,q_1+q_2) \leqslant \phi(x,p)\,; \tag{36}$$

soit (y_2,q_2) un élément de H_2 on pose

$$\overline{x}_2(t) = \frac{1}{k}\, y_2(kt)$$
$$\overline{p}_2(t) = \frac{1}{k}\, q_2(kt)$$

(après avoir prolongé y_2 et q_2 par périodicité à R tout entier) $(\overline{x}_2,\overline{q}_2) \in H_2$; on a

$$\phi(y_1+y_2,q_1+q_2) = \frac{1}{2}\int_0^T (\dot{q}_1+\dot{q}_2)(y_1+y_2) - (q_1+q_2)(\dot{y}_1+\dot{y}_2))dt + \int_0^T \varphi(y_1+y_2,q_1+q_2)dt$$

on fait le changement de variable $\tau = t/k$

$$\phi(y_1+y_2,q_1+q_2) = \frac{1}{2}\int_0^{T/k} k^2 \;(\dot{p}_1+\dot{\overline{p}}_2)(x_1+\overline{x}_2)-(p_1+\overline{p}_2)(\dot{x}_1+\dot{\overline{x}}_2)\;\; d\tau \;+ k\int_0^{T/k} \varphi(k(x_1+\overline{x}_2),k(p_1+\overline{p}_2))d\tau$$

Mais $\varphi(k\alpha,k\beta) \geqslant k\,\varphi(\alpha,\beta)$ $\forall$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En utilisant de plus le fait que p_1, p_2, x_1, x_2 admettent T/k comme période il vient :

$$\phi(y_1+y_2,q_1+q_2) \geqslant k\;\phi(x_1+\overline{x}_2,q_1+\overline{q}_2).$$

En utilisant (35) on obtient $\phi(x_1+\overline{x}_2,q_1+\overline{q}_2) \geqslant \phi(x_1+x_2,q_1+q_2)$.
D'où

$$\phi(y_1+y_2,q_1+q_2) \geqslant k\phi(x_1+x_2,q_1+q_2).$$

Mais d'après (29) $\quad \phi(x_1+x_2,q_1+q_2) > 0 \quad$ donc

$$\phi(y_1+y_2,q_1+q_2) > \phi(x_1+x_2,q_1+q_2) \quad \forall\ (y_2,q_2) \in H_2$$

en contradiction avec (36).

Reste à vérifier l'inégalité (34) ; elle résulte immédiatement de l'inégalité (30) car $\lambda_{-1} = -\frac{2\pi}{T}$ et $\mathcal{H}(x(t),p(t)) = h$.

Remarques. La proposition 2 est due à F.M. Clarke et I. Ekeland [10]. Leur méthode consiste à minimiser un problème dual. C'est la comparaison entre leur méthode et la mienne qui m'a suggéré le (iii) du Théorème 1.
H. Amann étudie aussi dans [1] l'existence de solutions non triviales de période T mais en se passant de l'hypothèse $\mathcal{H}$ convexe ($\mathcal{H}$ étant alors de classe C^2). Toutefois, contrairement au convexe on ne sait pas s'il en existe une admettant T comme période minimale. P.H. Rabinowitz établit dans [14] et dans [15] l'existence d'une solution periodique non triviale avec des hypothèses de croissance différente puisque ces hypothèses impliquent en particulier que $\mathcal{H}(x,p)/x^2+p^2 \to 0$ quand $x^2 + p^2 \to 0$ et $\to \infty$ quand $x^2 + p^2 \to \infty$. Là aussi $\mathcal{H}$ n'est pas supposée convexe mais de classe C^1 et on ne sait pas si T est la période minimale. I. Ekeland étudie dans [11] le même problème dans le cas où $\mathcal{H}$ est convexe continue ; il obtient alors une estimation a priori de l'énergie.

c) Equation des ondes.

Soit j une fonction convexe de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $j(0) = 0$; on pose $\beta = j'$ et on suppose que $j'(0) = 0$ (ce qui sera d'ailleurs impliqué par les autres hypothèses sur j). On cherche à prouver l'existence d'une solution non triviale à l'équation :

$$(37)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(u) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ \ \forall t \\ u \text{ est } 2\pi \text{ périodique en t} \end{gathered}$$

PROPOSITION 3. *Si* $\overline{\lim}_{|u| \to +\infty} \dfrac{j(u)}{|u|^2} < \dfrac{3}{2}$ *et si* $\underline{\lim}_{|u| \to 0} \dfrac{j(u)}{|u|^2} > \dfrac{3}{2}$ *alors il existe une solution non nulle à (37).*

Démonstration. Soit $H = L^2((0,\pi) \times (0,2\pi))$; soit $\mathcal{A}$ l'opérateur

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in C^2([0,\pi]) \times [0,2\pi]) \,/\, u(0,.) = u(\pi,.) = 0,\ u_t(.,0) = u_t(.,2\pi)\}$$

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On pose $A = \mathcal{A}^*$; on sait que A est autoadjoint d'image fermée et que A^{-1} est compact. De plus si

$$u = \sum_{\substack{j > 0 \\ m \geqslant 0}} a_{j,m} \sin jx \cos mt + \sum_{\substack{j > 0 \\ m > 0}} b_{j,m} \sin jx \sin mt$$

alors u appartient à D(A) si et seulement si

$$\sum_{\substack{j > 0 \\ m \geqslant 0}} (j^2-m^2)a_{j,m}^2 + \sum_{\substack{j > 0 \\ m \geqslant 0}} (j^2-m^2)b_{j,m}^2 < +\infty$$

et dans ce cas :

$$Au = \sum_{\substack{j>0\\ m\geqslant 0}} (j^2-m^2)a_{j,m} \sin jx \cos mt + \sum_{\substack{j>0\\ m\geqslant 0}} (j^2-m^2)b_{j,m} \sin jx \sin mt$$

Les valeurs propres de A sont donc les j^2-m^2 avec $j > 0$, $m \geqslant 0$; donc $\lambda_{-1} = 1-4 = -3$ et Ker $(A+3I)$ est engendré par les fonctions de classe C^∞ sin x cos 2t, sin x sin 2t. Remarquons qu'il n'est pas possible d'appliquer le Théorème 3 car la dimension de N(A) est infinie ; il est d'ailleurs facile de voir que, en général,
$0 \not\in \text{int } [R(A) + \text{conv } R(B)]$ où $Bu = \beta u$. Reprenons les notations de la démonstration du Théorème 1 avec $f = 0$; A. Bahri et H. Brézis ont montré dans [2] que la suite u était bornée dans $L^2[(0,\pi) \times (0,2\pi)]$ car elle vérifie $0 = \epsilon u_\epsilon + Au_\epsilon + Bu_\epsilon$ et que $0 \in \text{int } R(\beta)$. Comme dans l'étape 4 de la démonstration du Théorème 1 on conclut à l'existence d'une fonction u de $L^2((0,\pi) \times (0,2\pi))$ telle que

α) $Au + Bu = 0$

β) $\phi(u) = \underset{x_1 \in H_1}{\text{Max}} \ \underset{x_2 \in H_2}{\text{Inf}} \ \phi(x_1+x_2)$.

Mais comme dans la démonstration du Théorème 3 on montre que :

$$\underset{x_1 \in H_1}{\text{Max}} \ \underset{x_2 \in H_2}{\text{Inf}} \ \phi(x_1+x_2) > 0$$

et donc $u \neq 0$. Ce qui termine la démonstration de la Proposition 3.

Remarques.

1. Si $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2$ il est montré dans [2] que u_1 est continue et u_2 dans $L^\infty((0,\pi) \times (0,2\pi))$.

2. De nombreux auteurs ont déjà étudié le problème de l'existence de solutions non triviales de (37). Citons en particulier H. Brézis et Nirenberg dans [6] , H. Amann dans [1] et P.H. Rabinowitz dans [14] avec des hypothèses voisines sauf dans [14] : P.H. Rabinowitz fait des hypothèses de croissance inverses sur β en 0 et à l'infini : $\beta(x) = o(|x|)$ en 0, et à l'infini $\exists\ \bar{x} > 0 \quad \exists\ \theta \in]\theta, \frac{1}{2}[$ tels que
$|x| > \bar{x} \Rightarrow f(x) = \int_0^x \beta(s)ds \leqslant \theta x f(x)$; β étant de plus strictement croissante et de classe C^2, P.H. Rabinowitz montre alors l'existence d'une solution non triviale.

REFERENCES

[1] H. AMANN. *«Saddle points and multiple solutions of differential equations»*. à paraître.

[2] A. BAHRI, H. BREZIS. *«Periodic solutions of a nonlinear wave equation»*. à paraître.

[3] A. BAHRI et J.L. MOREL. *«Image de la somme de deux opérateurs»*. C.R. Acad. Sc. Paris 287 (1978) p. 719-722.

[4] M.S. BERGER et M. SCHECHTER. *«On the solvability of semilinear gradient operator equations»*. Advances in Math. 25 (1977), pp. 97-132.

[5] H. BREZIS et L. NIRENBERG. *«Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems»*. Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa, serie IV, V, (1978) pp. 225-326.

[6] H. BREZIS et L. NIRENBERG. *«Forced vibrations for a nonlinear wave equation»*. Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) pp. 1-30.

[7] H. BREZIS et L. NIRENBERG. *«Image d'une somme d'opérateurs non linéaires et applications»* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284 (1977) pp. 1365-1368.

[8] A. CASTRO et A.C. LAZER. *«Applications of a Max Min principle»*. Rev. Colombiana de Mat., 10 (1976) pp. 141-149.

[9] F.H. CLARKE. *«Periodic solutions to Hamiltonian inclusions»*. à paraître.

[10] F.H. CLARKE et I. EKELAND. *«Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period»*. Comm. Pure Appl. Math.

[11] I. EKELAND. *«Periodic solutions of Hamilton's equations and a theorem of P. Rabinowitz»*. J. Diff. Eq.

[12] A. LAZER, E. LANDESMAN et D. MEYERS. *«On saddle point problems in the calculus of variations, the Ritz algorithm, and monotone convergence»*. J. Math. Anal. Appl. 53 (1975) pp. 594-614.

[13] P.H. RABINOWITZ. *«A variational method for finding periodic solutions of differential equations»*. MRC Report 1854 (May 1978).

[14] P.H. RABINOWITZ. *«Free vibrations for a semi linear wave equation»*. Comm. Pure. Appl. Math., 31 (1978) pp. 31-68.

[15] P.H. RABINOWITZ. *«Periodic solutions of Hamiltonian systems»*. Comm. Pure. Appl. Math., 31 (1978) pp. 157-184.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1979)