ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HÉDY ATTOUCH
COLETTE PICARD

Problèmes variationnels et théorie du potentiel non linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 1, nº 2 (1979), p. 89-136
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_2_89_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol I, 1979, P. 89 à 136

PROBLEMES VARIATIONNELS ET THEORIE DU POTENTIEL NON LINEAIRE

Hédy Attouch *(1)* **et Colette Picard** *(2)*

(1) Université de Paris-Sud, Laboratoire Mathématiques Bt 425 - 91405 Orsay Cédex.
(2) U.E.R. de Mathématiques, 33 rue Saint Leu - 80039 Amiens Cédex.

Résumé : On introduit les espaces de Banach-Dirichlet, généralisant les espaces de Dirichlet de Beurling-Deny. On caractérise les convexes unilatéraux et bilatéraux K de ces espaces et les solutions de problèmes variationnels, par exemple du type

$$\min \left\{ \phi(u) - (f, u) \; ; u \in K \right\}.$$

On démontre des principes de théorie du potentiel pour des sous-différentiels de fonctions convexes.

Summary : We introduce the Banach-Dirichlet spaces which generalize Dirichlet spaces of Beurling-Deny. We characterize the unilateral and bilateral convex sets K of these spaces and the solutions of variational problems, for instance of the type

$$\min \left\{ \phi(u) - (f, u) \; ; u \in K \right\}.$$

We prove some potential theoretic properties for subdifferentials of convex functions.

Une des motivations de ce travail est de bien poser des problèmes variationnels du type

$$\min_{u \geqslant g} \quad (\phi(u) - (f, u))$$

où g est une application de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ non nécessairement régulière et où ϕ est une fonctionnelle convexe (par exemple : $\phi(u) = \int j\,(x, u(x), \nabla u(x))dx$. La difficulté est de préciser la signification de la contrainte. Lorsque le sous-différentiel de ϕ est linéaire (par exemple pour $\phi(u) = \int |\nabla u|^2$) ce problème a été étudié par G. Stampacchia (cf. [24]) : $\min\limits_{u \geqslant g} \int |\nabla u|^2$ est bien posé dans H^1 si «$u \geqslant g$» signifie «$\tilde{u} \geqslant g$ quasi-partout», $\tilde{u}$ étant un représentant quasicontinu de u pour la capacité de H^1.

En général ϕ est définie sur un espace de fonctions régulières. On construit d'abord un espace de Banach X modelé sur ϕ en utilisant dans un cas très simple la théorie des espaces énergétiques de J. Audounet ([5]) et A. Fougères ([14]). Dans le but d'obtenir une représentation fonctionnelle de X, nous sommes amenés à introduire les espaces de Banach-Dirichlet généralisant la théorie des espaces de Dirichlet développée par A. Beurling et J. Deny ([7]), A. Ancona ([1]) et P. Fowler ([15]). Ainsi lorsque X est le complété d'un espace normé réticulé Y de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dense dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ vérifiant :

- la contraction module opère localement
- si (u_n) est une suite de Cauchy de Y, alors (u_n^+) est faiblement relativement compacte dans $w - X$.

alors X s'injecte continûment dans l'espace $Q_X(\Omega)$ des classes pour l'égalité quasi-partout de fonctions quasicontinues relativement à la capacité associée à la norme de X, tout représentant quasicontinu $\tilde{u}$ de $u \in X$ est intégrable par rapport à toute mesure positive d'énergie finie et X est un espace de Riesz pour l'ordre induit par l'ordre naturel de $Q_X(\Omega)$.

Les problèmes variationnels du type

$$\text{(I)} \qquad \min \left\{ \phi(u) - (f, u) \,;\, u \in K \right\}$$

où le convexe K des contraintes est unilatéral ou bilatéral sont alors bien posés dans un espace de Banach-Dirichlet réflexif.

Tout convexe unilatéral K est de la forme $K = K_g = \left\{ u \in X \,;\, \tilde{u} \geqslant g \quad \text{q.p.} \right\}$ et une solution u de l'I.V. unilatérale (I) est caractérisée par l'existence d'une mesure positive d'énergie finie $\mu \in \partial\phi(u) - f$ qui ne charge que l'ensemble de contact ; le théorème d'équilibre est alors une conséquence de ce résultat.

Lorsque K est bilatéral, alors $K = \left\{ u \in X \,;\, g \leqslant \tilde{u} \leqslant h \quad \text{q.p.} \right\}$ et à une solution u de $\min \left\{ \phi(u) ; u \in K \right\}$ est associée une mesure d'énergie finie $\mu \in \partial\phi(u)$ dont la partie positive (resp. négative) ne charge que l'ensemble de contact de u avec g (resp. h).

Enfin lorsque ϕ vérifie l'hypothèse

$$\text{(H)} \qquad \phi(u \wedge v) + \phi(u \vee v) \leqslant \phi(u) + \phi(v)$$

nous généralisons au cadre non linéaire certaines propriétés de théorie du potentiel, reprenant des idées développées par H. Brézis, G. Stampacchia, B. Calvert, N. Kenmochi, Y. Mizuta... (cf. [24], [10], [17]).

Dans le cadre abstrait d'un espace de Banach réflexif, la solution de (I) est l'inf. des sursolutions, le principe de l'enveloppe inférieure est satisfait par $\partial\phi$ ...

Dans le cadre fonctionnel d'un espace de Banach-Dirichlet réflexif, un principe de balayage est vérifié par les ϕ-potentiels. Lorsque toutes les contractions croissantes opèrent par rapport à ϕ, la masse totale de la mesure positive d'énergie finie associée à une solution de l'I.V. unilatérale (I) minimise la masse totale des mesures positives de $\partial\phi(K) - f$.

Finalement nous appliquons ces résultats à la fonctionnelle

$$\phi(u) = \int_\Omega J(x, \nabla u(x))dx + \int_\Omega j(x,u(x))dx$$

dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ où $1 < p < +\infty$.

Nous remercions Ph. Bénilan, H. Brézis, A. Damlamian, A. Fougères et M. Pierre pour leurs nombreuses suggestions et A. Ancona, J. Deny, F. Hirsch et G. Mokobodzki qui se sont intéressés à ce travail exposé au Séminaire de théorie du potentiel.

Le plan est le suivant :

1 - CONSTRUCTION DE L'ESPACE ENERGETIQUE.

2 - ESPACES DE BANACH-DIRICHLET

2.1. Représentations fonctionnelles

a) Capacités

b) Fonctions quasicontinues et topologie de la convergence en capacité locale

c) Identification de X à des espaces de fonctions quasicontinues

2.2. Structure d'espace de Riesz

2.3. Comparaison de classes de fonctions quasicontinues

2.4. Définition d'un espace de Banach-Dirichlet et notations

2.5. Mesures d'énergie finie. Notion de potentiel

3 - ETUDE DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES AVEC CONTRAINTE DU TYPE OBSTACLE

3.1. Inéquations variationnelles avec contrainte unilatérale

3.2. Inéquations variationnelles avec contrainte bilatérale

3.3. Convergences de solutions d'inéquations variationnelles unilatérales

4 - PROPRIETES DES SOLUTIONS DE (I) ET DES POTENTIELS

4.1. Propriétés des solutions de (I) dans un espace de Banach réflexif réticulé

4.2. Etude des potentiels

4.3. Minimisation de la masse totale de la mesure associée

5 - APPLICATIONS

1 - CONSTRUCTION DE L'ESPACE ENERGETIQUE

Dans ce paragraphe Y est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et ϕ une application de Y dans $\mathbb{R}^+$ convexe paire, $\phi(0) = 0$.

Nous construisons un espace de Banach associé à Y et ϕ en utilisant dans un cas très simple la théorie des espaces énergétiques développée par A. Fougères (cf. [14]) et J. Audounet (cf. [5]).

Soit $\|\,.\,\|_\phi$ la jauge de la tranche de niveau $\{\phi \leqslant 1\}$, c'est-à-dire $\|u\|_\phi = \inf\{k > 0\,;\phi(\frac{u}{k}) \leqslant 1\}$, $u \in Y$. Alors $\|\,.\,\|_\phi$ est une semi-norme sur Y et $\|u\|_\phi = 0$ si et seulement si $\phi(\lambda\, u) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

La topologie associée à $\|\,.\,\|_\phi$ reste inchangée si on prend la jauge d'une autre tranche de niveau, car les semi-normes associées à différentes tranches de niveau sont équivalentes.

LEMME 1.1. *Sur l'espace semi-normé $(Y, \|\,.\,\|_\phi)$ ϕ vérifie les propriétés de régularités suivantes :*

a) si $\|u\|_\phi < 1$, alors $\phi(u) \leqslant \|u\|_\phi$

b) si $\|u\|_\phi > 1$, alors $\phi(u) \geqslant \|u\|_\phi$

c) ϕ est continue sur $(Y, \|\,.\,\|_\phi)$

d) Quels que soient $\mu \in]0\ 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, ϕ est lipschitzienne sur $\mu\{\phi \leqslant \alpha\}$.

PROPOSITION 1.2. (cf. [5]). Soient *Y un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, ϕ une application de Y dans $\mathbb{R}^+$ convexe, paire, $\phi(0) = 0$. Alors il existe un espace de Banach X, une application linéaire ℓ de Y dans X et une application $\hat{\phi}$ de X dans $\mathbb{R}^+$ convexe, continue, paire, $\hat{\phi}(0) = 0$ tels que $\ell(Y)$ est dense dans X, $\hat{\phi}(\ell(u)) = \phi(u)$ pour tout $u \in Y$ et $\|\,.\,\|_X = \|\,.\,\|_{\hat{\phi}}$.*

SCHEMA DE LA DEMONSTRATION.

1) Séparation de $(Y, \|\,.\,\|_\phi)$. Soient $\dot{Y}$ l'espace quotient de Y par le noyau de $\|\,.\,\|_\phi$ c'est-à-dire par la relation d'équivalence :

$$u \,\mathcal{R}\, v \iff \forall\, \lambda \in R,\quad \phi(\lambda(u - v)) = 0$$

On vérifie que si $u \,\mathcal{R}\, v$ alors $\phi(u) = \phi(v)$. Notant par $\dot{u}$ la classe de u, on définit $\dot{\phi}$ par $\dot{\phi}(\dot{u}) = \phi(u)$. Alors ϕ est convexe, paire, $\dot{\phi}(0) = 0$ et pour tout $u \in Y$,

$$\|\dot{u}\|_{\dot{Y}} = \|\dot{u}\|_{\dot{\phi}} = \|u\|_\phi.$$

2) Complétion de $(\dot{Y}, \|\,.\,\|_{\dot{\phi}})$. Soit X un complété de $\dot{Y}$ muni de la norme $\|\,.\,\|_X$ prolongement par continuité de $\|\,.\,\|_{\dot{\phi}}$ et soit k l'isomorphisme isométrique de $\dot{Y}$ et du sous espace $k(\dot{Y})$ dense dans X. Identifions $\dot{Y}$ et $k(\dot{Y})$. Puisque $\dot{\phi}$ est lipschitzienne sur $\mu\{\dot{\phi} \leqslant \alpha\}$ pour tout $\mu \in]0\ 1[$ et $\alpha > 0$, $\dot{\phi}$ admet un prolongement

continu $\hat{\phi}$ sur $\bigcup\limits_{\alpha>0}\ \bigcup\limits_{\mu\in]0\ 1[}\ \overline{\mu\{\phi\leqslant\alpha\}}^{X}$. De plus $\hat{\phi}$ est définie sur X tout entier car

$$\bigcup_{\alpha>0}\ \bigcup_{\mu\in]0\ 1[}\ \overline{\mu\{\phi\leqslant\alpha\}}^{X} =]0\ 1[\ .\ \bigcup_{\alpha>0}\overline{\{\phi\leqslant\alpha\}} = \overset{o}{\overbrace{\bigcup_{\alpha>0}\ \overline{\{\phi\leqslant\alpha\}}}} = \bigcup_{\alpha>0}\overset{o}{\overline{\{\phi\leqslant\alpha\}}} \supset Y = X$$

On vérifie enfin que $\|\,.\,\|_X = \|\,.\,\|_{\hat{\phi}}$.

DEFINITION 1.3. *Etant donnés un espace vectoriel réel Y et une application ϕ de Y dans $\mathbb{R}^+$ convexe paire $\phi(0) = 0$, l'espace de Banach X séparé complété de $(Y, \|\,.\,\|_{\phi})$ sera appelé espace énergétique associé à Y et ϕ.*

Exemples. Si $Y = \mathcal{D}(\Omega)$ et $\phi(u) = \int |u|^p$ ou $\int |\nabla u|^p$ ou $\int j(u)$ avec j fonction de Young, on obtient $X = L^p(\Omega)$ ou $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou l'espace d'Orlicz L_ϕ.

2 - ESPACES DE BANACH-DIRICHLET

Ω est un espace localement compact dénombrable à l'infini, $C(\Omega)$ (resp. $C_c(\Omega)$) l'espace des fonctions continues sur Ω (resp. et à support compact dans Ω) Y un sous espace de $C(\Omega)$ muni d'une norme $\|\,.\,\|$ et tel que $Y \cap C_c(\Omega)$ soit dense dans $C_c(\Omega)$ et X l'espace de Banach complété de $(Y, \|\,.\,\|)$ dont la norme est notée encore $\|\,.\,\|$.

Dans ce paragraphe, on précise d'abord la notion de capacité utilisée et en particulier la capacité C_X intrinsèquement associée à l'espace X, puis on démontre que l'espace $Q_C(\Omega)$ des classes quasi-partout de fonctions quasicontinues sur Ω relativement à une capacité C est un espace vectoriel topologique quasi-normé complet. Lorsque Y vérifie une hypothèse du type «la contraction module opère localement», on démontre que X s'identifie à un sous espace de $Q_{C_X}(\Omega)$, cette représentation étant la plus «précise».

Si de plus Y est réticulé et si l'image par la contraction positive d'une suite de Cauchy de Y est faiblement relativement compacte dans X, les ordres induits sur X par Y et par $Q_C(\Omega)$ coïncident et X est ainsi muni d'une structure d'espace de Riesz.

Enfin, si de plus Y est dense dans $C_c(\Omega)$, on introduit des mesures d'énergie finie relativement à X et on étudie l'intégrabilité des représentants C_X-quasicontinus d'éléments de X.

2.1. REPRESENTATIONS FONCTIONNELLES

a) Capacités

La capacité qui intervient dans la théorie des espaces de Dirichlet est la capacité associée à la norme énergie. Ici, c'est la capacité associée à la norme de l'espace X qui jouera un rôle essentiel. Plus généralement nous définissons une capacité associée à une fonction et nous montrons qu'il y a identité entre les capacités fortement sous-additives et les capacités associées aux fonctions convexes vérifiant (H), l'identification étant réalisée par l'intégrale de Choquet.

Les capacités sur Ω considérées ici sont les capacités extérieures C^* associées à une capacité faible C sur Ω, c'est-à-dire que, notant $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de Ω, C est une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^+$ croissante, continue à droite, sous-additive, $C(\phi) = 0$ et pour toute partie A de Ω, C^* est définie par :

$$C^*(A) = \inf \{ C_*(G) \ ; G \text{ ouvert}, G \supset A \}$$

où $$C_*(G) = \sup \{ C(K) \ ; K \text{ compact}, K \subset G \}$$

Notons que $C^*(G) = C_*(G)$ pour tout ouvert G, $C^*(K) = C_*(K) = C(K)$ pour tout compact K et C^* est une application de $P(\Omega)$ dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ finie sur les compacts, croissante, dénombrablement sous-additive, $C(\phi) = 0$. Une capacité forte est une capacité faible fortement sous-additive. Pour toutes ces notions nous renvoyons à [8] par exemple.

Désormais nous noterons C à la place de C^*.

DEFINITION 2.1. *Quel que soit* $K \in \mathcal{K}$ *on définit* $C_X(K)$ *par*

$$C_X(K) = \inf \{ \|u\| \ ; u \in Y^+, u \geqslant 1 \text{ sur } K \}.$$

Il résultera de la proposition suivante que C_X est une capacité sur Ω.

PROPOSITION 2.2. *Etant donné un sous espace Z dense dans* $C_c(\Omega)$ *et une application* ψ *de* Z^+ *dans* $\mathbb{R}^+$ *convexe,* $\psi(0) = 0$, *on pose*

$$C_{Z,\psi}(K) = \inf \{ \psi(u) \ ; u \in Z^+, u \geqslant 1 \text{ sur } K \}, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Alors 1) $C_{Z,\psi}$ est croissante, continue à droite.

2) Si ψ est telle que pour tout u, $\hat{u} \in Z^+$ il existe $v \in Z^+$ tel que $v \geqslant u \vee \hat{u}$ et $\psi(v) \leqslant \psi(u) + \psi(\hat{u})$ alors $C_{Z,\psi}$ est sous additive.

3) L'ensemble des $C_{Z,\psi}$ où Z est un sous espace dense de $C_c(\Omega)$ et ψ une application de Z^+ dans $\mathbb{R}^+$ convexe telle que $\psi(0) = 0$ et vérifiant

$$\text{(H)} \qquad \psi(u \wedge v) + \psi(u \vee v) \leqslant \psi(u) + \psi(v), \text{ pour tout } u, v \in Z^+$$

est égal à l'ensemble des capacités fortes sur Ω.

Plus précisément,

a) si ψ vérifie (H) alors $C_{Z,\psi}$ est une capacité forte

b) réciproquement soit C une capacité forte. Posons

$$\theta(u) = \int_0^{\max u} C\{u \geqslant \alpha\}\, d\alpha \text{ , pour tout } u \in \mathcal{C}_c^+(\Omega).$$

Alors θ est une application de $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^+$ sous linéaire vérifiant (H) et $C = C_{Z,\theta}$ pour tout Z dense dans $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$.

Démonstration.

1) La croissance de $C_{Z,\psi}$ résulte de sa définition. Montrons que $C_{Z,\psi}$ est continue à droite. Soit $K \in \mathcal{K}$ et $\epsilon > 0$. Par définition de $C_{Z,\psi}$ il existe $u \in Z^+$ tel que $u \geqslant 1$ sur K et $\psi(u) \leqslant C_{Z,\psi}(K) + \epsilon$. Pour tout $0 < a < 1$ soit $G_a = \{x \in \Omega;\ u(x) > a\}$. Alors G_a est un ouvert contenant K. Puisque ψ est convexe, $\psi(\frac{u}{a}) \to \psi(u)$ quand $a \to 1$ donc il existe $0 < a_0 < 1$ tel que $\psi(\frac{u}{a_0}) \leqslant \psi(u) + \epsilon$. Pour tout compact K_1 contenu dans G_{a_0} on a

$$C_{Z,\psi}(K_1) \leqslant \psi(\frac{u}{a_0}) \leqslant \psi(u) + \epsilon \leqslant C_{Z,\psi}(K) + 2\epsilon$$

2) et 3a) Soient K_1 et $K_2 \in \mathcal{K}$. Notons $U_i = \{u \in Z^+ ;\ u \geqslant 1 \text{ sur } K_i\}$ où i = 1 ou 2. Par définition de $C_{Z,\psi}$

$$\begin{aligned} C_{Z,\psi}(K_1) + C_{Z,\psi}(K_2) &= \inf \{\psi(u_1) ; u_1 \in U_1\} + \inf \{\psi(u_2) ; u_2 \in U_2\} \\ &= \inf \{\psi(u_1) + \psi(u_2) ; u_1 \in U_1 , u_2 \in U_2\} \end{aligned}$$

Or si $u_1 \in U_1$ et $u_2 \in U_2$, on a $u_1 + u_2 \geqslant 1$ sur $K_1 \cup K_2$, $u_1 \vee u_2 \geqslant 1$ sur $K_1 \cup K_2$ et $u_1 \wedge u_2 \geqslant 1$ sur $K_1 \cap K_2$. Par hypothèse il existe $v \in Z^+$ tel que $v \geqslant u_1 \vee u_2$ et $\psi(v) \leqslant \psi(u_1) + \psi(u_2)$. Par conséquent

$$C_{Z,\psi}(K_1) + C_{Z,\psi}(K_2) \geqslant C_{Z,\psi}(K_1 \cup K_2).$$

Si ψ vérifie (H), alors

$$C_{Z,\psi}(K_1) + C_{Z,\psi}(K_2) \geqslant C_{Z,\psi}(K_1 \cup K_2) + C_{Z,\psi}(K_1 \cap K_2)$$

3b) Soit C une capacité forte sur Ω. Pour tout $u \in \mathcal{C}_c^+(\Omega)$ posons $\theta(u) = \int_0^\infty C\{u \geqslant \alpha\}\, d\alpha$. Alors θ est positivement homogène et on montre que θ vérifie (H) en appliquant la sous-additivité forte de C et en remarquant que pour u_1 et u_2 dans $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$,

$$\{u_1 \wedge u_2 \geqslant \alpha\} = \{u_1 \geqslant \alpha\} \cap \{u_2 \geqslant \alpha\}$$

et

$$\{u_1 \vee u_2 \geqslant \alpha\} = \{u_1 \geqslant \alpha\} \cup \{u_2 \geqslant \alpha\}$$

Par conséquent, d'après [11], θ est sous-linéaire sur $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$ et en particulier convexe sur $\mathcal{C}_c^+(\Omega)$.

Montrons que pour tout Z dense dans $C_c(\Omega)$ et pour tout $K \in \mathcal{K}$, $C(K) = C_{Z,\theta}(K)$. Quel que soit $u \in C_c^+(\Omega)$ tel que $u \geqslant 1$ sur K, on a

$$\theta(u) = \int_0^\infty C\{u \geqslant \alpha\} d\alpha \geqslant \int_0^1 C\{u \geqslant \alpha\} d\alpha \geqslant C(K)$$

donc $C(K) \leqslant C_{C_c^+(\Omega),\theta}(K) \leqslant C_{Z,\theta}(K)$.

Inversement, soit $\epsilon > 0$. Puisque C est continue à droite, il existe un ouvert G contenant K tel que pour tout compact K_1 tel que $K \subset K_1 \subset G$ on ait $C(K_1) \leqslant C(K) + \epsilon$. D'après le théorème d'Urysohn et la densité de Z dans $C_c(\Omega)$, il existe $u \in Z$ tel que $1 \leqslant u \leqslant 1 + \epsilon$ sur K, $u = 0$ sur $\Omega \setminus G$ et $0 \leqslant u \leqslant 1 + \epsilon$ sur Ω. Par conséquent, pour tout $\alpha \in]0\ 1[$

$$K \subset \{u \geqslant 1\} \subset \{u \geqslant \alpha\} \subset G$$

donc
$$\begin{aligned} C_{Z,\theta}(K) \leqslant \theta(u) &= \int_0^{1+\epsilon} C\{u \geqslant \alpha\} d\alpha \\ &= \int_0^1 C\{u \geqslant \alpha\} d\alpha + \int_1^{1+\epsilon} C\{u \geqslant \alpha\} d\alpha \\ &\leqslant C(K) + \epsilon + \epsilon\, C\{u \geqslant 1\} \\ &\leqslant (1+\epsilon)(C(K)+\epsilon) \end{aligned}$$

Ainsi $C_{Z,\theta}(K) = C(K)$.

b) Fonctions quasicontinues et topologie de la convergence en capacité locale

Etant donnée une capacité C, une propriété est dite vraie C-quasi-partout (C-q.p.) si elle est vraie sur le complémentaire d'un ensemble de C-capacité nulle. Une application u de Ω dans $\mathbb{R}$ est dite C-quasicontinue s'il existe une suite décroissante d'ouverts (G_n) de Ω telle que $C(G_n) \searrow 0$ quand $n \to +\infty$ et pour tout $n \in N$ la restriction de u à $\Omega \setminus G_n$ est continue.

Notons (K_p) une suite exhaustive de compacts de Ω (c'est-à-dire que $K_p \subset K_{p+1}$ pour tout p et $\bigcup_p K_p = \Omega$).

THEOREME 2.3. *Soit* C *une capacité sur* Ω *et soit* $Q_C(\Omega)$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des classes pour l'égalité C-quasi-partout d'application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *C-quasicontinues.*

Pour tout $p \in N$ et $u \in Q_C(\Omega)$, on pose

$$q_C^p(u) = \inf \{a > 0 ; C(K_p \cap \{|u| \geqslant a\}) \leqslant a\}$$

et

$$q_C(u) = \sum_{p \in N} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{q_C^p(u)}{1 + q_C^p(u)}$$

Alors q_C est une quasi-norme sur $Q_C(\Omega)$ et $Q_C(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique complet.

REMARQUE 2.4. *Il résulte immédiatement des définitions de C, q_C^p et q_C que, pour toute base de filtre F et $u \in Q_C(\Omega)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\quad q_C(u) \underset{F}{\to} 0$

ii) $\quad \forall p \in \mathbb{N},\ q_C^p(u) \underset{F}{\to} 0$

iii) $\quad \forall p \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0,\ C(K_p \cap \{|u| \geq \epsilon\}) \underset{F}{\to} 0$

La topologie associée à q_C sera appelée topologie de la convergence en capacité locale.

Remarquons que pour la topologie de la convergence en capacité (en particulier pour la topologie de la convergence en mesure) $Q_C(\Omega)$ ne serait pas nécessairement un e.v.t.

Démonstration. Nous omettons l'indice C.

1) Montrons que q est une quasi-norme sur Ω.

Remarquons d'abord que q est indépendant du représentant choisi dans chaque classe q.p.

Pour tout $u \in Q(\Omega)$, $q(u) < +\infty$ car $q^p(u) < +\infty$, $q(u) = q(-u)$ et si $u = 0$ q.p., alors $q^p(u) = 0$ d'où $q(u) = 0$.

Supposons que $q(u) = 0$. Alors, pour tout p, $q^p(u) = 0$ et par suite $C(K_p \cap \{|u| \geq a\}) = 0$ pour tout $a > 0$. Or

$$\begin{aligned} C\{|u| > 0\} &= C\Big(\bigcup_{p \in N} (K_p \cap \{|u| \geq \tfrac{1}{p}\})\Big) \\ &\leq \sum_{p \in N} C(K_p \cap \{|u| \geq \tfrac{1}{p}\}) = 0 \end{aligned}$$

Donc $u = 0$ q.p.

Montrons la sous-additivité de q^p ; celle de q en résultera. Soit $u, v \in Q(\Omega)$. Soit $a > 0$ tel que $C(K_p \cap \{|u| \geq a\}) \leq a$ et $b > 0$ tel que $C(K_p \cap \{|v| \geq b\}) \leq b$. En ajoutant, on obtient

$$C[K_p \cap (\{|u| \geq a\} \cup \{|v| \geq b\})] \leq a + b$$

Or $\{|u+v| \geq a+b\} \subset \{|u| \geq a\} \cup \{|v| \geq b\}$
Donc $C(K_p \cap \{|u+v| \geq a+b\}) \leq a+b$
Par conséquent $q^p(u+v) \leq a+b$, et ceci pour tout a et b, donc $q^p(u+v) \leq q^p(u) + q^p(v)$.

Montrons que si (λ_n) est une suite de $\mathbb{R}$ qui converge vers zéro, alors quel que soit $u \in Q(\Omega)$, $q(\lambda_n u) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

D'après la remarque 2.4, il suffit de démontrer que quels que soient $p \in N$ et $\epsilon > 0$, $C(K_p \cap \{|u| \geq \frac{\epsilon}{\lambda_n}\}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Or puisque u est quasicontinu, quel que soit $\alpha > 0$ il existe un ouvert G de Ω tel que $C(G) \leq \alpha$ et la restriction de u à $\Omega \setminus G$ est continue ; ainsi u est bornée sur $K_p \cap (\Omega \setminus G)$. Par suite pour n assez grand $K_p \cap \{|u| \geq \frac{\epsilon}{\lambda_n}\} \cap (\Omega \setminus G)$ est vide et donc

$$C(K_p \cap \{|u| \geq \frac{\epsilon}{\lambda_n}\}) \leq \alpha$$

Enfin il résulte de la remarque 2.4 que si $q(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, alors pour tout $\lambda \in R$, $q(\lambda u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Ainsi q est une quasi-norme sur $Q(\Omega)$ qui est donc, pour la topologie associée à q, un espace vectoriel topologique.

2) Montrons que $Q(\Omega)$ est complet. Soit (v_n) une suite de Cauchy de $Q(\Omega)$. Alors

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0 \quad C(K_p \cap \{|v_n - v_m| \geq \epsilon\}) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

Il existe donc une sous-suite de (v_n) notée (u_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C(\overset{o}{K}_n \cap \{|u_{n+1} - u_n| > \frac{1}{2^n}\}) < \frac{1}{2^n}$$

Puisque u_n est quasicontinue il existe un ouvert ω'_n tel que $C(\omega'_n) < \frac{1}{2^n}$ et la restriction de u_n à $\Omega \setminus \omega'_n$ est continue. Soit $\omega_n = \bigcup_{\ell = n}^{\infty} \omega'_\ell$.

Soit $G'_n = \overset{o}{K}_n \cap (\{|u_{n+1} - u_n| > \frac{1}{2^n}\} \cup \omega_n)$. Alors G'_n est ouvert ; en effet $\{|u_{n+1} - u_n| > \frac{1}{2^n}\} \cap (\Omega \setminus \omega_n)$ est un ouvert relatif de $\Omega \setminus \omega_n$ car la restriction de $|u_{n+1} - u_n|$ à $\Omega \setminus \omega_n$ est continue. Il existe donc un ouvert U de Ω tel que

$$\{|u_{n+1} - u_n| > \frac{1}{2^n}\} \cap (\Omega \setminus \omega_n) = U \cap (\Omega \setminus \omega_n)$$

donc $\{|u_{n+1} - u_n| > \frac{1}{2^n}\} \cup \omega_n = U \cup \omega_n$ qui est un ouvert de Ω.

Posons $G_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} G_n$ et $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$. On a alors

$$C(G_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} C(G'_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} + C(\omega_n) \leq \frac{1}{2^{k-4}}$$

et par suite $C(A) = 0$.

Montrons que (u_n) converge quasi-partout sur Ω. Soit $x \in \Omega \setminus A$. Il existe p tel que $x \in \overset{o}{K}_p \setminus A$ donc il existe k tel que pour tout $n \geq \sup(p, k)$ $x \in \overset{o}{K}_p \setminus G'_n$ d'où $|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. La suite $(u_n(x))$

est donc de Cauchy donc converge. Soit $u(x)$ sa limite ; l'application u est ainsi définie quasi-partout.

Montrons que u est quasicontinue. Quel que soit $p \in \mathbb{N}$, $k \geq p$, $x \in \overset{o}{K}_p \setminus G_k$ et $n \geq k$, on a $|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, donc (u_n) converge uniformément vers u sur $\overset{o}{K}_p \setminus G_k$.
Comme $\overset{o}{K}_p \setminus G_k \subset \overset{o}{K}_p \setminus \omega_k$ et que la restriction de u_n à $\Omega \setminus \omega_k$ est continue, la restriction de u à $K_p \setminus G_k$ est continue, et ceci pour tout p et k, car (G_k) est décroissante. On en déduit que la restriction de u à $\Omega \setminus G_k$ est continue. Ainsi $u \in Q(\Omega)$.

Montrons enfin que $q(u_n - u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Soient $p \in N$, $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$. D'après ce qui précède, quels que soient $n \geq k \geq p$ et $x \in \overset{o}{K}_p \setminus G_k$ on a $|u(x) - u_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Prenons k tel que $\frac{1}{2^{k-4}} < \inf(\alpha,\epsilon)$.
Pour tout $n \geq k$, on a

$$C(\overset{o}{K}_p \cap \{|u-u_n| \geq \alpha\}) \leq C(\overset{o}{K}_p \cap \{|u-u_n| > \frac{1}{2^{n-1}}\})$$
$$\leq C(G_k) \leq \frac{1}{2^{k-4}} < \epsilon$$

Ainsi quels que soient $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$

$$C(K_p \cap \{|u-u_n| \geq \alpha\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Remarque. Dans la démonstration précédente seule l'hypothèse que C est une sous-mesure (c'est-à-dire une application de $P(\Omega)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ croissante et dénombrablement sous-additive) a été utilisée.

COROLLAIRE 2.5. *Toute suite convergente de* $Q_C(\Omega)$ *admet une sous-suite convergeant C-quasi-partout.*

COROLLAIRE 2.6. *Pour l'ordre défini sur* $Q_C(\Omega)$ *par :* $\forall u,\ v \in Q_C(\Omega)$ $(u \geq v$ *dans* $Q_C(\Omega)$ $\Longleftrightarrow$ $u \geq v$ C-q.p.) *le cône positif* $Q_C^+(\Omega)$ *est fermé.*

c) Identification de X à des espaces de fonctions quasicontinues

DEFINITION 2.7. *Soit* C *une capacité sur* Ω, q_C *la quasi-norme associée et* i_C *l'application qui à* $u \in Y$ *fait correspondre la classe pour l'égalité C-q.p. de* u. *Reprenant la notion introduite par* N. *Aronszajn et K.T. Smith (cf.* [2]*), la capacité* C *est dite admissible relativement à* X *si l'application* i_C *de* $(Y, \|\cdot\|)$ *dans* $(Q_C(\Omega), q_C)$ *est continue.*

PROPOSITION 2.8. *Soit* C *une capacité admissible. Alors l'application* i_C *est prolongeable en une application* $\hat{i}_C$ *de* $(X, \|\cdot\|)$ *dans* $(Q_C(\Omega), q_C)$ *linéaire continue.*

Démonstration. Puisque C est admissible l'application i_C de Y dans $Q_C(\Omega)$ est uniformément continue. Comme $Q_C(\Omega)$ est complet, elle admet un prolongement continue $\hat{i}_C$ de X dans $Q_C(\Omega)$.

DEFINITION 2.9. *Une capacité admissible est dite capacité de base pour* X *si* $\hat{i}_C$ *est injective.*

Dans ce cas X s'identifie à un sous-espace de $Q_C(\Omega)$.

LEMME 2.10. *Soit* C *une capacité admissible. L'application* $\hat{i}_C$ *est injective ssi pour toute suite de Cauchy* (u_n) *de* $(Y, \| . \|)$ *telle que* $q_C(u_n) \to 0$, *alors* $\| u_n \| \to 0$. *En particulier si* $\| . \|$ *est s.c.i. dans* (Y, q_C) *alors* $\hat{i}_C$ *est injective.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\hat{i}_C$ est injective. Soit (u_n) une suite de Cauchy de $(Y, \| . \|)$ telle que $q_C(u_n) \to 0$. Alors (u_n) converge vers u dans X d'où $\hat{i}_C(u_n) \to \hat{i}_C(u)$ dans $(Q_C(\Omega), q_C)$ donc $\hat{i}_C(u) = 0$ et ainsi $u = 0$. Par conséquent $\| u_n \| \to 0$.

Réciproquement soit $u \in X$ tel que $\hat{i}_C(u) = 0$. Il existe une suite (u_n) de Y qui converge vers u dans X donc $\hat{i}_C(u_n) \to 0$ dans $(Q_C(\Omega), q_C)$ c'est-à-dire $q_C(u_n) \to 0$. Donc $\| u_n \| \to 0$ et ainsi $u = 0$.

Supposons maintenant que $\| . \|$ est s.c.i. dans (Y, q_C).

Soit (u_n) une suite de Cauchy de $(Y, \| . \|)$ telle que $q_C(u_n) \to 0$. Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $n_o \in N$ tel que pour tout $n \geqslant n_o$ et $p \geqslant n_o$, $\| u_p - u_n \| < \epsilon$. Or $u_p - u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u_p$ dans (Y, q_C). Donc, puisque $\| . \|$ est s.c.i. dans (Y, q_C),

$$\| u_p \| \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} \| u_p - u_n \| < \epsilon$$

Ainsi $\| u_p \| \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$.

PROPOSITION 2.11.

1) Soit C *une capacité admissible. Toute fonction* u C_X*-quasicontinue est* C*-quasicontinue et la classe de* u *dans* $Q_X(\Omega)$ *est contenue dans la classe de* u *dans* $Q_C(\Omega)$. *De plus l'application* k *de* $(Q_X(\Omega), q_X)$ *dans* $(Q_C(\Omega), q_C)$ *ainsi définie est continue.*

2) Soit (D_1) *la propriété suivante :*

(D_1) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Pour tout compact } K, \textit{ il existe une application } h_K \textit{ de } \mathbb{R}^+ \textit{ dans } \mathbb{R}^+, h(0) = 0, \textit{ continue en } 0 \textit{ et} \\ \textit{pour tout } u \in Y \textit{ il existe } v \in Y \textit{ tels que } v \geqslant |u| \textit{ sur } K \textit{ et } \| v \| \leqslant h_K(\| u \|). \end{array} \right.$

Si (D_1) *est vérifiée alors* C_X *est une capacité admissible.*

3) Soit C *une capacité admissible. On suppose que* C_X *est admissible. Alors si* C *est une capacité de base,* C_X *est une capacité de base.*

Démonstration de 1). a) Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 2.12. *Soit* C *une capacité admissible. Soit* (Ω_p) *une suite croissante d'ouverts de* Ω *telle que* $\Omega = \bigcup_p \Omega_p$. *Alors pour tout* p *et pour toute suite* (G_n) *d'ouverts de* Ω, *si* $C_X(\Omega_p \cap G_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *alors* $C(\Omega_p \cap G_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *En particulier, pour* $A \subset \Omega$, si $C_X(A) = 0$ *alors* $C(A) = 0$.

En effet, soit $p \in \mathbb{N}$. Quel que soit n, il existe un compact K_n tel que $K_n \subset \Omega_p \cap G_n$ et $C(\Omega_p \cap G_n) \leqslant C(K_n) + \frac{1}{n}$. Comme $C_X(K_n) \leqslant C_X(\Omega_p \cap G_n)$, $C_X(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc il existe une suite (u_n) de Y^+ telle que $u_n \geqslant 1$ sur K_n et $\| u_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc puisque C est admissible, $q_C(u_n) \to 0$ d'où $C(\Omega_p \cap \{u_n \geqslant 1\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il en résulte que $C(K_n) \to 0$ et donc que $C(\Omega_p \cap G_n) \to 0$. Maintenant soit $A \subset \Omega$ tel que $C_X(A) = 0$. Il existe une suite d'ouverts (G_n) telle que $G_n \supset A$ et $C_X(G_n) \to 0$. Par conséquent, pour tout p, $C(\Omega_p \cap G_n) \to 0$ donc $C(\Omega_p \cap A) = 0$ et ainsi $C(A) = 0$.

b) Soit u une fonction C_X-quasicontinue. Alors u est C-quasicontinue. En effet, il existe une suite d'ouverts (G_n) telle que $C_X(G_n) \to 0$ et $u \restriction_{\Omega \setminus G_n}$ soit continue. Par conséquent, quel que soit p, $C_X(\Omega_p \setminus G_n) \to 0$. D'après le lemme précédent $C(\Omega_p \cap G_n) \to 0$. Ainsi $u \restriction_{\Omega_p}$ est C-quasicontinue donc u est C-quasicontinue.

Il en résulte que la classe de u dans $Q_X(\Omega)$ est contenue dans la classe de u dans $Q_C(\Omega)$. Montrons que l'application k de $Q_X(\Omega)$ dans $Q_C(\Omega)$ ainsi définie est continue. Soit (u_n) une suite de $Q_X(\Omega)$ telle que $q_X(u_n) \to 0$. Soit K un compact de Ω et $\epsilon > 0$. On a $C_X(K \cap \{|u_n| \geqslant \epsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc il existe une suite (v_n) de Y^+ telle que $v_n \geqslant 1$ sur $K \cap \{|u_n| \geqslant \epsilon\}$ et $\| v_n \| \to 0$. Par conséquent $q_C(v_n) \to 0$. Ainsi $C(K \cap \{v_n \geqslant 1\}) \to 0$. Or $K \cap \{|u_n| \geqslant \epsilon\} \subset K \cap \{v_n \geqslant 1\}$. Donc $C(K \cap \{|u_n| \geqslant \epsilon\}) \to 0$ et ceci pour tous K et ϵ. Donc $q_C(u_n) \to 0$.

Démonstration de 2). Soit (u_n) une suite de Y telle que $\| u_n \| \to 0$.

Montrons que $q_X(u_n) \to 0$ c'est-à-dire que quel que soit K compact et $\epsilon > 0$, $C_X(K \cap \{|u_n| \geqslant \epsilon\}) \to 0$. D'après (D_1), il existe $v_n \in Y$ tel que $v_n \geqslant \frac{|u_n|}{\epsilon}$ sur K et $\| v_n \| \leqslant h_K\left(\frac{\| u_n \|}{\epsilon}\right)$. Ainsi

$$C_X(K \cap \{|u_n| \geqslant \epsilon\}) \leqslant \| v_n \| \leqslant h_K\left(\left\| \frac{u_n}{\epsilon} \right\|\right) \to 0.$$

Démonstration de 3). Soit $\hat{i}_C$ (resp. $\hat{i}_X$) l'application continue de X dans $Q_C(\Omega)$ (resp. $Q_X(\Omega)$) définie à la proposition 2.8 . D'après 1), $\hat{i}_C = k \circ \hat{i}_X$. Par conséquent si $\hat{i}_C$ est injective, $\hat{i}_X$ l'est aussi.

2.2. STRUCTURE D'ESPACE DE RIESZ

Deux structures d'ordre sont induites sur X : celle de $Q_C(\Omega)$ et celle de Y. Sous l'hypothèse (D_2) suivante :

(D_2) $\left\{\begin{array}{l}\text{Y est un sous espace réticulé de } \mathcal{C}(\Omega) \text{ et pour toute suite de Cauchy } (u_n) \text{ de } (Y, \|\cdot\|), \text{ la suite } (u_n^+) \\ \text{est faiblement relativement compacte dans X.}\end{array}\right.$

nous montrons que ces ordres coïncident et induisent sur X une structure d'espace de Riesz.

LEMME 2.13. *On suppose que* (D_2) *est vérifié. Soit* C *une capacité de base et* $\hat{\imath}_C$ *l'injection de* X *dans* $Q_C(\Omega)$. *Soit* (u_n) *une suite faiblement relativement compacte de* X *telle que* $\hat{\imath}_C(u_n)$ *converge C-q.p. vers* v. *Alors* $v \in \hat{\imath}_C(X)$ *et* $u_n \rightharpoonup \hat{\imath}_C^{-1}(v)$ *dans* w _ X.

Démonstration. Il existe une suite (n_k) et $u \in X$ tels que (u_{n_k}) converge faiblement vers u dans X, donc il existe une combinaison convexe (v_n) des (u_{n_k}) telle que (v_n) converge fortement vers u dans X. Par conséquent $\hat{\imath}_C(v_n)$ converge vers $\hat{\imath}_C(u)$ dans $Q_C(\Omega)$ donc il existe une sous-suite de $\hat{\imath}_C(v_n)$ qui converge vers $\hat{\imath}_C(u)$ C-q.p. Par conséquent $\hat{\imath}_C(u) = v$ C-q.p. et ainsi de suite (u_n) converge faiblement vers $u = \hat{\imath}_C^{-1}(v)$ dans X.

PROPOSITION 2.14. *Soit* C *une capacité de base. On suppose que* (D_2) *est vérifiée. Pour la structure d'ordre définie sur* X *par :*

$$(u \leqslant v \text{ dans } X) \quad \Longleftrightarrow \quad (\hat{\imath}_C(u) \leqslant \hat{\imath}_C(v) \text{ dans } Q_C(\Omega))$$

alors $X^+ = \overline{Y}^+$, X *est un espace de Riesz et* $\hat{\imath}_C(u^+) = \hat{\imath}_C(u)^+$.

De plus si (u_n) *est une suite de* Y *qui converge vers* u *dans* X, *alors* (u_n^+) *converge faiblement vers* u^+ *dans* w_X.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\overline{Y}^+ \subset X^+$. En effet soit $u \in \overline{Y}^+$; il existe une suite (u_n) de Y^+ telle que $u_n \to u$ dans X. Par conséquent $\hat{\imath}_C(u_n) \to \hat{\imath}_C(u)$ dans $Q_C(\Omega)$. Puisque $Q_C^+(\Omega)$ est fermé (cf. corollaire 2.6.) $\hat{\imath}_C(u) \geqslant 0$, c'est-à-dire $u \geqslant 0$.

Soit $u \in X$; il existe une suite (u_n) de Y telle que $u_n \to u$ dans X. Montrons que $u^+ = \sup(u, 0)$ existe et que $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ dans w _ X. D'une part $\hat{\imath}_C(u_n) \to \hat{\imath}_C(u)$ dans $Q_C(\Omega)$ donc $\hat{\imath}_C(u_n)^+ \to \hat{\imath}_C(u)^+$ dans $Q_C(\Omega)$, d'où $u_{n_k}^+ \to \hat{\imath}_C(u)^+$ C-q.p.. D'autre part d'après (D_2), il existe (n_k) et $v \in X$ tels que $u_{n_k}^+ \rightharpoonup v$ dans w _ X.
D'après le lemme 2.13, $\hat{\imath}_C(v) = \hat{\imath}_C(u)^+$.

Il en résulte que $v \geqslant 0$ et $v \geqslant u$ donc $u^+ = \sup(u, 0)$ existe et $v \geqslant u^+$. En fait $v = u^+$ car si $v_1 \geqslant \sup(u, 0)$ alors

$$\hat{\imath}_C(v_1) \geqslant \hat{\imath}_C(u)^+ = \hat{\imath}_C(v)\,, \text{ c'est-à-dire } v_1 \geqslant v$$

Ainsi $\hat{\imath}_C(u^+) = \hat{\imath}_C(u)^+$ et $u_n^+ \rightharpoonup u^+$ dans w _ X.
En particulier $X^+ = \overline{Y}^+$.

2.3. COMPARAISON DE CLASSES DE FONCTIONS QUASICONTINUES

Nous avons vu à la proposition 2.11 que toute C_X-classe (classe d'équivalence de fonction C_X-quasi-continues pour l'égalité C_X-quasi-partout) est contenue dans une C-classe. En supposant que X est réflexif et que (D_2) est vérifié - situation généralisant le cadre des espaces de Dirichlet de A. Beurling et J. Deny (cf. [7]) - nous montrons que toute C-classe contient au plus une C_X-classe.

PROPOSITION 2.15. *On suppose que* X *est réflexif et que* (D_2) *est vérifié. Soit* C *une capacité de base. Alors l'application* k *de* $Q_X(\Omega)$ *dans* $Q_C(\Omega)$ *est injective.*

Démonstration. C étant une capacité de base, soit $\hat{i}_C$ l'application continue injective de X dans $Q_C(\Omega)$ (cf. Proposition 2.8). L'injectivité de k sera obtenue à l'issue des trois lemmes suivants :

LEMME 2.16. *Pour tout compact* K *de* Ω, *on a*

$$C_X(K) = \min \left\{ \| u \| \ ; u \in \overline{\left\{ v \in Y^+ \ ; v \geqslant 1 \ \textit{sur}\ K \right\}} \right\}$$

et si $u \in \overline{\left\{ v \in Y^+ ; v \geqslant 1 \ \textit{sur}\ K \right\}}$, *alors* $\hat{i}_C(u) \geqslant 1$ C-q.p. *sur* K.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } C_X(K) &= \inf \left\{ \| u \| \ ; \ u \in Y^+ \ ; \ u \geqslant 1 \ \text{ sur } K \right\} \\ &= \min \left\{ \| u \| \ ; \ u \in \overline{\left\{ v \in Y^+ ; \ v \geqslant 1 \ \text{sur } K \right\}} \right\} \end{aligned}$$

car X est réflexif.

D'autre part, si $u \in \overline{\left\{ v \in Y^+ ; v \geqslant 1 \text{ sur } K \right\}}$, il existe une suite (u_n) telle que $u_n \in Y^+$, $u_n \geqslant 1$ sur K et $u_n \to u$ dans X. Par conséquent $\hat{i}_C(u_n) \to \hat{i}_C(u)$ dans $Q_C(\Omega)$ donc $u_{n_k} \to \hat{i}_C(u)$ C-q.p.. Comme $u_n \geqslant 1$ sur K $\hat{i}_C(u) \geqslant 1$ C-q.p. sur K.

LEMME 2.17. *Pour tout ouvert* G *de* Ω,

$$C_X(G) = \min \left\{ \| u \| \ ; \ u \in X^+ \ , \ \hat{i}_C(u) \geqslant 1 \ \text{ C-q.p. } \textit{sur}\ G \right\}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que puisque X est réflexif et que $\left\{ v \in X^+ ; \hat{i}_C(v) \geqslant 1 \ \text{ C-q.p. sur } G \right\}$ est un convexe fermé de X, $\inf \left\{ \| u \| ; u \in X^+, \ \hat{i}_C(u) \geqslant 1 \ \text{ C-q.p. sur } G \right\}$ est atteint.

Montrons d'abord que pour tout $u \in X^+$ tel que $\hat{i}_C(u) \geqslant 1$ C-q.p. sur G, on a $\| u \| \geqslant C_X(G)$. Soit K un compact contenu dans G. Soit $\epsilon > 0$ et $\hat{u} = (1 + \epsilon) u$. Par densité de Y dans X il existe une suite (u_n) de Y qui converge dans X vers u. D'après le théorème d'Urysohn et la densité de $Y \cap C_c(\Omega)$ dans $C_c(\Omega)$, il existe $v \in Y$ tel que $1 \leqslant v \leqslant 1 + \epsilon$ sur K, $v = 0$ sur $\Omega \setminus G$ et $0 \leqslant v \leqslant 1 + \epsilon$ sur Ω.

On a alors $u_n \vee v \in Y$, $u_n \vee v \geqslant 1$ sur K et d'après la proposition 2.14,

$$u_n \vee v = u_n + (v - u_n)^+ \rightharpoonup \hat{u} + (v - \hat{u})^+ \ \text{ dans } \ w\_X$$

Or $\hat{i}_C((v - \hat{u})^+) = \hat{i}_C(v - \hat{u})^+ = (v - \hat{i}_C(\hat{u}))^+ = 0$, donc $(v - \hat{u})^+ = 0$ et ainsi $u_n \vee v \rightharpoonup \hat{u}$ dans w_X.

Comme $u_n \bigvee v \in \{v \in Y^+ : v \geq 1 \text{ sur } K\}$, $\hat{u} \in \overline{\{v \in Y^+ ; v \geq 1 \text{ sur } K\}}$.
Ainsi $\| \hat{u} \| \geq C_X(K)$. Par suite pour tout $\epsilon > 0$ et K compact contenu dans G, $\| (1+\epsilon) u \| \geq C_X(K)$. Par conséquent $\| u \| \geq C_X(G)$.

Inversement, si $C_X(G) = +\infty$, c'est démontré. Sinon, supposons d'abord G relativement compact. Il existe alors une suite croissante de compacts K_n contenus dans G telle que $G = \cup K_n$. D'après le lemme 2.16, il existe $u_n \in \{v \in Y^+ ; v \geq 1 \text{ sur } K_n\}$ telle que

$$\| u_n \| = C_X(K_n) \leq C_X(G) < +\infty$$

Donc il existe (n_k) et $u \in X$ tels que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans w_-X et $\| u \| \leq \underline{\lim} \| u_{n_k} \| \leq C_X(G)$.
Comme la suite des convexes fermés $\overline{\{v \in Y^+ ; v \geq 1 \text{ sur } K_n\}}$ est décroissante, $u \in \bigcap_n \overline{\{v \in Y^+ ; v \geq 1 \text{ sur } K_n\}}$.
Puisque $\hat{r}_C(u_n) \geq 1$ C-q.p. sur K_n, $\hat{r}_C(u) \geq 1$ C-q.p. sur K_n, donc $\hat{r}_C(u) \geq 1$ C-q.p. sur G.

Supposons maintenant que G est un ouvert quelconque tel que $C_X(G) < +\infty$. Il existe une suite croissante d'ouverts relativement compacts G_n tels que $G = \cup G_n$. D'après ce qui précède il existe une suite (u_n) de X^+ telle que $\hat{r}_C(u_n) \geq 1$ C-q.p. sur G_n et $\| u_n \| = C_X(G_n) \leq C_X(G) < +\infty$.

Il existe donc (n_k) et $u \in X$ tel que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ dans w_-X. On a $\hat{r}_C(u) \geq 1$ C-q.p. sur G et
$\| u \| \leq \underline{\lim} \| u_{n_k} \| \leq C_X(G)$.

Ainsi $C_X(G) = \min \{\| u \| ; u \in X^+, \hat{r}_C(u) \geq 1 \text{ C-q.p. sur } G\}$.

LEMME 2.18. *Soit* u *une fonction* C_X*-quasicontinue. Si* $u \leq 0$ *C-q.p. alors* $u \leq 0$ C_X-q.p.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\alpha > 0$, $C_X(\{u > \alpha\}) = 0$ car il en résultera que $C_X(\{u > 0\}) = 0$.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $C_X(\{u > \alpha\}) > 0$. Notons $A_\alpha = \{u > \alpha\}$. Puisque u est C_X-quasicontinue il existe un ouvert G tel que $u_{\restriction \Omega \setminus G}$ soit continue et que $C_X(G) < C_X(A_\alpha)$. Soit $G_1 = A_\alpha \cup G$. Comme $A_\alpha \cap (\Omega \setminus G)$ est un ouvert relatif de $\Omega \setminus G$, il existe un ouvert U de Ω tel que :

$$A_\alpha \cap (\Omega \setminus G) = U \cap (\Omega \setminus G)$$

d'où $A_\alpha \cup G = U \cup G$. Par conséquent G_1 est un ouvert et

$$C_X(G) < C_X(A_\alpha) \leq C_X(G_1)$$

D'après le lemme 2.17, il existe $u_0 \in X^+$ tel que $\hat{r}_C(u_0) \geq 1$ C-q.p. sur G et $\| u_0 \| = C_X(G)$. Puisque $u \leq 0$

C-q.p., $C(A_\alpha) = 0$ donc $\hat{r}_C(u_0) \geqslant 1$ C-q.p. sur $G \cup A_\alpha = G_1$. Ainsi

$$C_X(G_1) \leqslant \| u_0 \| = C_X(G) \text{ , ce qui est contradictoire.}$$

2.4. DEFINITION D'UN ESPACE DE BANACH-DIRICHLET ET NOTATIONS

Soit Ω un espace localement compact dénombrable à l'infini. Un espace X sera appelé espace de Banach-Dirichlet si X est le complété d'un sous-espace normé réticulé Y de $C_c(\Omega)$, dense dans $C_c(\Omega)$, tel qu'il existe une capacité de base et que (D_1) et (D_2) soient vérifiées.

D'après les résultats précédents X s'identifie à un sous espace de $Q_X(\Omega)$, espace des classes de fonctions C_X-quasicontinues relativement à la capacité C_X associée à la norme de X ; un représentant C_X-quasicontinu de $u \in X$ sera noté $\tilde{u}$. De plus X est muni de la structure d'ordre réticulé induite par celle de $Q_X(\Omega)$ et on désigne par X^+ le cône fermé des éléments positifs de X. Soit X^* le dual de X ; on note $(.\,,.)$ la dualité X^*, X et on suppose que X^* est muni de l'ordre dual (c'est-à-dire que $w \geqslant 0$ dans X^* ssi $(w, v) \geqslant 0$ pour tout $v \in X^+$).

Exemples. $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour $p \geqslant 1$ est un espace de Banach-Dirichlet.

Remarque. Cette notion généralise les espaces de Dirichlet de A. Beurling et J. Deny (cf. [7] et [13]) puis A. Ancona (cf. [1]) et les espaces de Banach-Dirichlet de P. Fowler (cf. [15]) espaces de Banach uniformément convexes où toutes les contractions opèrent.

2.5. MESURES D'ENERGIE FINIE - NOTION DE POTENTIEL

On suppose que X est un espace de Banach-Dirichlet (cf. 2.4). Nous introduisons des mesures μ associées à X telles que X se représente comme un espace de fonctions μ-intégrables et que toute fonction $\tilde{u}$ C_X-quasicontinue représentant un élément u de X soit μ-intégrable.

DEFINITION 2.19. *Une mesure de Radon μ sur Ω est dite d'énergie finie relativement à X si sa restriction à Y est continue pour la topologie de X. On désigne par $E(X)$ (resp. $E^+(X)$) l'ensemble des mesures d'énergie finie (resp. et positives) relativement à X.*

PROPOSITION 2.20. *Soit μ une mesure de Radon sur Ω. Alors $\mu \in E(X)$ ssi il existe $w_\mu \in X^*$ tel que*

$$\forall v \in Y \quad , \quad (w_\mu , v) = \int v \, d\mu$$

w_μ est alors unique. L'application $\mu \to w_\mu$ est un isomorphisme du cône convexe $E^+(X)$ sur X^{*+}

Démonstration. Soit $\mu \in E^+(X)$. L'application $v \in Y \to \int v \, d\mu$ est linéaire et continue pour la topologie de X. D'après la densité de Y dans X, elle se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur X, c'est-à-dire qu'il existe $w_\mu \in X^*$ unique tel que

$$\forall v \in Y \quad , \quad \int v\, d\mu = (w_\mu, v)$$

De plus, $(w_\mu, v) \geqslant 0$ pour tout $v \in Y$. Comme $X^+ = Y^+$, on a donc $(w_\mu, v) \geqslant 0$ pour tout $v \in X^+$, c'est-à-dire $w_\mu \in X^{*+}$.

Inversement, soit $w \in X^{*+}$. L'application $v \in Y \to (w, v)$ est une forme linéaire positive. Comme Y est dense dans $C_c(\Omega)$, il existe une mesure de Radon positive μ sur Ω telle que

$$\forall v \in Y \quad , \quad (w, v) = \int v\, d\mu .$$

PROPOSITION 2.21. *Soit* $\mu \in E^+(X)$. *Alors* μ *est admissible relativement à* X, $\hat{\imath}_\mu$ *est une application continue de* X *dans* $L^1(\Omega, \mu)$ *et quel que soit* $u \in X$ *et* $\tilde{u} \in \hat{\imath}_X(u)$, $\tilde{u} \in L^1(\Omega, \mu)$ *et* $\int \tilde{u}\, d\mu = (w_\mu, u)$.

Démonstration. Montrons que μ est admissible relativement à X. Soit (u_n) une suite de Y telle que $\| u_n \| \to 0$. Soit $w_\mu \in X^{*+}$ associée à μ. On a $\int | u_n | d\mu = (w_\mu, | u_n |)$. D'après la proposition 2.14, $| u_n | \rightharpoonup 0$ dans $w - X$, donc $\int | u_n | d\mu \to 0$. Par conséquent, $u_n \to 0$ en μ-mesure locale. De plus $\hat{\imath}_\mu$ (définie à la proposition 2.8) est une application de X dans $L^1(\Omega, \mu)$ continue.

Soit $u \in X$ et soit $\tilde{u} \in \hat{\imath}_X(u)$. D'après la proposition 2.11, $\tilde{u} \in \hat{\imath}_\mu(u)$, donc $\tilde{u} \in L^1(\Omega, \mu)$. Par ailleurs, il existe une suite (u_n) de Y qui converge vers u dans X. Par conséquent, $\hat{\imath}_\mu(u_n)$ converge vers $\hat{\imath}_\mu(u)$ dans $L^1(\Omega, \mu)$. Comme $\int u_n\, d\mu = (w_\mu, u_n)$, on obtient $\int \tilde{u}\, d\mu = (w_\mu, u)$.

Etant donnée une mesure d'énergie finie μ, la mesure variation totale $|\mu|$ ainsi que μ^+ et μ^- ne sont pas nécessairement des mesures positives d'énergie finie. On a cependant les propriétés suivantes :

PROPOSITION 2.22. *Soit* $\mu \in E(X)$

a) Soit $A \subset \Omega$ *tel que* $C_X(A) = 0$. *Alors* $|\mu|(A) = 0$

b) Soit $u \in X$ *tel qu'il existe* $\theta \in Y^+$ *tel que* $|\tilde{u}| \leqslant \theta$ C_X*-quasi-partout. Alors* $\tilde{u}$ *est* μ*-intégrable et* $(w_\mu, u) = \int \tilde{u}\, d\mu$.

Démonstration de a). On se ramène tout d'abord au cas où A est borélien et donc μ-mesurable : il suffit de remarquer qu'il existe un G_δ contenant A de capacité nulle. D'après le théorème de décomposition de Jordan, il existe deux ensembles M et N μ-mesurables tels que $M \cup N = \Omega$, $M \cap N = \phi$, μ^+ concentrée sur M, μ^- concentrée sur N et $|\mu|(A) = \mu^+(A \cap M) + \mu^-(A \cap N)$.

La mesure de Radon μ^+ étant intérieurement régulière, il suffit de montrer que pour tout compact K contenu dans $A \cap M$, $\mu^+(K) = 0$; il en résultera que $\mu^+(A \cap M) = 0$. De la même façon on obtiendrait $\mu^-(A \cap N) = 0$ et donc $|\mu|(A) = 0$.

Soit $\epsilon > 0$ et ω ouvert tel que $K \subset \omega \subset \Omega$ et $|\mu|(\omega \setminus K) < \epsilon$. Par densité de Y dans

$C_c(\Omega)$, il existe $v \in Y$ tel que $v \geqslant 1$ sur K, $v \leqslant 2$ sur ω et $v = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$.

D'autre part, puisque $C_X(K) = 0$, il existe une suite (u_n) de Y^+ telle que $u_n \geqslant 1$ sur K et $u_n \to 0$ dans X. Posons $v_n = u_n \wedge v$. Alors $v_n \in Y^+$, $v_n \geqslant 1$ sur K et $v_n = 0$ sur $\Omega \setminus \omega$. D'après la proposition 2.14, (v_n) converge vers 0 faiblement dans X. Soit w_μ l'élément de X^* associé à μ. On a

$$(w_\mu, v_n) = \int_\Omega v_n \, d\mu = \int_K v_n \, d\mu + \int_{\Omega\setminus K} d\mu$$
$$\geqslant \int_K d\mu^+ + \int_{\omega\setminus K} v_n \, d\mu$$

d'où $\int_K d\mu^+ \leqslant (w_\mu, v_n) + 2\,|\mu|\,(\omega\setminus K)$.

Par conséquent $\int_K d\mu^+ \leqslant 2\,|\mu|\,(\omega\setminus K) \leqslant 2\epsilon$.

Puisque ϵ est quelconque, on en conclut que $\mu^+(K) = 0$.

Démonstration de b). Soit (u_n) une suite de Y qui converge vers u dans X. Soit $\theta_n = u_n + (-u_n - \theta)^+ - (u_n - \theta)^+$. Alors $\theta_n \in Y$, $|\theta_n| \leqslant \theta$ et d'après la proposition 2.14, (θ_n) converge faiblement dans X vers $u + (-u-\theta)^+ - (u-\theta)^+ = u$. Il existe une combinaison convexe (θ'_n) de (θ_n) telle que $\theta'_n \to u$ dans X donc $\theta'_{n_k} \to \tilde{u}$ C_X-q.p. D'après a), $\theta'_{n_k} \to \tilde{u}$ $|\mu|$-p.p.

Soit w_μ l'élément de X^* associé à μ. Quel que soit n,

$$(w_\mu, \theta'_n) = \int \theta'_n \, d\mu .$$

D'une part $(w_\mu, \theta'_n) \to (w_\mu, u)$ et d'autre part, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\tilde{u}$ est μ-intégrable et puisque $|\theta'_n| \leqslant \theta$,

$$\left|\int (\theta'_{n_k} - \tilde{u})\, d\mu\right| \leqslant \int |\theta_{n_k} - \tilde{u}|\, d|\mu| \to 0$$

donc $(w_\mu, u) = \int \tilde{u}\, d\mu$.

Remarque. Pour $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, Grun Rehomme [16] et A. Ancona [1] ont démontré que lorsque μ est une mesure d'énergie finie, $|\mu|$ ne charge pas les ensembles de capacité nulle.

NOTION DE POTENTIEL

DEFINITION 2.23. *Soit ψ une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *convexe s.c.i.. Un élément* u *de* X *est appelé ψ-potentiel (resp. ψ-potentiel pur) s'il existe une mesure $\mu \in E(X)$ (resp. $\mu \in E^+(X)$) telle que $w_\mu \in \partial\psi(u)$. Le potentiel* u *sera alors noté u_μ.*

Lorsque $\psi(u) = \|u\|^2$, $\partial\psi$ est l'application de dualité F *de* X *dans* X^* *; un ψ-potentiel sera appelé seulement potentiel.*

3 - ETUDE DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES AVEC CONTRAINTE DU TYPE OBSTACLE

Dans ce paragraphe X est un espace de Banach-Dirichlet réflexif (cf. 2.4 dont nous adoptons les notations ; cependant C_X sera omis dans les expressions C_X-quasicontinu, C_X-quasi-partout,...)

Soit ϕ une application de X dans $\mathbb{R}$ convexe continue coercive, K un convexe fermé non vide de X et $f \in X^*$.

Nous étudions les solutions des inéquations variationnelles

$$\min \{ \phi(v) - (f, v) \, ; v \in K \}$$

lorsque K est un convexe unilatéral et lorsque K est bilatéral et $f = 0$.

3.1. INEQUATIONS VARIATIONNELLES AVEC CONTRAINTE UNILATERALE

Nous caractérisons les solutions du problème

$$\text{(I)} \qquad \min \{ \phi(v) - (f, v) \, ; v \in K \}$$

où $f \in X^*$, K est un convexe unilatéral de X, et ϕ est une application de X dans $\mathbb{R}$ convexe continue coercive (c'est-à-dire $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} \dfrac{\phi(u)}{\|u\|} = +\infty$)

a) Théorème général

DEFINITION 3.1. *On dit que* K *est un convexe unilatéral de* X *si* K *est un convexe fermé non vide de* X *tel que* $K + X^+ \subset X$ *et* $u \wedge v \in K$ *pour tout* $u, v \in K$.

Si K est un convexe fermé non vide de X tel que $K - X^+ \subset K$ et $u \vee v \in K$ pour tout $u, v \in K$, on se ramène à la situation précédente en considérant $-K$.

THEOREME 3.2. *Soit* K *un convexe unilatéral de* X

a) Il existe une suite (g_n) *de* K *et une application* g *de* Ω *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *quasi-s.c.s. telles que* $\tilde{g}_n$ *décroît vers* g *quasi-partout et*

$$K = \{ u \in X \, ; \tilde{u} \geqslant g \quad \text{q.p.} \}$$

b) $u \in K$ *est solution du problème* (I) *ssi il existe* $w_\mu \in (\partial\phi(u) - f) \cap X^{*+}$ *dont la mesure positive d'énergie finie associée* μ *est telle que* $\int_\Omega (\tilde{u} - g) d\mu = 0$.

Démonstration. Commençons par donner une caractérisation générale d'une solution de (I).

LEMME 3.3. *Soit* X *un espace de Banach réflexif et* K *un convexe fermé non vide de* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) u *est solution de* (I)

ii) $u \in K$ *et il existe* $w \in \partial\phi(u)$ *tel que quel que soit* $v \in K$, $(w - f, v - u) \geq 0$.

Si de plus X *est un espace de Riesz et* K *est un convexe unilatéral,* $w - f \in X^{*+}$.

En effet, l'implication ii) ⇒ i) est immédiate par définition du sous-différentiel. Supposons i). Alors $f \in \partial(\phi + I_K)(u)$, où I_K désigne la fonction indicatrice de K. D'après le théorème d'additivité des sous-différentiels (cf. 23 p. 40),

$$\partial(\phi + I_K)(u) = \partial\phi(u) + \partial I_K(u).$$

Donc il existe $w \in \partial\phi(u)$ tel que, pour tout $v \in K$, $(w - f, v - u) \geq 0$.

Enfin la propriété $w - f \in X^{*+}$ résulte du fait que $K + X^{+} \subset K$.

Démonstration de a). Soit $\tilde{\imath}$ l'injection continue de X dans $Q_X(\Omega)$ (cf. propositions 2.8 et 2.11). Comme $\tilde{\imath}(X)$ est un sous-espace séparable de $Q_X(\Omega)$, $\tilde{\imath}(K)$ est également séparable (hérédité de la séparabilité dans les espaces métriques). Il existe une suite (u_n) de K telle que $(\tilde{u}_n)$ soit dense dans $\tilde{\imath}(K)$. Soit (g_n) la suite de K définie par $g_1 = u_1$ et $g_n = u_n \wedge g_{n-1}$ pour tout $n > 1$; la suite (g_n) est alors décroissante donc $\tilde{g}_n$ décroit quasi-partout vers une fonction g et on vérifie que g est quasi-s.c.s.

D'après la densité de $(\tilde{u}_n)$ dans $\tilde{\imath}(K)$, on a

$$\tilde{\imath}(K) \subset \{ \tilde{u} \in Q_X(\Omega) ; \tilde{u} \geq g \quad \text{q.p.} \}$$

donc $K \subset \{ u \in X ; \tilde{u} \geq g \quad \text{q.p.} \} = K_g$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $u \in K_g$ et z une solution de $\min \{ \| v - u \|^2 ; v \in K \}$. D'après le lemme 3.3, notant F l'application de dualité de X, il existe $w \in F(z - u) \cap X^{*+}$ tel que, pour tout $v \in K$

$$(w, v - z) \geq 0, \text{ c'est-à-dire } \quad \| z - u \|^2 \leq (w, v - u)$$

D'après la proposition 2.21, en désignant par μ la mesure de $E^{+}(X)$ associée à w,

$$\| z - u \|^2 \leq (w, g_n - u) = \int (\tilde{g}_n - \tilde{u}) d\mu \quad , \text{pour tout } n.$$

Puisque $\tilde{g}_n$ décroît vers g quasi-partout donc μ presque partout (cf. 2.21) on obtient en appliquant le théorème de convergence monotone $\| z - u \| \leqslant 0$, c'est-à-dire $z = u$.

Ainsi $K = K_g$.

Démonstration de b). Supposons que u est solution de (I). D'après le lemme 3.3, il existe $w \in \partial\phi(u)$ tel que $w - f \in X^{*+}$ et $(w - f, v - u) \geqslant 0$ pour tout $v \in K$. D'après la proposition 2.21, il existe une mesure $\mu \in E^+(X)$ associée à $w - f$ et puisque $\tilde{u} \geqslant g$ q.p. donc μ- p.p., on a $\int (\tilde{u} - g) d\mu \geqslant 0$. D'autre part, d'après a), il existe une suite (g_n) de K telle que $\tilde{g}_n$ décroît vers g q.p.. Or

$$0 \leqslant (w - f, g_n - u) = \int (\tilde{g}_n - \tilde{u}) d\mu$$

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, $\int (g - \tilde{u}) d\mu \geqslant 0$.

Par conséquent $\int (\tilde{u} - g) d\mu = 0$.

Réciproquement supposons qu'il existe $w_\mu \in (\partial\phi(u) - f) \cap X^{*+}$ tel que $\int_\Omega (\tilde{u} - g) d\mu = 0$. Soit $w \in \partial\phi(u)$ tel que $w_\mu = w - f$. Quel que soit $v \in K$

$$(w - f, v - u) = \int (\tilde{v} - \tilde{u}) d\mu = \int (\tilde{v} - g) d\mu + \int (g - \tilde{u}) d\mu = \int (\tilde{v} - g) d\mu \geqslant 0,$$

car $\tilde{v} \geqslant g$ q.p. donc μ-p.p.

Ainsi u est solution de (I).

Remarque. Dans le cas particulier où X est un espace de Dirichlet à forme coercive la caractérisation précédente d'un convexe unilatéral a été obtenue par A. Ancona et F. Mignot (cf. [19]) et la caractérisation des solutions de (I) lorsque $\partial\phi$ est l'opérateur linéaire associé à cette forme coercive a été démontrée par O. Nakoulima (cf. [22]).

Généralisation. Soit A un opérateur de X dans X^* et K un convexe unilatéral. Alors $u \in K$ est solution de

$$\forall v \in K \ , \ (Au - f, v - u) \geqslant 0$$

ssi $Au - f$ contient une mesure positive d'énergie finie μ telle que $\int (\tilde{u} - g) d\mu = 0$ (La démonstration du théorème 3.2. b) est valable dans ce cas). L'I.V. précédente a été une solution par exemple si A est un opérateur monotone coercif hémicontinu.

b) Application au théorème d'équilibre

Nous étudions plus particulièrement le problème variationnel à partir duquel est définie la capacité d'un ensemble quelconque. Nous supposons que X est strictement convexe, situation à laquelle on peut toujours se ramener en renormant l'espace ; les fonctions quasicontinues sont inchangées par un renormage.

THEOREME 3.4. *Soit* A *un ensemble quelconque de* Ω *(de capacité finie).*

Alors $C_X(A) = \min_{u \in K_A} \| u \|$ où K_A *est le convexe unilatéral suivant :*

$$K_A = \{ u \in X ; \tilde{u} \geq 1 \quad \text{q.p. } sur\ A \}.$$

L'unique élément u *de norme minimum de* K_A *est un potentiel pur, appelé potentiel d'équilibre de* A, *la mesure* μ *d'énergie finie associée est dite mesure d'équilibre,* u *est noté* u_μ . *Ils vérifient :*

i) $0 \leq u_\mu$. *De plus si pour tout* $v \in X$, $T^1 v \in X$ *et* $\| T^1 v \| \leq \| v \|$ *où* $T^1 r = (r \wedge 1)^+$, *alors* $\tilde{u}_\mu = 1$ *q.p. sur* A *et* $0 \leq u_\mu \leq 1$.

ii) μ *est portée par* A .

iii) $C_X(A) = \| u_\mu \|$ *et si* A *est compact ceci est égal à* $\int_\Omega d\mu$.

Démonstration. Par définition, $C_X(A) = \text{Inf} \{ C_X(G) ; G \text{ ouvert}, G \supset A \}$.

D'après le lemme 2.17, pour tout ouvert G,

$$C_X(G) = \text{Min}_{u \in K_G} \| u \| \quad \text{avec } K_G = \{ u \in X / \tilde{u} \geq 1 \text{ q.p. sur } G \}$$

Par conséquent $C_X(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ ouvert}}} \inf_{u \in K_G} \| u \| = \inf_{\substack{u \in \cup K_G \\ G \supset A \\ G \text{ ouvert}}} \| u \| = \text{Min}_{u \in K} \| u \|$

avec $K = \bigcup_{\substack{G \text{ ouvert} \\ G \supset A}} K_G$. Montrons que $K = K_A = \{ u \in X / \tilde{u} \geq 1 \text{ q.p. sur } A \}$

Il est clair que K_A est un convexe fermé de X et que pour tout $G \supset A$, $K_G \subset K_A$; par conséquent $K = \cup K_G \subset K_A$; montrons l'inclusion inverse :

Soit $u \in K_A$; montrons que $u \in \overline{\bigcup_{\substack{G \supset A \\ G \text{ ouvert}}} K_G}$

Soit $\tilde{u}$ un représentant quasicontinu de u tel que $\tilde{u} \geq 1$ q.p. sur A. Pour tout $\epsilon > 0$, posons $u_\epsilon = (1 + \epsilon) u$; on a $\tilde{u}_\epsilon > 1$ q.p. sur A. D'autre part, $\tilde{u}_\epsilon$ étant quasicontinue il existe une suite d'ouverts $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $C_X(\omega_n) \downarrow 0$ et $\tilde{u}_\epsilon \restriction_{\Omega \setminus \omega}$ soit continue.

Il en résulte que $G_n = \{ \tilde{u}_\epsilon > 1 \} \cup \omega_n$ est un ouvert qui contient A.

D'après le lemme 2.17, il existe $v_n \in X^+$ tel que $\tilde{v}_n \geq 1$ q.p. sur ω_n et $\| v_n \| = C_X(\omega_n)$.

On a donc $v_n \to 0$; remarquant que $u_\epsilon + v_n \in K_{G_n}$, on déduit

$$u_\epsilon + v_n \in \overline{\cup K_{G_n}} \quad \text{d'où ,} \quad u_\epsilon \in \overline{\cup K_{G_n}} \quad \text{et} \quad u \in \overline{\cup K_{G_n}} \subset \overline{\bigcup_{\substack{G \supset A \\ G \text{ ouvert}}} K_G}$$

On a donc $C_X(A) = \underset{u \in K_A}{\mathrm{Min}} \| u \|$ où K_A est un convexe unilatéral.

Notant S le sous différentiel de la norme, par application du théorème 3.2, l'unique élément u de norme minimum dans K_A est caractérisé par :

a) $S(u) \cap X^{**} \neq \phi$; notons μ la mesure d'énergie finie associée, $u = u_\mu$

b) $K_A = \{ u \in X / \tilde{u} \geqslant g_A$ quasi-partout $\}$ avec g_A quasi s.c.s., et $\int_\Omega (\tilde{u} - g_A) d\mu = 0$.

Il est clair que $g_A = -\infty$ sur $\Omega \setminus \bar{A}$: soit K compact $K \subset \Omega \setminus \bar{A}$; d'après le théorème d'Urysohn et la densité de $Y \cap C_c$ dans C_c, il existe $v \in Y \cap C_c$ tel que $v \geqslant 1$ sur K et $v = 0$ en dehors de $\Omega \setminus A$; puisque K_A est non vide, désignant par u_0 un élément fixe de K_A on a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 - n v \in K_A$ et donc $g_A \leqslant u_0 - n v$ sur K, ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$; par conséquent $g_A = -\infty$ quasi partout sur $\Omega \setminus \bar{A}$ et d'après b) $\Omega \setminus \bar{A}$ est donc un ouvert de nullité pour μ.
D'autre part si la contraction (T^1) opère on aura $T^1(u_\mu) = u_\mu$ et donc

$$\tilde{u}_\mu = 1 \text{ quasi-partout sur A.}$$

Il s'en suivra $\begin{cases} g_A = 1 & \text{quasi-partout sur A} \\ g_A = -\infty & \text{quasi-partout sur } \Omega \setminus \bar{A}. \end{cases}$

Montrons pour terminer iii) :

D'après le théorème 3.2, $\int_\Omega (\tilde{u} - g_A) d\mu = 0$ d'où $C_X(A) = \| u_\mu \| = (S(u), u_\mu) = \int \tilde{u}_\mu \, d\mu = \int g_A \, d\mu$; par conséquent

$$C_X(A) = \| u_\mu \| = \int_\Omega g_A \, d\mu$$

Si A est borélien, $C_X(A) \geqslant \mu(A)$ et dans le cas important où A est compact

$$C_X(A) = \int_\Omega d\mu .$$

COROLLAIRE 3.5. *La capacité* C_X *est une capacité généralisée au sens de Brelot c'est-à-dire que* C_X *est une application de* $P(\Omega)$ *dans* $\bar{\mathbb{R}}^+$

a) croissante

b) continue à droite sur les compacts : pour toute suite (K_n) *décroissante de compacts* $C_X(\cap K_n) = \inf C_X(K_n)$

c) Pour toute suite (A_n) *croissante de parties de* Ω, $C_X(\underset{n \in N}{\cup} A_n) = \sup C_X(A_n)$.

En particulier elle satisfait au théorème de capacitabilité de Choquet [11].

Démonstration. La seule chose à démontrer est b) : soit donc $A_n \uparrow A$; on peut supposer tous les $(A_n)_{n\in N}$ de capacité finie, sinon c'est évident ; d'après le théorème 3.4,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists\, u_n \in K_{A_n} \quad \text{tel que} \quad C_X(A_n) = \| u_n \| .$$

Il y a deux cas : ou bien les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne restent pas bornés auquel cas $\| u_n \| \to +\infty$ et l'on a bien $C_X(A) \geqslant C_X(A_n)$, $C_X(A) = +\infty$ et donc $C_X(A_n) \uparrow C_X(A)$; ou bien les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ restent bornés, alors il existe (n_k) telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$, les A_n étant croissants, on a : $\forall p \geqslant n$, $\tilde{u}_p \geqslant 1$ quasi partout sur A_n et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{u} \geqslant 1$ q.p. sur A_n.
Il s'ensuit que $\tilde{u} \geqslant 1$ quasi partout sur $\cup A_n = A$ et donc $u \in K_A$; par conséquent
$\lim C_X(A_n) \leqslant C_X(A) \leqslant \| u \| \leqslant \underline{\lim} \| u_{n_k} \| = \underline{\lim}\, C_X(A_{n_k}) = \lim C_X(A_n)$, et donc $C_X(A_n) \uparrow C_X(A)$.

3.2. INEQUATIONS VARIATIONNELLES AVEC CONTRAINTES BILATERALES

Lorsque K est un convexe bilatéral, nous démontrons qu'à la solution du problème $\min\{\phi(v) ; v \in K\}$ est associée une mesure d'énergie finie dont la partie positive (resp. négative) est concentrée sur l'ensemble de contact de la solution avec l'obstacle inférieur (resp. supérieur), les hypothèses essentielles étant que le convexe ait une «épaisseur» et que les troncatures opèrent par rapport à ϕ.

DEFINITION 3.6. *On dit que* K *est un convexe bilatéral de* X *si* K *est un convexe fermé non vide de* X *tel que quels que soient* u *et* v *dans* K, *le segment* $[u \wedge v, u \vee v]$ *soit contenu dans* K.

THEOREME 3.7. *Soit* K *un convexe bilatéral*

a) Il existe deux applications g *et* h *de* Ω *dans* $\overline{\mathbb{R}}$, g *quasi-s.c.s.* h *quasi-s.c.i. telles que* $K = \{u \in X ; g \leqslant \tilde{u} \leqslant h \text{ q.p.}\}$ *et il existe deux suites* (g_n) *et* (h_n) *de* K *telles que* $\tilde{g}_n \searrow g$ q.p. *et* $\tilde{h}_n \nearrow h$ q.p.

b) Soit ϕ *une application de* X *dans* $\mathbb{R}^+$ *strictement convexe continue telle que* $\lim\limits_{\|u\|\to+\infty} \phi(u) = +\infty$.
On suppose que :

(H₁) *Quels que soient* $\overline{\omega}$ *compact de* Ω, G *ouvert tel que* $G \supset \overline{\omega}$ *et* $v \in X$ *il existe* $z \in X$ *tel que* $\tilde{z} = \tilde{v}$ q.p. *sur* $\overline{\omega}$ *et* $\tilde{z} = 0$ q.p. *sur* $\Omega \setminus G$.

(H₂) $K \cap C_c(\Omega) \neq \phi$.

(H₃) *Quel que soit* G *ouvert relativement compact il existe* $\delta^G > 0$, v_1^G *et* v_2^G *dans* K *tels que* $\tilde{v}_2^G - \tilde{v}_1^G \geqslant \delta^G$ q.p. *sur* G.

(H₄) *Il existe* $p_0 \in \mathbb{N}$ *tel que quel que soit* $p \geqslant p_0$ *et* $u \in X$, $T_p u \in X$ *et* $\phi(T_p u) \leqslant \phi(u)$ *où* T_p *est la contraction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $T_p(r) = (|r| \wedge p)\, \text{sign}\, r$ *et* $T_p u$ *défini par* $\widetilde{T_p u} = T_p \tilde{u}$.

Soit u *la solution de min* $\{\phi(v)\ ;\ v \in K\}$. *Alors il existe* $w \in \partial\,\phi(u)$ *associé à une mesure d'énergie finie* μ *telle que*

$$\int_\Omega (\tilde{u} - g)\,d\mu^+ = \int_\Omega (h - \tilde{u})\,d\mu^- = 0.$$

Démonstration de a). Puisque K est bilatéral $K + X^+$ et $-K + X^+$ sont des convexes unilatéraux et $K = (K + X^+) \cap (-K + X^+)$. D'après le théorème 3.2, il existe g quasi-s.c.s. telle que $K + X^+ = \{u \in X\ ;\ \tilde{u} \geq g \text{ q.p.}\}$ et $-h$ quasi-s.c.s. telle que $-K + X^+ = \{u \in X\ ;\ \tilde{u} \geq -h \text{ q.p.}\}$. Par conséquent

$$K = \{u \in X\ ;\ g \leq \tilde{u} \leq h \text{ q.p.}\}$$

De plus d'après le théorème 3.2, il existe une suite (g'_n) de $K + X^+$ telle que $\tilde{g}'_n \searrow g$ q.p.. Soit $u_0 \in K$. Alors la suite $g_n = g'_n \wedge u_0$ est dans K et $\tilde{g}_n \searrow g$ q.p.. De même pour (h_n).

Démonstration de b). Soit u la solution de min $\{\phi(v)\ ;\ v \in K\}$. D'après le lemme 3.3, il existe $w \in \partial\,\phi(u)$ tel que $(w, v - u) \geq 0$ pour tout $v \in K$.

Montrons qu'à w est associée une mesure d'énergie finie. Soit G un ouvert relativement compact de Ω et $v \in X \cap C_c(G)$ telle que $\sup_{x \in \Omega} |v(x)| \leq 1$. D'après (H_3) il existe $\delta^G > 0$, v_1^G, $v_2^G \in K$ tels que $\tilde{v}_2^G - \tilde{v}_1^G \geq \delta^G$ q.p. sur G. Or $\frac{1}{2}(v_1^G + v_2^G) + \frac{1}{2}\delta^G\, v \in K$ car $\frac{1}{2}(v_1^G + v_2^G) \in K$ et que
$\tilde{v}_1^G \leq \frac{1}{2}(\tilde{v}_1^G + \tilde{v}_2^G) + \frac{1}{2}\delta^G\, v \leq \tilde{v}_2^G$ q.p. sur G.
Donc $(w, v_1^G + v_2^G + \delta^G v - 2u) \geq 0$.
Par conséquent il existe une constante a_G telle que, quel que soit $v \in X \cap C_c(G)$ tel que $\sup_{x \in \Omega} |v(x)| \leq 1$ on ait $|(w, v)| \leq \frac{a_G}{\delta^G}$.
Puisque $X \cap C_c(\Omega)$ est dense dans $C_c(\Omega)$, on en déduit l'existence d'une mesure de Radon μ telle que

$$(w, v) = \int v\,d\mu, \quad \text{pour tout} \quad v \in X \cap C_c(\Omega)$$

D'après le théorème de Jordan il existe M et N tels que $M \cup N = \Omega$, $M \cap N = \phi$ μ^+ portée par M et μ^- portée par N.

Montrons que $\int (\tilde{u} - g)\,d\mu^+ = 0$. D'après (H_2) il existe $v_0 \in K \cap C_c(\Omega)$. Soit $p \in N$ tel que $p > \sup_{x \in \Omega} |v_0(x)|$. On vérifie que $T_p(K) \subset K$. Il résulte alors de (H_4) que

$$\min\{\phi(v)\ ;\ v \in K\} = \min\{\phi(v)\ ;\ v \in T_p(K)\}$$

et que, puisque ϕ est strictement convexe, $u = T_p\, u$.
Soit $\bar{\omega}$ compact tel que $\bar{\omega} \subset M$. Soit $\epsilon > 0$ et G ouvert relativement compact contenant $\bar{\omega}$ tel que

$|\mu|(G \setminus \bar{\omega}) < \epsilon$. Soit (g_n) une suite de K telle que $\tilde{g}_n \searrow g$ q.p. (cf. a)). D'après (H_1) il existe une suite (z_n) de X telle que

$$\tilde{z}_n = \tilde{u} \text{ q.p. sur } \Omega \setminus G \text{ et } \tilde{z}_n = \tilde{u} \wedge T_p \tilde{g}_n \text{ q.p. sur } \bar{\omega}$$

Soit $v_n = z_n - (z_n - u)^+ + (u \wedge T_p g_n - z_n)^+$. On a alors

$$u \wedge T_p g_n \leqslant v_n \leqslant u, \text{ donc } v_n \in T_p(K)$$

et $\tilde{v}_n - \tilde{u} = 0$ q.p. sur $\Omega \setminus G$ et $\tilde{v}_n - u = -(\tilde{u} - T_p \tilde{g}_n)^+$ q.p. sur $\bar{\omega}$.

Comme $|\tilde{v}_n - \tilde{u}| \leqslant 4p$ q.p., que $\tilde{v}_n - \tilde{u} = 0$ q.p. sur $\Omega \setminus G$ et que G est relativement compact, il existe $\theta \in Y$ tel que $|\tilde{v}_n - \tilde{u}| \leqslant \theta$ q.p.

D'après la proposition 2.22, $\tilde{v}_n - \tilde{u}$ est μ -intégrable et donc

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (w, v_n - u) &= \int_\Omega (\tilde{v}_n - \tilde{u}) d\mu \\ &= \int_{\bar{\omega}} -(\tilde{u} - T_p \tilde{g}_n)^+ d\mu^+ + \int_{G \setminus \bar{\omega}} (\tilde{v}_n - \tilde{u}) d\mu \end{aligned}$$

Par suite, $\int_{\bar{\omega}} (\tilde{u} - T_p \tilde{g}_n)^+ d\mu^+ \leqslant 4p\, |\mu|\, (G \setminus \bar{\omega}) \leqslant 4p\epsilon$

Ceci étant vrai quel que soit $\epsilon > 0$ il s'ensuit que

$$\int_{\bar{\omega}} (\tilde{u} - T_p \tilde{g}_n)^+ d\mu^+ = 0$$

Or $T_p \tilde{g}_n \searrow T_p g$ q.p. donc μ^+ – p.p. d'après la proposition 2.22.

D'après le théorème de convergence monotone, en faisant tendre n vers l'infini puis p vers l'infini on obtient

$$\int_{\bar{\omega}} (\tilde{u} - g)^+ d\mu^+ = \int_{\bar{\omega}} (\tilde{u} - g) d\mu^+ = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $\bar{\omega} \subset M$, il en résulte que

$$\int_\Omega (\tilde{u} - g) d\mu^+ = \int_M (\tilde{u} - g) d\mu^+ = 0$$

De la même façon on montrerait que $\int_\Omega (h - \tilde{u}) d\mu^- = 0$.

Remarques.

1) - En général μ^+ et μ^- ne sont pas d'énergie finie. Lorsque l'on peut justifier les calculs suivants, la réciproque du théorème est vraie : en effet, formellement, quel que soit $v \in K$,

$$(w_\mu\ , v-u) = \int (\tilde{v}-\tilde{u})d\mu = \int (\tilde{v}-\tilde{u})d\,\mu^+ - \int (\tilde{v}-\tilde{u})d\,\mu^-$$
$$= \int (\tilde{v}-g)d\,\mu^+ + \int (g-\tilde{u})d\,\mu^+ - \int (\tilde{v}-h)d\,\mu^- - \int (h-\tilde{u})d\mu^-$$
$$= \int (\tilde{v}-g)d\,\mu^+ + \int (h-\tilde{v})d\,\mu^- \geq 0.$$

2) - L'hypothèse (H_1) est vérifiée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 1)$.

Elle est à rapprocher de l'hypothèse «d'existence de multiplicateurs séparant les points de Ω» de A. Beurling, J. Deny.

3) - Lorsque $X = H_0^1(\Omega)$ ou $H^1(\Omega)$ et $\partial\phi$ est un opérateur linéaire associé à une forme bilinéaire continue coercive sur X, un résultat analogue au théorème précédent a été obtenu par 0. Nakoulima qui le déduit de la caractérisation des solutions de l'I.V. unilatérale en utilisant un système d'I.Q.V. unilatérales (cf. [22]).

COROLLAIRE 3.8. (THEOREME DU CONDENSATEUR)

On suppose que les hypothèses (H_1) *et* (H_4) *avec* $p_0 = 1$ *sont vérifiées et que* $\phi(u^+) \leq \phi(u)$ *pour tout* $u \in X$. *Soient* G_0 *et* G_1 *deux ouverts de* Ω *tels que* G_1 *soit relativement compact et* $\overline{G}_0 \cap \overline{G}_1 = \emptyset$. *Alors il existe un* ϕ*-potentiel* u_μ *tel que* $0 \leq u_\mu \leq 1$, $\tilde{u}_\mu = 0$ q.p. *sur* G_0, $\tilde{u}_\mu = 1$ q.p. *sur* G_1.

De plus u_μ *est l'élément de* ϕ*-énergie minimum parmi tous les éléments du convexe bilatéral*
$K = \{ v \in X\ ; \tilde{v} \leq 0$ q.p. *sur* G_0 *et* $\tilde{v} \geq 1$ q.p. *sur* $G_1 \}$.

Démonstration. Le convexe K est bien bilatéral. Montrons que les hypothèses (H_2) et (H_3) du théorème 3.7 sont satisfaites. Soit G un ouvert relativement compact de Ω et $\delta \in]0\ 1[$. Soit ω_1 un ouvert relativement compact tel que $\overline{G}_1 \subset \omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \Omega \setminus \overline{G}_0$. D'après le lemme d'Urysohn et la densité de Y dans $C_c(\Omega)$ il existe v_0 et v_1 dans Y tels que

$$v_0 \geq 1 + \delta \text{ sur } \overline{\omega}_1, v_0 = 0 \text{ sur } \overline{G}_0\,, v_0 \geq 0$$

et $$v_1 \geq 1 \text{ sur } \overline{G}_1\,, v_1 \leq -\delta \text{ sur } (\Omega \setminus \omega_1) \cap \overline{G}\,, v_1 \leq 0 \text{ sur } G_0.$$

Soit $v_1' = T_1\, v_1$. Alors $v_1' \in Y$, $v_1' = 1$ sur $\overline{G}_1$, $v_1' \leq -\delta$ sur $(\Omega \setminus \omega_1) \cap \overline{G}$, $v_1' \leq 0$ sur G_0 et $|v_1'| \leq 1$.

Par conséquent v_0 et v_1' appartiennent à K et

$$v_0 - v_1' \geq 1 + \delta - 1 = \delta \quad \text{sur } \overline{\omega}_1$$
$$v_0 - v_1' \geq -v_1 \geq \delta \quad \text{sur } (\Omega \setminus \omega_1) \cap \overline{G}$$

donc $v_0 - v_1' \geq \delta$ sur G.

Ainsi (H_2) et (H_3) sont vérifiées.

D'après le théorème 3.7, il existe g quasi-s.c.s. et h quasi-s.c.i. telles que $K = \{ v \in X\ ; g \leq \tilde{v} \leq h \text{ q.p.} \}$ Comme dans le théorème d'équilibre 3.4 on montre que $g = -\infty$ sur $\Omega \setminus \overline{G}_1$ et $h = +\infty$ sur $\Omega \setminus \overline{G}_0$. La solution de min $\{ \phi(v)\ ; v \in K \}$ est un ϕ-potentiel u_μ et puisque $\phi(u^+) \leq \phi(u)$ et $\phi(T_1\, u) \leq \phi(u)$, on a

$u_\mu = u_\mu^+ = T_1\, u_\mu$ donc $0 \leqslant u_\mu \leqslant 1$, $\tilde{u}_\mu = 0$ q.p. sur G_0 et $\tilde{u}_\mu = 1$ q.p. sur G_1. De plus puisque μ^+ ne charge pas le quasi-ouvert $\{ \tilde{u}_\mu > g \}$ et que $g = -\infty$ sur $\Omega \setminus \overline{G}_1$, la mesure μ^+ est portée par $\overline{G}_1$. De même μ^- est portée par $\overline{G}_0$.

Remarque. 1) Si on ajoute à l'hypothèse (H_1) que quel que soit $v \in Y$ il existe $z \in Y$ tel que $z = v$ q.p. sur $\overline{G}_1$ et $z = 0$ dans un voisinage de $\overline{G}_0$ et $\| z \| \leqslant \| v \|$, alors μ^+ est d'énergie finie. En effet, quel que soit $v \in Y$,

$$\int_\Omega v\, d\mu^+ = \int_{\overline{G}_1} v\, d\mu^+ = \int_{\overline{G}_1} z\, d\mu^+ = \int_\Omega z\, d\mu = (w_\mu , z)$$

d'où $\left| \int_\Omega v\, d\mu^+ \right| \leqslant \| w_\mu \| \; \| z \| \leqslant \| w_\mu \| \; \| v \|$.

2) Le corollaire 3.8 est à rapprocher d'un principe du condensateur démontré par N. Kenmochi et Y. Mizuta (cf. [17]).

3.3. CONVERGENCE DE SOLUTIONS D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES UNILATERALES

Dans [4] on étudie le problème de la convergence des solutions de l'I.V. avec obstacle et l'on montre en particulier le résultat suivant :
Soit $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\phi(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\, dx$ où f est une application de $\Omega \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurable sur Ω, convexe continue sur $\mathbb{R}^N$ telle que $f(.,0) = 0$ et il existe $\lambda > 0$ tel que $0 \leqslant f(x,s) \leqslant \lambda\, |s|^p$. Soit (K_{g_n}), K_g une suite de convexes unilatéraux de X. Si K_{g_n} converge vers K_g au sens de Mosco, alors

$$\phi + I_{K_g} = \Gamma^-(w - W_0^{1,p}) \lim (\phi + I_{K_{g_n}})$$

(la notion de Γ^- convergence est introduite par De Giorgi).

Nous démontrons ici une condition suffisante pour que (K_{g_n}) converge vers K_g au sens de Mosco.

Rappelons que étant données ϕ^n et ϕ des applications de X dans $]-\infty + \infty]$ convexes s.c.i. propres, on dit que ϕ^n converge vers ϕ au sens de Mosco dans X si

. $\forall x \in D(\phi) \quad \exists x_n \in D(\phi^n) : x_n \to x ,\ \phi^n(x_n) \to \phi(x)$

. $\forall (x_n) \quad (x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \phi(x) \leqslant \underline{\lim}\ \phi^n(x_n))$.

THEOREME 3.9. *On suppose que l'application* $u \to u^+$ *est continue de* X *dans* X. *Soient* K_{g_n}, K_g *une suite de convexes unilatéraux tels que* $g_n = g = 0$ *sur le complémentaire d'un ouvert relativement compact* Ω_0 *indépendant de* n.
Si (g_n) *converge vers* g *en capacité et s'il existe* $V \in K_g$ *et* $V_n \in K_{g_n}$ *telle que* (V_n) *converge vers* V *dans* X, *alors* (K_{g_n}) *converge vers* K_g *au sens de Mosco dans* X.

Démonstration. Elle comprend trois parties :

a) Soient $v_n \in K_{g_n}$ tels que $v_n \rightharpoonup v$ dans $w - X$. Montrons que $v \in K_g$. Il existe une combinaison convexe (u_n) de (v_n) telle que $u_n \to v$ dans X. Soit $\epsilon > 0$ et $E^n_\epsilon = \{ |g_n - g| \geqslant \epsilon \}$. Puisque (g_n) converge vers g en capacité, $C_X(E^n_\epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme $\tilde{v}_n \geqslant g_n$ q.p.,

$$\tilde{v}_n + \epsilon \geqslant g \quad \text{q.p. sur } \Omega \setminus E^n_\epsilon .$$

Donc quel que soit $n \geqslant n_0$, $\tilde{u}_n + \epsilon \geqslant g$ q.p.. sur $\Omega \setminus \bigcup_{n \geqslant n_0} E^n_\epsilon$.

Or $\tilde{u}_{n_k} \to \tilde{v}$ q.p. , par conséquent $\tilde{v} + \epsilon \geqslant g$ q.p. sur un ensemble de capacité arbitrairement petite. On en déduit que $\tilde{v} \geqslant g$ q.p.

b) Les propriétes à démontrer étant de nature topologique, on peut supposer que la norme de X est strictement convexe.

LEMME 3.10. *Soit* (V_n) *une suite de* X *qui converge vers* V *et* (E_n) *une suite de parties de* Ω *telle que* $C_X(E_n) \to 0$. *Soit* h_n *la solution de*

$$\min \{ \|h\| \; ; \; \tilde{h} \geqslant \tilde{V}_n \;\; \text{q.p. sur } E_n \}.$$

Alors $h_n \to 0$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si le résultat est vrai lorsque (E_n) est de plus décroissante alors il est vrai lorsque (E_n) est quelconque ; en effet supposons que (h_n) ne tende pas vers zéro ; il existe alors $\epsilon > 0$ et une sous suite (n_k) tels que $\| h_{n_k} \| > \epsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De la suite (E_{n_k}) on peut extraire une sous suite $(E_{n_{k_p}})$ que l'on notera (E_p) telle que $C_X(E_p) \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$. Soit $F_n = \bigcup_{p \geqslant n} E_p$. La suite (F_n) est alors décroissante, $C_X(F_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$ et

$$\epsilon \leqslant \|h_n\| = \min \{ \|h\| ; \tilde{h} \geqslant \tilde{V}_n \;\text{ q.p. sur } E_n \} \leqslant \min \{ \|h\| ; \tilde{h} \geqslant \tilde{V}_n \;\text{ q.p. sur } F_n \}$$

ce qui est impossible car le dernier min tend vers zéro.

Supposons donc que (E_n) est décroissante. Notons $\text{proj}_H\, u$ la projection de u sur le convexe H. Comme h_n est la projection de zéro sur $\{ h \in X \; ; \; \tilde{h} \geqslant \tilde{V}_n \text{ q.p. sur } E_n \}$, $h_n - V_n$ est la projection de $-V_n$ sur $H_n = \{ h \in X ; \tilde{h} \geqslant 0 \text{ q.p. sur } E_n \}$ c'est-à-dire $h_n - V_n = \text{proj}_{H_n}(-V_n)$.

Or puisque la suite (H_n) est croissante

$$\text{proj}_{H_n}(-V) \to \text{proj}_{\overline{\cup H_n}}(-V).$$

Par conséquent $\text{proj}_{H_n}(-V_n) \to \text{proj}_{\overline{\cup H_n}}(-V)$.

Montrons que quel que soit $u \in X$, $\text{proj}_{\overline{\cup H_n}}\, u = u$; il en résultera que $h_n - V_n \to -V$ donc que

$h_n \to 0$. Il suffit de la démontrer pour $u \in X \cap C_c$ puisque proj est continue. Soit p_n le potentiel capacitaire de E_n et $v = u + \| u \|_\infty \, p_n$. Alors $\| p_n \| = C_X(E_n) \to 0$ et $v \in H_n$. Par définition de proj,

$$(F(u - \text{proj}_{\overline{\cup H_n}} u) \, , \, v - \text{proj}_{\overline{\cup H_n}} u) \leqslant 0$$

c'est-à-dire $\| u - \text{proj}_{\overline{\cup H_n}} u \|^2 \leqslant (F(u - \text{proj}_{\overline{\cup H_n}} u) \, , - \| u \|_\infty \, p_n) \to 0$

donc $u = \text{proj}_{\overline{\cup H_n}} u$.

c) Soit $v \in K_g$. Montrons qu'il existe $v_n \in K_{g_n}$ telle que $v_n \to v$. Puisque (g_n) converge vers g en capacité il existe une suite (ϵ_n) décroissant vers zéro telle que $C_X(\Omega_o \cap \{ | g_n - g | \geqslant \epsilon_n \}) \leqslant \epsilon_n$.

Soit $E_n = \{ | g_n - g | \geqslant \epsilon_n \}$ et h_n tel que

$$\| h_n \| = \min \{ \| u \| \, ; \tilde{u} \geqslant \tilde{V}_n - \tilde{v} \ \text{ q.p. sur } E_n \} .$$

D'après le lemme 3.10, $h_n \to 0$ dans X donc par hypothèse $h_n^+ \to 0$ dans X. Soit $k \in Y$ tel que $k \geqslant 1$ sur Ω_o et $k \geqslant 0$ sur Ω. Définissons v_n par $v_n = v + h_n^+ + \epsilon_n k$. Alors $v_n \to v$ dans X et

$$\text{q.p. sur } E_n , \ \tilde{v}_n \geqslant \tilde{v} + \tilde{V}_n - \tilde{v} = \tilde{V}_n \geqslant g_n$$

$$\text{q.p. sur } \Omega_o \setminus E_n , \tilde{v}_n \geqslant \tilde{v} + \epsilon_n \geqslant g + \epsilon_n \geqslant g_n$$

$$\text{q.p. sur } \Omega \setminus \Omega_o , \tilde{v}_n \geqslant \tilde{v} \geqslant g = 0 = g_n .$$

Par conséquent $v_n \in K_{g_n}$.

4 - PROPRIETES DES SOLUTIONS DE (I) ET DES POTENTIELS

On étudie maintenant des propriétés des solutions de l'inéquation variationnelle unilatérale (I) liées à la forme de ϕ ; lorsque ϕ vérifie une hypothèse du type «la contraction module opère par rapport à ϕ en un sens non linéaire» on établit des principes classiques de théorie du potentiel. D'abord dans le cadre abstrait d'un espace de Banach réflexif réticulé on montre que la solution de (I) est la plus petite sursolution et on établit un principe de l'enveloppe inférieure. Ensuite dans le cadre d'un espace de Banach-Dirichlet réflexif on démontre le théorème du balayage, une formule duale pour la capacité et, lorsque toutes les contractions opèrent par rapport à ϕ, que la masse de la mesure associée à une solution de (I) minimise la masse des mesures de $\partial\phi(K) - f$.

4.1. PROPRIETES DES SOLUTIONS DE (I) DANS UN ESPACE DE BANACH REFLEXIF RETICULE

Dans ce paragraphe X est un espace de Banach réflexif muni d'une structure d'ordre réticulé. On suppose que le cône X^+ des éléments positifs est fermé dans X. Le dual X^* est muni de l'ordre dual : $w \geqslant 0$ ssi $(w, v) \geqslant 0$ pour tout $v \in X^+$.

Soit ϕ une application de X dans $\mathbb{R}$ convexe continue, K un convexe unilatéral de X et $f \in X^*$.

a) ϕ-POTENTIELS PURS. On étend la définition 2.23 à ce cadre abstrait.

DEFINITION 4.1. *Un élément* u *de* X *est dit ϕ-potentiel pur ssi* $\partial\phi(u) \cap X^{*+} \neq \emptyset$.

PROPOSITION 4.2. *Soit* $u \in X$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) u *est un ϕ-potentiel pur*

ii) u *est solution du problème min* $\{\phi(v)\ ; v \in C\}$ *où* $C = \{v \in X\ ; v \geqslant u\}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que C est un convexe fermé unilatéral.
Supposons i). Il existe $w \in \partial\phi(u) \cap X^{*+}$. Quel que soit $v \in C$,

$$\phi(v) \geqslant \phi(u) + (w\,, v - u) \geqslant \phi(u) \quad \text{d'où ii).}$$

Supposons ii). D'après le lemme 3.3, il existe $w \in \partial\phi(u) \cap X^{*+}$, d'où i).

COROLLAIRE 4.3. *On suppose que ϕ est strictement convexe et que pour tout* $v \in X$, $\phi(v^+) \leqslant \phi(v)$. *Alors l'ensemble des ϕ-potentiels purs est contenu dans* X^+.

Démonstration. Soit u un ϕ-potentiel pur. D'après la proposition 4.2, u est solution de min $\{\phi(v)\ ; v \in \{v \in X\ ; v \geqslant u\}\}$. Mais u^+ est aussi solution de ce problème car $\phi(u^+) \leqslant \phi(u)$. D'après la stricte convexité de ϕ, $u = u^+$.

b) SURSOLUTIONS

On suppose que X muni de sa structure d'ordre réticulé est plongé dans un espace Z muni d'une structure d'ordre réticulé.

DEFINITION 4.4. *Soit* $k \in Z$ *tel que pour tout* $u \in X$, $(u-k)^+ \in X^+$. *Un élément* $\bar{u}$ *de* X *sera dit* k-*sursolution de (I) ssi quel que soit* $v \in K$, $(\bar{u} + k) \wedge v \in K$ *et il existe* $\bar{w} \in \partial\phi(\bar{u})$ *tel que* $\bar{w} \geqslant f$. *Une* 0-*sursolution sera dite sursolution.*

REMARQUE 4.5. On vérifie immédiatement, compte du fait que K est unilatéral, que $\bar{u}$ est sursolution ssi $\bar{u} \in K$ et il existe $\bar{w} \in \partial\phi(\bar{u})$ tel que $\bar{w} \geqslant f$. D'après le lemme 3.3, une solution de (I) est une k-sursolution pour tout $k \in X^+$.

DEFINITION 4.6. *Soit* $k \in Z$ *tel que pour tout* $u \in X$, $(u-k)^+ \in X^+$. On *dira que ϕ vérifie* (H_k) *ssi*

$$(H_k): \quad \forall u\,,\ \hat{u} \in X\,,\ \phi(u - (u - \hat{u} - k)^+) + \phi(\hat{u} + (u - \hat{u} - k)^+) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u}).$$

(H_o) *que l'on notera* (H) *s'écrit encore* $\phi(u \wedge \hat{u}) + \phi(u \vee \hat{u}) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u})$.

Remarque 4.7. L'introduction d'éléments $k \notin X$ est justifiée par l'étude de (I) par exemple dans $X = W_0^{1,p}(\Omega)$; en effet, si k est une constante positive non nulle, alors k n'est pas nécessairement dans X mais pour tout $u \in X$, $(u-k)^+ \in X^+$.

LEMME 4.8. *Si ϕ vérifie (H_k), alors quels que soient $[u,v]$, $[\hat{u},\hat{w}] \in \partial\phi$, $(w - \hat{w}, (u-\hat{u}-k)^+) \geqslant 0$. Si de plus ϕ est strictement convexe $(w - \hat{w}, (u-\hat{u}-k)^+) = 0$ ssi $(u-\hat{u}-k)^+ = 0$.*

Démonstration. Soient $[u,w]$, $[\hat{u},\hat{w}] \in \partial\phi$. Par définition du sous-différentiel

$$\phi(u-(u-\hat{u}-k)^+) \geqslant \phi(u) - (w, (u-\hat{u}-k)^+)$$

et

$$\phi(\hat{u} + (u-\hat{u}-k)^+) \geqslant \phi(\hat{u}) + (\hat{w}, (u-\hat{u}-k)^+).$$

En ajoutant et appliquant (H_k), on obtient le premier résultat.

Supposons que $(w-\hat{w}, (u-\hat{u}-k)^+) = 0$. D'après (H_k) les deux inégalités précédentes sont des égalités. Donc si ϕ est strictement convexe, $(u-\hat{u}-k)^+ = 0$.

PROPOSITION 4.9. *Soit* $k \in Z$ *tel que pour tout* $u \in X$, $(u-k)^+ \in X^+$. On *suppose que ϕ vérifie* (H_k).

a) Si u *est solution de* (I) *et* $\bar{u}$ k-*sursolution de* (I), *alors* $u \wedge (\bar{u}+k)$ *est solution de* (I).

b) Si u *et* $\bar{u}$ *sont solutions de* (I) *et* $k \in X^+$, *alors* $(u-k) \vee \bar{u}$ *est solution de* (I).

c) On suppose de plus que ϕ vérifie (H). *Alors $\partial\phi$ satisfait à un «principe de l'enveloppe inférieure» c'est-à-dire quels que soient* $u, \hat{u} \in X$, $w \in \partial\phi(u)$ *et* $\hat{w} \in \partial\phi(\hat{u})$ *tels que* $w \wedge \hat{w}$ *existe, il existe* $w_1 \in \partial\phi(u \wedge (\hat{u}+k))$ *tel que* $w_1 \geqslant w \wedge \hat{w}$.

Démonstration de a) et b). Soient u une solution de (I) et $\bar{u}$ une k-sursolution de (I). D'après le lemme 3.3, il existe $w \in \partial\phi(u)$ tel que

$$(w-f, u-v) = 0 \text{, pour tout } v \in K, v \leqslant u ;$$

en particulier, pour $v = u \wedge (\bar{u}+k)$ on obtient

$$(w-f, u-u \wedge (\bar{u}+k)) = (w-f, (u-\bar{u}-k)^+) = 0$$

D'autre part, il existe $\bar{w} \in \partial\phi(\bar{u})$ tel que $\bar{w} \geqslant f$; d'où

$$(\bar{w}-f, (u-\bar{u}-k)^+) \geqslant 0.$$

Par conséquent $(w-\bar{w}, (u-\bar{u}-k)^+) \leqslant 0$ donc d'après le lemme 4.8

$$(w-\bar{w}, (u-\bar{u}-k)^+) = 0.$$

Ainsi $(w\,,\,(u-\bar{u}-k)^+) = (\bar{w}\,,\,(u-\bar{u}-k)^+) = (f\,,\,(u-\bar{u}-k)^+)$.

Par définition du sous-différentiel

$$\phi(u-(u-\bar{u}-k)^+) \geqslant \phi(u) - (w\,,\,(u-\bar{u}-k)^+)$$
$$\phi(\bar{u}+(u-\bar{u}-k)^+) \geqslant \phi(\bar{u}) + (\bar{w}\,,\,(u-\bar{u}-k)^+)$$

d'où en ajoutant

$$\phi(u-(u-u-k)^+) + \phi(u+(u-u-k)^+) \geqslant \phi(u) + \phi(u) + (w-w,(u-u-k)^+) = \phi(u) + \phi(u).$$

D'après (H_k) les trois inégalités précédentes sont des égalités. On a d'une part

$\phi(u-(u-\bar{u}-k)^+) = \phi(u) - (w\,,\,(u-\bar{u}-k)^+)$, c'est-à-dire

$\phi(u \wedge (\bar{u}+k)) - (f\,,\,u \wedge (\bar{u}+k)) = \phi(u) - (f\,,\,u)$, ce qui signifie que $u \wedge (\bar{u}+k)$ qui appartient à K est solution de (I).

D'autre part

$\phi(\bar{u}+(u-\bar{u}-k)^+) = \phi(\bar{u}) + (\bar{w}\,,\,(u-\bar{u}-k)^+)$, c'est-à-dire

$\phi((u-k) \vee \bar{u}) - (f\,,\,(u-k) \vee \bar{u}) = \phi(\bar{u}) - (f\,,\,\bar{u})$

donc si $\bar{u}$ est de plus solution de (I), alors $(u-k) \vee \bar{u}$ est aussi solution.

Démonstration de c). Soient $u, \hat{u} \in X$, $w \in \partial\phi(u)$ et $\hat{w} \in \partial\phi(\hat{u})$ tels que $w \wedge \hat{w}$ existe. Soit $C = \{ v \in X \,;\, v \geqslant u \wedge (\hat{u}+k) \}$. Alors C est un convexe fermé unilatéral donc il existe v_0 solution de

$$(P) \quad \begin{cases} v_0 \in C \\ \forall\, v \in C\,,\ \phi(v) \geqslant \phi(v_0) + (w \wedge \hat{w}\,,\, v - v_0) \end{cases}$$

Comme $u \in C$ et $w \geqslant w \wedge \hat{w}$, u est sursolution de (P), donc, d'après a), puisque ϕ vérifie (H), $v_0 \wedge u$ est solution de (P).

De plus $\hat{u}$ est k-sursolution de (P) car $\hat{w} \geqslant w \wedge \hat{w}$ et quel que soit $v \in C$

$$(\hat{u}+k) \wedge v \geqslant u \wedge (\hat{u}+k) \wedge v \geqslant u \wedge (\hat{u}+k).$$

Par conséquent, d'après a), puisque ϕ vérifie (H_k), $v_0 \wedge u \wedge (\hat{u}+k)$ est solution de (P). Comme $v_0 \geqslant u \wedge (\hat{u}+k)$, $v_0 \wedge u \wedge (\hat{u}+k) = u \wedge (\hat{u}+k)$, donc $u \wedge (\hat{u}+k)$ est solution de (P). D'après le lemme 3.3, il existe $w_1 \in \partial\phi(u \wedge (\hat{u}+k))$ tel que $w_1 \geqslant w \wedge \hat{w}$.

COROLLAIRE 4.10. *On suppose que ϕ vérifie* (H_k) *et que ϕ est strictement convexe. Soit* $\hat{K}$ *un convexe fermé non vide unilatéral de X tel que*

$$\forall v \in \hat{K}, \ \forall u \in K, (v+k) \wedge u \in K.$$

Soit u *la solution de* (I) *et* $\hat{u}$ *la solution de*

$$(\hat{I}) \quad \begin{cases} \hat{u} \in \hat{K} \\ \forall v \in \hat{K}, \phi(v) \geqslant \phi(\hat{u}) + (f, v - \hat{u}). \end{cases}$$

Alors $u \leqslant \hat{u} + k$.

Démonstration. D'après le lemme 3.3, il existe $\hat{w} \in \partial\phi(\hat{u})$ tel que $\hat{w} \geqslant f$ et par hypothèse quel que soit $v \in K$, $(\hat{u}+k) \wedge v \in K$. Par conséquent $\hat{u}$ est k-sursolution de (I). D'après la proposition 4.9. a), $u \wedge (\hat{u}+k)$ est solution de (I). D'après l'unicité $u = u \wedge (\hat{u}+k)$ et ainsi $u \leqslant \hat{u} + k$.

COROLLAIRE 4.11. *On suppose que ϕ vérifie* (H).

a) Si u *est solution de* (I) *et* $\bar{u}$ *sursolution de* (I), *alors* $u \wedge \bar{u}$ *est solution de* (I).

b) L'ensemble des solutions de (I) *est un convexe fermé borné non vide, inf-stable et sup-stable.*

c) L'ensemble des sursolutions est inf-stable.

d) Si de plus ϕ est strictement convexe, la solution de (I) *est la plus petite sursolution de* (I).

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4.9 avec $k = 0$.

Remarque 4.12. Lorsque K est sup-stable et tel que $K - X^+ \subset K$, on définit de manière analogue une notion de sous solution du problème (I). On obtient en particulier, lorsque ϕ vérifie (H) et est strictement convexe, que la solution de (I) est la plus grande soussolution de (I).

COROLLAIRE 4.13. *On suppose que ϕ vérifie* (H_k) *et* (H). *Si* u_1 *et* u_2 *sont deux ϕ-potentiels purs, alors* $u_1 \wedge (u_2 + k)$ *est encore un ϕ-potentiel pur. En particulier si ϕ vérifie* (H), *l'ensemble des ϕ-potentiels purs est inf-stable.*

Démonstration. Il existe $w_1 \in \partial\phi(u_1) \cap X^{*+}$ et $w_2 \in \partial\phi(u_2) \cap X^{*+}$. D'après la proposition 4.9.c), il existe $w \in \partial\phi(u_1 \wedge (u_2 + k))$ tel que $w \geqslant w_1 \wedge w_2$. Donc $u_1 \wedge (u_2 + k)$ est un ϕ-potentiel pur.

PROPOSITION 4.14. *On suppose que ϕ est strictement convexe et vérifie* (H_k). *Soient* u_1 *et* u_2 *tels qu'il existe* $w_1 \in \partial\phi(u_1)$ *et* $w_2 \in \partial\phi(u_2)$ *tels que* $w_1 \leqslant w_2$. *Alors* $u_1 \leqslant u_2 + k$.

Démonstration. Puisque ϕ vérifie (H_k) et que $w_1 \leqslant w_2$, on a

$$(w_1 - w_2, (u_1 - u_2 - k)^+) = 0.$$

D'après le lemme 4.8, $u_1 \leqslant u_2 + k$.

c) ESTIMATION DUALE

Nous établissons maintenant une estimation duale due à Lewy, Stampacchia dans le cas linéaire et à U. Mosco (cf. [21]) dans le cas non linéaire.

PROPOSITION 4.15. *On suppose que* ϕ *est strictement convexe et vérifie* (H). *Soient* $g \in X$, $f \in X^*$, $w_g \in \partial\phi(g)$ *et* $K = \{u \in X \; ; u \geqslant g\}$. *On suppose que* $f \vee w_g$ *existe. Soit* u *la solution de* (I). *Alors il existe* $w_u \in \partial\phi(u)$ *tel que* $w_u \leqslant w_g \vee f$.

Démonstration. Soit $K_1 = \{z \in X \; ; z \leqslant u\}$ et z la solution du problème

$$\text{(P)} \qquad \min \{\phi(v) - (w_g \vee f, v) \; ; v \in K_1\}$$

D'après la remarque 4.12, il existe $w_z \in \partial\phi(z)$ tel que $w_z \leqslant w_g \vee f$ et comme $g \leqslant u$ et $w_g \leqslant w_g \vee f$, g est une soussolution de (P) donc $g \leqslant z$.

Montrons que u = z. Puisque u est solution de (I) il existe $w \in \partial\phi(u)$ tel que $(w - f, z - u) \geqslant 0$ et puisque z est solution de (P),

$$(w_z - w_g \vee f, u - z) \geqslant 0.$$

En ajoutant, $0 \leqslant (w - w_z, u - z) \leqslant (w_g \vee f - f, z - u) \leqslant 0$.

Donc, d'après la stricte monotonie de $\partial\phi$, u = z. Ainsi $w_z \in \partial\phi(u)$ et on a

$$w_z \leqslant w_g \vee f.$$

d) COMPARAISON DE SOLUTIONS APPROCHEES

PROPOSITION 4.16. *On suppose que* ϕ *vérifie* (H) *et est strictement convexe et on suppose qu'il existe* $\lambda_o > 0$ *tel que* $\partial(I_K)_{\lambda_o}$ *soit* T-*monotone. Pour tout* $\lambda > 0$, *soit* u_λ *la solution de*

$$(\text{II}_\lambda) \qquad \partial\phi(u_\lambda) + \partial(I_K)_\lambda(u_\lambda) \ni f.$$

Alors l'application $\lambda \to u_\lambda$ *est décroissante.*

Démonstration. Soient $0 < \lambda < \mu$, u_λ la solution de (II_λ) et u_μ la solution de (II_μ).

$$\begin{aligned}(\partial\phi(u_\mu) - \partial\phi(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) &= -(\partial(I_K)_\mu(u_\mu) - \partial(I_K)_\lambda(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) \\ &= -\frac{1}{\lambda}(\lambda\partial(I_K)_\mu(u_\mu) - \lambda\partial(I_K)_\lambda(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) \\ &= -\frac{1}{\lambda}(\mu\partial(I_K)_\mu(u_\mu) - \lambda\partial(I_K)_\lambda(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) \\ &\quad + \frac{\mu-\lambda}{\lambda}(\partial(I_K)_\mu(u_\mu), (u_\mu - u_\lambda)^+).\end{aligned}$$

Or $\mu\partial(I_K)_\mu = \lambda\partial(I_K)_\lambda = \lambda_0\,\partial(I_K)_{\lambda_0}$, donc

$$\begin{aligned}&(\mu\partial(I_K)_\mu(u_\mu) - \lambda\partial(I_K)_\lambda(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) \\ &\qquad = \lambda_0(\partial(I_K)_{\lambda_0}(u_\mu) - \partial(I_K)_{\lambda_0}(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) \geqslant 0\end{aligned}$$

et $(\partial(I_K)_\mu(u_\mu), (u_\mu - u_\lambda)^+) \leqslant 0$, car il existe $u \in K$ tel que $\partial(I_K)_\mu(u_\mu) \subset \partial I_K(u)$ et $(\partial I_K(u), v) \leqslant 0$ pour tout $v \in X^+$ (car $K + X^+ \subset K$).

Donc $(\partial\phi(u_\mu) - \partial\phi(u_\lambda), (u_\mu - u_\lambda)^+) \leqslant 0$. D'après le lemme 4.8, $(u_\mu - u_\lambda)^+ = 0$ c'est-à-dire $u_\mu \leqslant u_\lambda$.

Remarques. a) Si l'application de dualité F de X vérifie l'hypothèse

$$(R) : (F(x-x_1) - F(y-y_1), (x-y)^+ - (x_1-y_1)^+) \geqslant 0$$

pour tout x, y, x_1 et y_1 dans X

alors, pour tout $\lambda > 0$, $\partial(I_K)_\lambda$ est T-monotone.

En effet, remarquons d'abord que, K étant stable pour l'inf et le sup, I_K vérifie (H) et donc, d'après le lemme 4.8, ∂I_K est T-monotone.
Montrons de façon générale que si F vérifie la condition précédente on a l'implication : pour tout opérateur A maximal monotone de X dans X^*

$$(A \ \text{T-monotone}) \Rightarrow (\forall\lambda > 0, A_\lambda \ \ \text{T-monotone});$$

en effet, quels que soient $u, v \in X$,

$$\begin{aligned}(A_\lambda u - A_\lambda v, (u-v)^+) &= \frac{1}{\lambda}(F(u - J_\lambda u) - F(v - J_\lambda v), (u-v)^+) \\ &\geqslant \frac{1}{\lambda}(F(u - J_\lambda u) - F(v - J_\lambda v), (J_\lambda u - J_\lambda v)^+), \text{ d'après (R)} \\ &= (A_\lambda u - A_\lambda v, (J_\lambda u - J_\lambda v)^+) \geqslant 0,\end{aligned}$$

car $A_\lambda u \in A(J_\lambda u)$ et A est T-monotone.

b) Si X est un espace de Hilbert muni d'une structure d'espace de Riesz telle que $(x^+, x^-) = 0$ pour tout $x \in X$ et $(x, y) \geqslant 0$ pour tous $x, y \in X^+$, alors (R) est vérifiée ; en effet, pour tout $u, v \in X$

$$(u^+, v - u) = (u^+, v^+ - u^+) - (u^+, v^- - u^-) \leqslant \frac{1}{2} \| v^+ \|^2 - \frac{1}{2} \| u^+ \|^2$$

par conséquent $u^+ \in \partial(\frac{1}{2} \| u^+ \|^2)$; il s'ensuit que $(v^+ - u^+, v - u) \geqslant 0$ d'où (R).

4.2. ETUDE DES POTENTIELS

Dans ce paragraphe X est un espace de Banach-Dirichlet réflexif.

PROPOSITION 4.17. (THEOREME DU BALAYAGE)

On suppose que ϕ est strictement convexe, continue, que $\lim_{\|u\| \to +\infty} \phi(u) = +\infty$ *et que ϕ vérifie* (H).
Soit G *un ouvert de* Ω *et* u_μ *un ϕ-potentiel pur.*

Alors il existe un unique ϕ-potentiel pur $u_{\mu'}$ *vérifiant*

i) $\tilde{u}_{\mu'} = \tilde{u}_\mu$ q.p. *sur* G

ii) μ' *est à support dans* G

iii) si u_ν *est un ϕ-potentiel pur tel que* $\tilde{u}_\nu \geqslant \tilde{u}_\mu$ q.p. *sur* G *alors* $u_\nu \geqslant u_{\mu'}$ *; en particulier* $u_\mu \geqslant u_{\mu'}$.

De plus $u_{\mu'}$ *est l'unique élément d'énergie minimum du convexe unilatéral*

$$F = \{ v \in X \; ; \tilde{v} \geqslant \tilde{u}_\mu \quad \text{q.p. sur } G \}$$

$u_{\mu'}$ *est appelé ϕ-potentiel balayé de* u_μ *sur* G *et* μ' *la mesure balayée de* μ *sur* G.

Démonstration. Puisque F est un convexe unilatéral, il existe (cf. théorème 3.2) g quasi-s.c.s. telle que

$$F = \{ v \in X \; ; \; \tilde{v} \geqslant g \quad \text{q.p.} \}$$

Nécessairement $g = \tilde{u}_\mu$ q.p. sur G et $g = -\infty$ sur $\Omega \setminus \overline{G}$. Soit u' la solution de min $\{ \phi(v) \; ; v \in F \}$. D'après le théorème 3.2, u' est un potentiel pur $u_{\mu'}$ et $\int (\tilde{u}' - g) d\mu' = 0$. Par conséquent μ' est à support dans $\overline{G}$.

Soit u_ν un ϕ-potentiel pur tel que $\tilde{u}_\nu \geqslant \tilde{u}_\mu$ q.p. sur G. On a d'une part $\tilde{u}_\nu \wedge \tilde{u}_{\mu'} \geqslant \tilde{u}_\mu$ q.p. sur G donc $\phi(u_\nu \wedge u_{\mu'}) \geqslant \phi(u_{\mu'})$ et d'autre part $u_\nu \wedge u_{\mu'}$ est un ϕ-potentiel pur d'après le corollaire 4.13, donc $\phi(u_{\mu'}) \geqslant \phi(u_\nu \wedge u_{\mu'})$ d'après la proposition 4.2. Par conséquent,

$$\phi(u_\nu \wedge u_{\mu'}) = \phi(u_{\mu'}) \text{ et donc } u_\nu \wedge u_{\mu'} = u_{\mu'} . \text{ Ainsi } u_\nu \geqslant u_{\mu'}.$$

Remarque. Ce résultat a été obtenu par N. Kenmochi et Y. Mizuta (cf. [18]) dans le cas d'un espace fonctionnel régulier et avec ϕ Gateaux-différentiable.

A la proposition suivante, on étend immédiatement le théorème d'équilibre 3.4 aux ϕ-potentiels et on donne une formulation duale de la capacité.

PROPOSITION 4.18. *On suppose que ϕ est strictement convexe continue, que* $\lim_{\|u\| \to +\infty} \phi(u) = +\infty$ *et que pour tout* $v \in X$, $\phi(T^1 v) \leqslant \phi(v)$ *où* $T^1(r) = (r \wedge 1)^+$

1) Soit $A \subset \Omega$. *La solution de* $\min \{ \phi(v) \,;\, v \in X, \tilde{v} \geqslant 1$ *q.p. sur* $A \}$ *est un ϕ-potentiel pur* u_μ *tel que* $\operatorname{supp} \mu \subset \bar{A}$ *et*

$$0 \leqslant u_\mu \leqslant 1 \quad \textit{et} \quad \tilde{u}_\mu = 1 \quad \textit{q.p. sur } A.$$

2) Soit K *un compact de* Ω. *Alors*

$$\min \{ \phi(v) \,;\, v \in X, \tilde{v} \geqslant 1 \ \text{ q.p. sur } K \} = \sup_{w \in P_K} \inf \{ \phi(v) \,;\, v \in X, (w, v) \geqslant 1 \}$$

où $P_K = \{ w_\nu \in X^{*+} \,;\, \operatorname{supp} \nu \subset K, \int d\nu = 1 \}$.
En particulier, pour $\phi(v) = \| v \|^p$ *où* $p \geqslant 1$,

$$\min \{ \| v \|^p \,;\, v \in X, \tilde{v} \geqslant 1 \ \text{ q.p. sur } K \} = \max_{w \in P_K} \frac{1}{\| w \|^p}.$$

Démonstration de 1). D'après le théorème 3.2, il existe g_A quasi-s.c.s. telle que $\{ v \in X \,;\, \tilde{v} \geqslant 1$ q.p. sur $A \} = \{ v \in X \,;\, \tilde{v} \geqslant g_A$ q.p.$\}$ et le problème $\min \{ \phi(v) \,;\, v \in X, \tilde{v} \geqslant 1$ q.p. sur $A \}$ admet une solution qui est un ϕ-potentiel pur u_μ. Comme au théorème 3.4, on montre que $\operatorname{supp} \mu \subset \bar{A}$. De plus $u_\mu = T^1 u_\mu$ et ainsi $0 \leqslant u_\mu \leqslant 1$ et $\tilde{u}_\mu = 1$ q.p. sur A.

Démonstration de 2). Quel que soit $w_\nu \in P_K$, si $v \in X$ et $\tilde{v} \geqslant 1$ q.p. sur K, alors $(w_\nu, v) = \int \tilde{v}\, d\nu \geqslant \int d\nu = 1$. Par conséquent

$$\min \{ \phi(v) \,;\, v \in X, \tilde{v} \geqslant 1 \ \text{ q.p. sur } K \} \geqslant \sup_{w \in P_K} \inf \{ \phi(v) \,;\, v \in X, (w, v) \geqslant 1 \}$$

Inversement, soit u_μ la solution de $\min \{ \phi(v) \,;\, \tilde{v} \geqslant 1$ q.p. sur $K \}$.
D'après 1), $0 \leqslant u_\mu \leqslant 1$, $\tilde{u}_\mu = 1$ q.p. sur K, $\operatorname{supp} \mu \subset K$ et $w_\mu \in \partial\phi(u)$. On a :

$$\begin{aligned} \min \{ \phi(v) \,;\, v \in X, \tilde{v} \geqslant 1 \ \text{ q.p. sur } K \} &= \phi(u_\mu) = (w_\mu, u_\mu) - \phi^*(w_\mu) \\ &= \max \{ (w_\nu, u_\mu) - \phi^*(w_\nu) \,;\, w_\nu \in X^{*+}, \operatorname{supp} \nu \subset K \} \\ &= \max \{ \textstyle\int d\nu - \phi^*(w_\nu) \,;\, w_\nu \in X^{*+}, \operatorname{supp} \nu \subset K \} \end{aligned}$$

$$= \sup_{w \in P_K} \sup_{\lambda > 0} [\lambda - \phi^*(\lambda w)]$$

$$= \sup_{w \in P_K} \sup_{\lambda > 0} \inf_{v \in X} [\lambda (1 - (w, v)) + \phi(v)]$$

$$\leqslant \sup_{w \in P_K} \sup_{\lambda > 0} \inf_{\substack{v \in X \\ (w,v) \geqslant 1}} [\lambda (1 - (w, v)) + \phi(v)]$$

$$\leqslant \sup_{w \in P_K} \inf \{ \phi(v) ; v \in X , (w, v) \geqslant 1 \}$$

Lorsque $\phi(v) = \| v \|^p$, la formule résulte de l'égalité

$$\inf \{ \| v \|^p ; v \in X , (w, v) \geqslant 1 \} = \frac{1}{\| w \|^p}$$

Remarque. Pour p = 2 (resp. p = 1) on retrouve l'expression duale de la capacité établie par J. Deny dans [12] (resp. P. Fowler dans [15]).

4.3. MINIMISATION DE LA MASSE TOTALE DE LA MESURE ASSOCIEE

PROPOSITION 4.19. *On suppose que* ϕ *est convexe continue coercive et que quel que soit* $T \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *telle que* $0 \leqslant T' \leqslant 1$ *et* $T(0) = 0$ *on ait*

$$(H_C) \quad \begin{cases} u \in X \Rightarrow Tu \in X \\ \phi(u - T(u - \hat{u})) + \phi(\hat{u} + T(u - \hat{u})) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u}) \text{ , pour tous } u, \hat{u} \in X. \end{cases}$$

Soit u *une solution de (I). D'après le théorème 3.2, il existe* $\mu \in (\partial\phi(u) - f) \cap E^+(X)$ *telle que* $\int (\widetilde{u-g}) d\mu = 0$. *Soit* $v \in K$ *telle que* $\partial\phi(v) - f$ *contienne une mesure* $\nu \in E^+(X)$, *autrement dit* v *est une sursolution.*

$$\textit{Alors} \int_{\{\tilde{u} \neq \tilde{v}\}} d\mu \leqslant \int_{\{\tilde{u} \neq \tilde{v}\}} d\nu$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'hypothèse (H_C) implique

$(w - \hat{w}, T(u - \hat{u})) \geqslant 0$ pour tous $[u, w], [\hat{u}, \hat{w}] \in \partial\phi$

Soit $w \in \partial\phi(u)$ tel que $w_\mu = w - f$ et $w_1 \in \partial\phi(v)$ tel que $w_\nu = w_1 - f$. Pour tout $a > 0$, on considère T_a définie par :

$$T_a(r) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si } r > a \\ \dfrac{r}{a} & , \quad \text{si } |r| \leqslant a \\ -1 & , \quad \text{si } r < -a \end{cases}$$

On a alors

$$(w - f, T_a(v-u)) = \int T_a(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\mu$$
$$(w_1 - f, T_a(v-u)) = \int T_a(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\nu$$

d'où, en retranchant,

$$\int T_a(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\mu - \int T_a(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\nu = (w - w_1, T_a(v-u)) \leqslant 0.$$

donc $\quad \int T_a(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\mu \leqslant \int T_a(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\nu \leqslant \int_{\{\tilde{u} \neq \tilde{v}\}} d\nu$

En faisant tendre a vers zéro et en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\int \operatorname{sign}_0(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\mu \leqslant \int_{\{\tilde{u} \neq \tilde{v}\}} d\nu$$

Or $\quad \int \operatorname{sign}_0(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\mu = \int_{\{\tilde{v} \neq \hat{\tilde{u}}\} \cap \{\tilde{\hat{u}} = g\}} \operatorname{sign}_0(\hat{\tilde{v}} - \tilde{\hat{u}})d\mu$

$$= \int_{\{\tilde{v} \neq \tilde{\hat{u}}\} \cap \{\tilde{\hat{u}} = g\}} d\mu = \int_{\{\tilde{v} \neq \tilde{\hat{u}}\}} d\mu$$

Donc $\quad \int_{\{\tilde{u} \neq \tilde{v}\}} d\mu \leqslant \int_{\{\tilde{u} \neq \tilde{v}\}} d\nu .$

Remarque. Lorsque ϕ est définie sur $L^2(\Omega)$ l'hypothèse H_C signifie (cf. [6]) que $\partial\phi$ est T-accrétif dans $L^1(\Omega)$ ou encore que $\partial\phi$ vérifie un principe du maximum positif au sens suivant :

$$\forall\ [u,v], [\hat{u},\hat{v}] \in \partial\phi,\ (\sup_\Omega \operatorname{ess}(u-\hat{u}) > 0 \Rightarrow \sup_\Omega \operatorname{ess}(u-\hat{u}) = \sup_{\{v-\hat{u} \geqslant 0\}} \operatorname{ess}(u-\hat{u})).$$

5 - APPLICATIONS

Dans ce paragraphe $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ est bien un espace de Banach-Dirichlet réflexif.

Soit J une application de $\Omega \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $J(.,0) = 0$ et vérifiant

$$(5.1) \quad \begin{cases} \text{p.p. } x \in \Omega, \text{ l'application } r \to J(x,r) \text{ est convexe continue sur } \mathbb{R}^N \\ \text{il existe } C_1, C_2 \in R^+ \text{ telles que } C_1 |r|^p \leqslant J(x,r) \leqslant C_2 |r|^p. \end{cases}$$

Soit j une application de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $j(.,0) = 0$ et vérifiant

$$(5.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{p.p. } x \in \Omega, \text{ l'application } \rho \to j(x,\rho) \text{ est convexe continue sur } \mathbb{R} \\ \text{il existe } C_3 \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } j(x,\rho) \leqslant C_3 \ |\rho|^\gamma, \text{ où } \gamma \text{ est tel que, d'après Sobolev, l'injection} \\ W_o^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega) \text{ soit continue.} \end{array}\right.$$

On définit ϕ par : quel que soit $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$

$$\phi(u) = \int_\Omega J(x, \nabla u(x))dx + \int_\Omega j(x, u(x))dx$$

Il résulte des hypothèses (5.1) et (5.2) que ϕ est convexe continue et coercive sur $W_o^{1,p}(\Omega)$.

PROPOSITION 5.1. *On suppose en plus que* J *ou* j *est strictement convexe. Soit* K *un convexe fermé non vide unilatéral de* $W_o^{1,p}(\Omega)$ *; alors il existe* g *quasi-s.c.s. telle que* $K = \{ u \in W_o^{1,p}(\Omega) \, ; \tilde{u} \geqslant g \ \text{ q.p.} \}$.
Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. *On considère l'inéquation variationnelle unilatérale*

$$(I)\quad \left\{\begin{array}{l} u \in K \\ \forall v \in K, \displaystyle\int_\Omega (J(x,\nabla v(x)) + j(x,v(x)))dx \geqslant \int_\Omega (J(x,\nabla u(x)) + j(x,u(x)))dx + (f, v-u) \end{array}\right.$$

Soit u *la solution de* (I).

Alors *1)* u *est caractérisé par la propriété suivante : il existe une mesure* μ *positive sur* Ω *telle que* $-\operatorname{div} \partial J(x, \nabla u(x)) + \partial j(x,u(x)) - f \ni \mu$ et $\displaystyle\int_\Omega (\tilde{u} - g) d\mu = 0$.

2) $u = \inf \{ v \in W_o^{1,p}(\Omega) \, ; v \in K \text{ et } -\operatorname{div} \partial J(x,\nabla u(x)) + \partial j(x,u(x)) - f \ni \mu \}$.

3) si ∂J *et* ∂j *sont univoques*

$$\int_\Omega d\mu = \inf \left\{ \int_\Omega d\nu \ ; \ \nu = -\operatorname{div} \partial J(x,\nabla v(x)) + \partial j(x,v(x)) - f \geqslant 0 \text{ et } v \in K \right\}$$

4) si $K = \{ u \in W_o^{1,p}(\Omega) \, ; \tilde{u} \geqslant g \}$ *avec* g *continu et si le champ de vecteurs* $p \mapsto \nabla J(.\,, p)$ *est de classe* C^2 *et vérifie uniformément en* x

$$\exists \alpha > 0 : \forall p, q \in R^N, (\nabla J(x,p) - \nabla J(x,q), p - q) \geqslant \alpha |p-q|^2$$

alors u *est continu.*

Démonstration. Elle utilise les deux lemmes suivants :

LEMME 5.2. *Quel que soit* $u \in W_o^{1,p}(\Omega)$

$$\partial\phi(u) = -\operatorname{div} \partial J(x, \nabla u) + \partial j(x,u)$$

LEMME 5.3. *Soit* T *une contraction normale croissante. Alors pour tous* $u, \hat{u} \in W_o^{1,p}$,

$$\phi(\hat{u} + T(u - \hat{u})) + \phi(u - T(u - \hat{u})) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u}).$$

On obtient alors les conclusions 1), 2) et 3) en appliquant les propositions 3.2, 4.11 et 4.19 respectivement. Pour la propriété 4), si u_g *(resp.* $u_{\hat{g}}$*) sont les solutions associées aux convexes* K_g*(resp.* $K_{\hat{g}}$*) on a d'après 4.10* $\| u_g - u_{\hat{g}} \|_\infty \leqslant \| g - \hat{g} \|_\infty$. *On obtient le résultat en approchant alors* g *par une suite d'obstacles réguliers et en appliquant des théorèmes de régularité de H. Brézis, D. Kinderlehrer (cf.* [9]*).*

Démonstration du lemme 5.2. La démonstration qui suit calque celle donnée par H. Attouch et A. Damlamian dans [3].

Déterminons d'abord la conjuguée ϕ^* *de* ϕ. Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors $f = f_0 - \operatorname{div} v_0$, où f_0 et v_0 sont dans $L^{p'}(\Omega)$. Par définition de ϕ^*

$$\phi^*(f) = \sup_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega (f_0\, u + v_0\, u)dx - \int_\Omega (J(x, \nabla u(x)) + j(x, u(x))dx \right\}$$

Posons $V = L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^N$, $V' = L^{p'}(\Omega) \times (L^{p'}(\Omega))^N$ et $C = \left\{ (u, v) \in V \, ; u \in W_0^{1,p}(\Omega), v = \nabla u \right\}$.

On a $\phi^*(f) = \sup\limits_{U \in V} ((f_0, v_0), U)_{V' \times V} - (\psi + I_C)(U)$

où $\psi(U) = \int_\Omega (J(x, v(x)) + j(x, u(x))dx$.

Par conséquent

$$\phi^*(f) = (\psi + I_C)^*(f_0, v_0)$$
$$= (\psi^* \nabla I_C^*)(f_0, v_0), \text{ car } \psi^* \text{ est inf-compacte dans } L^{p'}(\Omega) \text{ (cf. [20])}.$$

Comme $I_C^* = I_{C^\perp}$ avec $C^\perp = \left\{ (g, \omega) \in L^{p'} \times (L^{p'})^N ; g = -\operatorname{div} \omega \right\}$

on obtient :

$$\phi^*(f) = \min \left\{ \int_\Omega (J^*(x, v_0 - \omega) + j^*(x, f_0 - \operatorname{div} \omega))dx \, ; \; \omega \in (L^{p'})^N, \operatorname{div} \omega \in L^{p'} \right\}$$

Maintenant déterminons $\partial\phi$: $f \in \partial\phi(u)$ ssi $\phi(u) + \phi^*(f) - (f, u) = 0$ c'est-à-dire

$$\int_\Omega J(x, \nabla u) + J^*(x, v_0 - \omega) - \nabla u.(v_0 - \omega) + \int_\Omega j(x,u) + j^*(x, f_0 - \operatorname{div} \omega) - u.(f_0 - \operatorname{div} \omega) = 0$$

Par conséquent il existe $\int_\omega \in (L^{p'}(\Omega))^N$, $\operatorname{div} \omega \in L^{p'}(\Omega)$ tel que $v_0 - \omega \in \partial J(x, \nabla u)$ et $f_0 - \operatorname{div} \omega \in \partial j(x,u)$ donc $f = f_0 - \operatorname{div} v_0 \in -\operatorname{div} \partial J(x, \nabla u) + \partial j(x, u)$.

Ainsi $\partial\phi(u) = -\operatorname{div} \partial J(x, \nabla u) + \partial j(x, u)$.

Démonstration du lemme 5.3. Remarquons d'abord que toutes les contractions normales opèrent sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire, étant donnée une contraction T de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $T(0) = 0$, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $Tu \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\text{p.p.x} \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_i} Tu(x) \right| \leqslant \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \quad \text{pour } i = 1,\dots,N$$

Soient $u, \hat{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $v = u - T(u - \hat{u})$ et $\hat{v} = \hat{u} + T(u - \hat{u})$.

D'une part posons $\theta(x) = T'(u(x) - \hat{u}(x))$. On a p.p. $x \in \Omega$

$$J(x, \nabla v(x)) = J(x, \nabla u(x) - T'(u - \hat{u})\, \nabla(u - \hat{u})\,(x)) = J(x, (1 - \theta(x))\nabla u(x) + \theta(x)\, \nabla\hat{u}(x))$$

$$J(x, \nabla\hat{v}(x)) = J(x, \nabla\hat{u}(x) + T'(u - \hat{u})\, \nabla(u - \hat{u})(x)) = J(x, \theta(x)\, \nabla u(x) + (1 - \theta(x)\, \nabla\hat{u}(x))$$

Comme $\theta(x) \in [01]$, on obtient par convexité de $J(x, .)$

$$J(x, \nabla v(x)) + J(x, \nabla\hat{v}(x)) \leqslant J(x, \nabla u(x)) + J(x, \nabla\hat{u}(x)).$$

D'autre part posons $\eta(x) = \dfrac{T(u(x) - \hat{u}(x))}{u(x) - \hat{u}(x)}$. On a

$$j(x, v(x)) = j(x, u(x) - \eta(x)\ (u(x) - \hat{u}(x)))$$

$$j(x, \hat{v}(x)) = j(x, \hat{u}(x) + \eta(x)\ (u(x) - \hat{u}(x)))$$

Comme $\eta(x) \in [01]$, on obtient par convexité de $j(x,.)$

$$j(x, v(x)) + j(x, \hat{v}(x)) \leqslant j(x, u(x)) + j(x, \hat{u}(x))$$

Par conséquent, en intégrant sur Ω les inégalités obtenues pour J et j,

$$\phi(v) + \phi(\hat{v}) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u})$$

c'est-à-dire $\quad \phi(u - T(u - \hat{u})) + \phi(\hat{u} + T(u - \hat{u})) \leqslant \phi(u) + \phi(\hat{u})$.

APPENDICE.

Les caractérisations d'un convexe unilatéral et bilatéral des théorèmes 3.2 et 3.7 sont encore vraies sans l'hypothèse X réflexif.

Démonstration. On montre qu'il existe (g_n) et g telle que $K \subset K_g$ comme à la démonstration du théorème 3.2.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $u \in K_g$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $v_\epsilon \in K$ tel que

$$\frac{1}{2} \| v_\epsilon - u \|^2 - \epsilon \leqslant \frac{1}{2} \| v - u \|^2, \text{ pour tout } v \in K$$

(c'est-à-dire que (v_ϵ) est une suite minimisante de $\inf\left\{\frac{1}{2} \| v - u \|^2 ; v \in K\right\}$) d'où

$$\frac{1}{2} \| v_\epsilon - u \|^2 + I_K(v_\epsilon) - \epsilon \leqslant \frac{1}{2} \| v - u \|^2 + I_K(v) \quad \text{pour tout } v \in X.$$

Par conséquent $0 \in \partial_\epsilon (\psi + I_K)(v_\epsilon)$, où ∂_ϵ désigne le sous-différentiel à ϵ près et $\psi(v) = \frac{1}{2} \| v - u \|^2$.

D'après [20] § 10. i, il existe $z_\epsilon \in X$ et $f_\epsilon \in X^*$ tel que

$$f_\epsilon \in \partial(\psi + I_K)(z_\epsilon), \ \| z_\epsilon - v_\epsilon \| \leqslant \sqrt{\epsilon}, \ \| f_\epsilon \| \leqslant \sqrt{\epsilon}.$$

Par suite $z_\epsilon \in \overline{D(\partial(\psi + I_K))} = \overline{D(\psi + I_K)} \subset K$.

D'après le théorème d'additivité des sous-différentiels, $f_\epsilon \in \partial\psi(z_\epsilon) + \partial I_K(z_\epsilon)$, c'est-à-dire qu'il existe $w_\epsilon \in \partial\psi(z_\epsilon) = F(z_\epsilon - u)$ tel que

$$(w_\epsilon - f_\epsilon, v - z_\epsilon) \geqslant 0, \text{ pour tout } v \in K.$$

Puisque K est unilatéral, $w_\epsilon - f_\epsilon \in X^{*+}$, donc est associé à $\mu_\epsilon \in E^+(X)$.

On a donc $\| z_\epsilon - u \|^2 \leqslant (w_\epsilon - f_\epsilon, v - u) - (f_\epsilon, u - z_\epsilon)$, pour tout $v \in K$, en particulier

$\| z_\epsilon - u \|^2 \leqslant \int (\tilde{g}_n - \tilde{u}) d\mu_\epsilon - (f_\epsilon, u - z_\epsilon)$, pour tout n.

Quand $n \to \infty$, $\tilde{g}_n \downarrow g$ q.p. donc μ_ϵ – p.p. D'après le théorème de Lebesgue

$$\int (\tilde{g}_n - \tilde{u}) d\mu_\epsilon \to \int (g - \tilde{u}) d\mu_\epsilon \leqslant 0, \text{ car } \tilde{u} \geqslant g \text{ q.p.}$$

Donc $\| z_\epsilon - u \|^2 \leqslant -(f_\epsilon, u - z_\epsilon)$. Par suite $\| z_\epsilon - u \| \leqslant \| f_\epsilon \| \leqslant \sqrt{\epsilon}$.

Ainsi $z_\epsilon \to u$ donc $u \in K$.

REFERENCES

[1] ANCONA A. «*Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive*». Cours de 3e cycle de Paris VI (1973).

[2] ARONSZAJN N. and SMITH K.T. «*Functional spaces and functional completion*». Ann. Inst. Fourier 6 (1956) p. 125-185.

[3] ATTOUCH H. et DAMLAMIAN A. «*Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasilinéaires*». Proc. Royal Soc. of Edimbourg 79 A (1977) p. 107-129.

[4] ATTOUCH H. «*Convergence de solutions d'inéquations variationnelles avec obstacle*». C.R.A.S. 287 (1978) p. 1001-1003.

[5] AUDOUNET J. «*Potentiels convexes*». Thèse Toulouse (1977).

[6] BENILAN P. et PICARD C. «*Quelques aspects non linéaires du principe du maximum*». Séminaire de théorie du potentiel, Lecture Notes in Math. (à paraître).

[7] BEURLING A., DENY J. «*Dirichlet spaces*». Proc. Nat. Acad. of Sci. 45 (1959) p. 208-215.

[8] BRELOT M. «*Lectures on potential theory*». Bombay, Tata Institute (1960).

[9] BREZIS H., KINDERLEHRER D. «*The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities*». Indiana Univ. Math. J. 23 (1974) p. 831-844.

[10] CALVERT B. «*Potential theoretic properties for monotone operators*». Boll. U.M.I. 5 (1972) p.473-489.

[11] CHOQUET G. «*Theory of capacities*». Ann. Inst. Fourier 5 (1955) p. 131-295.

[12] DENY J. «*Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels*». Séminaire de théorie du potentiel (1964-65).

[13] DENY J. «*Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel*». C.I.M.E. (1969).

[14] FOUGERES A. Séminaire d'Analyse Convexe. Université du Languedoc.

[15] FOWLER P. *«Capacity theory in Banach spaces»*. Pac. J. Math. 48 (1973) p. 365-385.

[16] GRUN-REHOMME. Thèse de 3ème cycle. Paris.

[17] KENMOCHI N., MIZUTA Y. *«The gradient of a convex function on a regular functional space»*. Hiroshima Math. J. 4 (1974) p. 743-763.

[18] KENMOCHI N., Y. MIZUTA. *«Potential theoretic properties of the gradient of a convex function on a functional space»*. Nagoya Math. J. 59 (1975) p. 199-215.

[19] MIGNOT F. *«Contrôle dans les inéquations variationnelles elliptiques»*. J. Func. Analysis 22 (1976) p. 130-185.

[20] MOREAU J.J. *«Fonctionnelles convexes»*. Cours du Collège de France (1967).

[21] MOSCO U. *«Nonlinear operators and the calculus of variations»*. Bruxelles 1975. Lecture Notes in Math. n^{o} 543.

[22] NAKOULIMA O. *«Etude d'une inéquation variationnelle bilatérale et d'un système d'inéquations quasi-variationnelles associé»*. Thèse 3ème cycle. Bordeaux (1977).

[23] ROCKAFELLAR R.T. *«Convex functions, monotone operators and variational inegalities»*. Proceeding of the conference on monotone operators, Venise 1968.

[24] STAMPACCHIA G. *«Variational inequalities»*. Proceedings of the conference on monotone operators. Venise 1968.

(Manuscrit reçu le 25 février 1979)