

ALICE CHALJUB-SIMON

YVONNE CHOQUET-BRUHAT

**Problèmes elliptiques du second ordre sur une variété euclidienne à l'infini**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 1, n° 1 (1979), p. 9-25

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1979\\_5\\_1\\_1\\_9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1979_5_1_1_9_0)

© Université Paul Sabatier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROBLEMES ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE SUR UNE VARIÉTÉ EUCLIDIENNE À L'INFINI

Alice Chaljub-Simon <sup>(1)</sup> et Yvonne Choquet-Bruhat <sup>(2)</sup>

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université d'Orléans — 45 000 Orléans

(2) Institut de Mécanique Théorique et Appliquée, Université Paris VI, 4 Place Jussieu — 75 005 Paris

**Résumé :** Nous montrons des théorèmes d'existence et d'unicité pour les solutions d'équations aux dérivées partielles quasilineaires du second ordre sur une variété riemannienne complète, euclidienne à l'infini. Nous utilisons des espaces höldériens avec poids, des estimations a priori et la théorie du degré de Leray-Schauder.

**Summary :** We prove some existence and some uniqueness theorems for the solutions of quasilinear second order elliptic partial differential equations on a complete riemannian manifold euclidian at infinity. We use weighted Hölder spaces, a priori estimates, and the Leray-Schauder degree theory.

### Introduction

Nous nous proposons dans cet article de démontrer des théorèmes d'existence et d'unicité pour des solutions d'équations quasi linéaires d'ordre 2, de type elliptique, sur des variétés riemanniennes complètes, non compactes mais euclidiennes à l'infini, dans des espaces höldériens avec poids. Ces théorèmes généralisent ceux obtenus par l'une d'entre nous (Y.C.B.) en collaboration avec Jean Leray dans le cas des variétés compactes. Nous démontrons pour les opérateurs linéaires du second ordre, elliptiques sur une variété riemannienne complète euclidienne à l'infini et injectifs un théorème d'isomorphisme entre espaces höldériens avec poids <sup>(1)</sup>, généralisant le théorème de Bony [3] relatif aux variétés compactes, et celui d'Oskolkov [18] relatif à  $\mathbb{R}^3$ , nous éliminons dans ce cas la restriction faite par Oskolkov  $A_\delta < 0$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

Pour les opérateurs quasi-linéaires du second ordre sur une variété riemannienne complète, à partie principale divergente, d'inconnue  $u$ , définis pour tout  $Du$ , mais seulement pour  $\ell < u < m$ , nous obtenons une majoration a priori des solutions dans un espace  $C^{1, \alpha}(V)$ . Quand la variété riemannienne complète est euclidienne à l'infini, et que l'opérateur admet une sous solution  $\ell$  et une sur solution  $m$ , nous démontrons un théorème d'existence en utilisant la théorie du degré de Leray-Schauder, de façon analogue à [9].

---

(1) Pour les études sur  $\mathbb{R}^n$  dans les espaces de Sobolev avec poids  $W_{s,\delta}^p$  et par la méthode de monotonie dans le cas non linéaire voir Cantor [4], [5], Fortunato [12], et Benci-Fortunato [2] et leurs références.

Nous terminons par la démonstration de certains théorèmes d'unicité. Les problèmes traités dans cet article se rencontrent dans des questions variées de géométrie et de physique. Nous donnerons ailleurs l'application à la solution de l'équation de Lichnerowicz (fondamentale dans la construction de données initiales admissibles en Relativité Générale) sur une variété asymptotiquement euclidienne.

### 1 - DEFINITIONS ET PROPRIETES D'ESPACES HOLDERIENS AVEC POIDS.

Soit  $V$  une variété riemannienne, de métrique  $e$ ,  $C^\infty$ , de dimension  $(1)_3$ . Soit  $0$  un point arbitraire, fixé, de  $V$ . On note  $|x| = d(x,0)$  la distance riemannienne de  $0$  à  $x$  et on pose :

$$\sigma(x) = (1 + |x|^2)^{1/2}$$

On désigne par  $D$  l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique  $e$ , par  $D^k f$  le tenseur dérivé  $k^e$  de  $f$  et par  $|D^k f(x)|$  la norme dans la métrique  $e$  de ce tenseur au point  $x$ .

DEFINITION 1.  $C^l(V)$  est l'ensemble des fonctions de classe  $C^l$  sur  $V$ , dont les dérivées  $D^k f$ ,  $0 \leq k \leq l$ , sont bornées en  $e$  norme. On munit  $C^l(V)$  de la norme

$$\|f\|_{C^l(V)} = \sup_{x \in V} \sum_{0 \leq k \leq l} |D^k f(x)|$$

DEFINITION 2.  $C^{l,\alpha}(V)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  est le sous ensemble de  $C^l(V)$  des fonctions pour lesquelles la norme suivante est définie et finie :

$$\|f\|_{C^{l,\alpha}(V)} = \|f\|_{C^l(V)} + \sup_{\substack{d(x,x') < \rho(x) \\ x \in V}} \frac{|D^l f(x) - D^l f(x')|}{d(x,x')^\alpha}$$

$\rho(x)$  désigne le rayon d'injectivité de l'application exponentielle (relative à la métrique  $e$ ) au point  $x$ , et on a noté  $D^l f(x) - D^l f(x')$  la différence du tenseur  $D^l f(x)$  et du tenseur transporté parallèlement  $(2)$  en  $x'$ , le long de la géodésique joignant  $x$  à  $x'$ .

DEFINITION 3.  $C_\beta^l(V)$  est le sous ensemble des fonctions de  $C^l(V)$  pour lesquelles la norme suivante est définie et finie :

$$\|f\|_{C_\beta^l(V)} = \sum_{k \leq l} \sup_{x \in V} \{ (\sigma(x))^{\beta+k} |D^k f(x)| \}$$

DEFINITION 4.  $C_{\beta,\alpha}^l(V)$  est le sous ensemble de  $C_\beta^l(V) \cap C^{l,\alpha}(V)$  des fonctions pour lesquelles la norme suivante est définie et finie :

$$\|f\|_{C_{\beta,\alpha}^l(V)} = \|f\|_{C_\beta^l(V)} + \sup_{\substack{d(x,x') < \rho(x) \\ x \in V}} \left\{ [\sigma(\tilde{x})]^{\beta+l+\alpha} \frac{|D^l f(x) - D^l f(x')|}{[d(x,x')]^\alpha} \right\}$$

où  $\sigma(\tilde{x}) = \inf(\sigma(x), \sigma(x'))$

$C_\beta^l(V)$  et  $C_{\beta,\alpha}^l(V)$  sont des espaces de Banach. Ils ne dépendent pas du choix de point de base  $0$   $(3)$ .

- (1) Nous traitons explicitement ce cas, important pour la physique. La même méthode s'applique pour une dimension quelconque, en remplaçant  $\sigma(x)$  par  $\sigma(x)^{n-2}$ .
- (2) Pour être correct on devrait noter  $D^l f(x) - \tau(x, x') D^l f(x')$  où  $\tau(x, x')$  est le bitenseur de transport parallèle. Ce bitenseur est défini sans ambiguïté si  $d(x, x') < \rho(x)$  (cf. B. Dewitt [11], Lichnerowicz [17]).
- (3) Des choix différents donnent des normes équivalentes (une variété est toujours, ici, supposée connexe).

LEMME 1. (multiplication) on a, par  $(f, g) \rightarrow fg$

$$C_{\beta}^{\ell, \alpha} \times C_{\beta_1}^{\ell_1, \alpha} \rightarrow C_{\beta+\beta_1}^{\inf(\ell, \ell_1), \alpha}, \text{ continuellement.}$$

LEMME 2. (inclusion) on a

$$1) C_{\beta}^{\ell}(V) \subset C_{\beta_1}^{\ell_1}(V) \text{ si } \ell \geq \ell_1, \beta \geq \beta_1$$

$$2) C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V) \subset C_{\beta_1}^{\ell_1, \alpha_1}(V) \text{ si } \ell \geq \ell_1, \beta \geq \beta_1, \alpha \geq \alpha_1$$

et de plus

$$3) C_{\beta}^{\ell+1} \subset C_{\beta}^{\ell, 1}$$

Preuve. 1) est évident, et  $\|f\|_{C_{\beta}^{\ell}(V)} \geq \|f\|_{C_{\beta_1}^{\ell_1}(V)}$  si  $\ell \geq \ell_1, \beta \geq \beta_1$

2) et 3) Supposons que  $f \in C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)$ , on a :

$$\|f\|_{C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)} = \|f\|_{C_{\beta}^{\ell}(V)} + \sup_{\substack{d(x, x') < \rho(x) \\ x \in V}} \sigma(\tilde{x})^{\beta + \ell + \alpha} \frac{|D^{\ell} f(x) - D^{\ell} f(x')|}{d(x, x')^{\alpha}}$$

Alors  $f \in C_{\beta_1}^{\ell_1}(V)$ , si  $\ell \geq \ell_1, \beta \geq \beta_1$  et

$$\sup_{\substack{d(x, x') < \rho(x) \\ x \in V}} \sigma(\tilde{x})^{\beta_1 + \ell_1 + \alpha_1} \frac{|D^{\ell_1} f(x) - D^{\ell_1} f(x')|}{d(x, x')^{\alpha_1}} \leq \sup_{\substack{d(x, x') < \inf(\sigma(\tilde{x}), \rho(x)) \\ x \in V}} \sigma(\tilde{x})^{\beta_1 + \ell_1 + \tilde{\alpha}}$$

$$\frac{|D^{\ell_1} f(x) - D^{\ell_1} f(x')|}{d(x, x')^{\tilde{\alpha}}} + \sup_{\substack{\sigma(\tilde{x}) < d(x, x') < \rho(x) \\ x \in V}} \sigma(\tilde{x})^{\beta_1 + \ell_1} |D^{\ell_1} f(x) - D^{\ell_1} f(x')|.$$

si  $\tilde{\alpha} \geq \alpha_1$ .

En effet :

$\sigma(\tilde{x})^{-1} d(x, x') \leq 1$  implique  $(\sigma(\tilde{x})^{-1} d(x, x'))^{\alpha_1} \geq (\sigma(\tilde{x})^{-1} d(x, x'))^{\tilde{\alpha}}$  si  $\tilde{\alpha} \geq \alpha_1$  alors que :

$\sigma(\tilde{x})^{-1} d(x, x') \geq 1$  implique  $(\sigma(\tilde{x})^{-1} d(x, x'))^{\alpha_1} \geq 1$

En choisissant  $\tilde{\alpha} = 1$  on en déduit l'inclusion 2) si  $\ell_1 < \ell$ , et l'inclusion 3. On obtient 2) avec  $\ell_1 = \ell$  en prenant  $\tilde{\alpha} = \alpha$ .

LEMME 3. (compacité) Si  $(V, e)$  est une variété riemannienne complète <sup>(1)</sup> la boule unité de  $C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)$  est un sous ensemble compact de  $C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)$  si  $\alpha_1 < \alpha, \beta_1 < \beta$ .

COROLLAIRE. La boule unité de  $C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)$  est compacte dans  $C^{\ell_1, \alpha}(V)$  si  $\ell > \ell_1$ .

---

(1) Il suffit pour que ce lemme soit valable que les boules géodésiques  $V_R$  aient une fermeture compacte ce qui permet d'appliquer les méthodes qui suivent au cas de variétés non complètes, mais à bord.

*Preuve* On désigne par  $V_R$  la boule ouverte géodésique de centre 0 et de rayon  $R$  :

$$V_R \equiv \{ x \in V, |x| < R \}$$

et par  $X_R$  une fonction  $C^\infty$  sur  $V$  à support dans  $V_R$ .

Soit  $\{f_n\}$  une suite avec

$$(1) \quad \|f_n\|_{C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)} \leq 1$$

on a :

$$f_n = f_n X_R + f_n (1 - X_R)$$

$$\|f_n X_R\|_{C^{\ell, \alpha}(V_R)} \leq C \|f_n\|_{C^{\ell, \alpha}(V_R)} \leq C \|f_n\|_{C^{\ell, \alpha}(V)} \quad \text{où } C = \|X_R\|_{C^{\ell, \alpha}(V_R)}$$

La suite  $\{f_n X_R\}$  est bornée dans  $C^{\ell, \alpha}(V_R)$ , (avec  $V_R$  relativement compact dans l'espace métrique  $(V, e)$  elle est bornée et équicontinue dans  $C^{\ell, \alpha_1}(V_R)$  si  $\alpha > \alpha_1$  ; elle admet une sous suite  $f_{n_i, R}$  qui converge dans  $C^{\ell, \alpha_1}(V_R)$  vers une limite  $f_R$  qui appartient aussi (1) à  $C^{\ell, \alpha}(V)$ . On désigne encore par  $f_R$  la fonction de  $C^{\ell, \alpha}(V)$ , prolongement de  $f_R$  par zéro en dehors de  $V_R$ . D'autre part la famille  $\{f_R\} \subset C^{\ell, \alpha}(V_R) \subset C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)$

converge quand  $R$  tend vers l'infini dans  $C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)$  vers une fonction  $f \in C_{\beta}^{\ell, \alpha}(V)$  si  $\beta_1 < \beta$  en effet :

$$\|f_R - f_{R'}\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)} \leq \|f_R - f_{n_i, R}\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)} + \|f_{R'} - f_{n_i, R'}\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)}$$

$$+ \|f_{n_i, R} - f_{n_i, R'}\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)}$$

or

$$\|f_{n_i, R} - f_{n_i, R'}\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)} \leq \|f_{n_i} (1 - X_R)\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)} + \|f_{n_i} (1 - X_{R'})\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)}$$

$$\leq C \tilde{R}^{\beta_1 - \beta}$$

où  $C$  est indépendant de  $R, R'$ , et  $\tilde{R} = \inf(R, R')$ .

On choisit  $\tilde{R}$  tel que  $C R^{\beta_1 - \beta} < \epsilon/3$ , puis  $N$  tel que  $\|f_R - f_{n_i, R}\|_{C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}(V)} < \epsilon/3$  et

$\|f_{R'} - f_{n_i, R'}\| < \epsilon/3$  dès que  $n_i > N, n'_i > N$ , on montre ainsi la convergence de la famille  $f_R$ , et de la suite  $f_n$

dans  $C_{\beta_1}^{\ell, \alpha_1}$ , vers une fonction  $f$ , puisque  $f \in C_{\beta}^{\ell, \alpha}$ .

(1) Une limite uniforme de fonctions vérifiant  $|u(x) - u(x')| \leq d(x, x')^{\alpha}$  vérifie la même relation.

2 - VARIETES ASYMPTOTIQUEMENT EUCLIDIENNES. OPERATEURS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE.

DEFINITION Une variété riemannienne  $(V, e)$  est dite euclidienne à l'infini s'il existe un nombre  $R$  tel que :

a)  $V \setminus \bar{V}_R$  est réunion d'un nombre fini de composantes connexes disjointes  $\Omega_A, A = 1, \dots, p$ , difféomorphes par un difféomorphisme  $\varphi_A$  à  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ , où  $\bar{B}$  est une boule fermée de  $\mathbb{R}^3$  (on a noté  $\bar{V}_R$  la boule  $d(o, x) \leq R$ )

b) Sur chaque ouvert  $\Omega_A$  la métrique  $e$  est l'image réciproque par le difféomorphisme  $\varphi_A$  de la métrique euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ .

REMARQUE : Si la variété riemannienne  $(V, e)$  est euclidienne à l'infini, elle est complète si et seulement si la boule  $\bar{V}_R$  est compacte.

DEFINITION : Une métrique  $g$  sur la variété riemannienne  $V$  de métrique de base donnée  $e$  est dite elliptique s'il existe une constante positive  $\lambda$  telle que, en tout point de  $V$  et pour tout vecteur  $\xi$  on a

$$(2-1) \quad \lambda e(\xi, \xi) \leq g(\xi, \xi) \quad , \lambda > 0.$$

DEFINITION : Une métrique  $g$  sur la variété euclidienne à l'infini  $(V, e)$  est dite régulièrement asymptotiquement euclidienne si  $g - e \in C_{\delta}^{1, \alpha}(V)$  : il existe  $\delta > 0$  et  $K \geq 0$  tel que <sup>(1)</sup>

$$(2-2) \quad \|g - e\|_{C_{\delta}^{1, \alpha}(V)} \leq K \quad , \quad \delta > 0.$$

3 - PREMIERE INEGALITE FONDAMENTALE .

Considérons l'équation elliptique linéaire sur la variété complète euclidienne à l'infini  $(V, e)$ , à l'inconnue scalaire  $u$  :

$$(3-1) \quad Lu \equiv \Delta_g u + b \cdot Du + cu = f$$

où  $\Delta_g$  est le laplacien d'une métrique  $g$  elliptique sur  $(V, e)$  (inégalité 2-1), régulièrement asymptotiquement euclidienne (2-2). Nous supposons de plus que le vecteur  $b$ , et les scalaires  $c$  et  $f$  sont respectivement de classe  $C_{1+\delta}^{0, \alpha}(V), C_{2+\delta}^{0, \alpha}(V)$  et  $C_{\beta+2}^{0, \alpha}(V)$  :

$$(3-2) \quad \|b\|_{C_{1+\delta}^{0, \alpha}(V)} \leq K, \|c\|_{C_{2+\delta}^{0, \alpha}(V)} \leq K, \delta > 0$$

$$(3-3) \quad \|f\|_{C_{\beta+2}^{0, \alpha}(V)} \leq K \quad \text{avec} \quad 0 < \beta < 1.$$

On désignera par  $C$  des constantes ne dépendant que de  $K$  et  $\lambda$ .

THEOREME. Si  $u$  est solution de  $Lu = f$ , sur la variété riemannienne complète euclidienne à l'infini  $(V, e)$  les coefficients de  $L$  satisfaisant (2-1), (2-2), (3-2) et (3-3), alors on a, si  $u \in C_{\beta}^{2, \alpha}$ , la majoration :

$$(3-4) \quad \|u\|_{C_{\beta}^{2, \alpha}(V)} \leq C \left\{ \|f\|_{C_{\beta+2}^{0, \alpha}(V)} + \|u\|_{C_{\beta}^{0, \alpha}(V)} \right\}$$

Preuve Désignons par  $\Theta_R$  une fonction  $C^{\infty}$  sur  $V$  telle que :

$$\Theta_R(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \in V_{2R}$$

$$\Theta_R(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in V \setminus V_{3R}$$

(1) Remarquons que, avec nos définitions,  $|De| = 0, \|e\|_{C_0^{2, \alpha}(V)} = \sqrt{3}.$

$C_0^{2, \alpha}(V)$

Posons  $u_R = u \Theta_R$ .

Appliquant le théorème de Schauder (étendu par Bony [3] aux variétés) à la variété compacte à bord  $\bar{V}_{2R}$  on a :

$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha}(\bar{V}_{2R})} \leq C (\|Lu_R\|_{C^{0,\alpha}(\bar{V}_{2R})} + \max_{x \in \bar{V}_{2R}} |u_R(x)|)$$

D'autre part  $u(1 - \Theta_R)$  a son support dans  $V \setminus V_{2R}$  donc dans  $V \setminus \bar{V}_R$  qui, est réunion disjointe, finie, d'ouverts  $\Omega_A$  difféomorphes à  $\mathbb{R}^3 \setminus B$ . Soit  $u_A$  la restriction de  $u(1 - \Theta_R)$  à  $\Omega_A$ ,  $\bar{u}_A$  la fonction sur  $\mathbb{R}^3$  à support dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$  définie dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$  par :

$$u_A = u_A \circ \varphi_A^{-1}$$

$\bar{u}_A$  vérifie une équation elliptique, déduite de (3-1) par écriture dans les coordonnées locales définies par  $\varphi_A$ ; il résulte d'un théorème d'Oskolkov [18] que :

$$\|\bar{u}_A\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_A)} \leq C \left\{ \|\bar{L}\bar{u}_A\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}_A)} + \|\bar{u}_A\|_{C^0(\bar{\Omega}_A)} \right\}$$

les normes  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_A)$  définies par Oskolkov à l'aide du poids  $(1 + |\varphi_A(x)|^2)^{1/2}$  sont équivalentes à nos normes  $C^{2,\alpha}(\Omega_A)$ . On a donc :

$$\|u_A\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_A)} \leq C \left\{ \|Lu_A\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_A)} + \|u_A\|_{C^0(\Omega_A)} \right\}$$

on a d'autre part l'identité

$$L(uv) \equiv vLu + 2g(Du, Dv) + u(L-c)v$$

d'où, puisque  $u_R = u \Theta_R$ ,  $u_A = u(1 - \Theta_R) \chi_A$ , où  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $\Omega_A$

$$\|Lu_R\|_{C^{0,\alpha}(V_{3R})} \leq C \left\{ \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(V_{3R})} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(V_{2R})} \right\}$$

$$\|Lu_A\|_{C^{0,\alpha}(V \setminus V_{2R})} \leq C \left\{ \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(V \setminus V_{2R})} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(U)} \right\}$$

où  $U = V_{3R} \setminus \bar{V}_{2R}$  est un ouvert borné de  $V$  (dans  $V \setminus U$  on a  $(L-c)(1 - \Theta_R) = 0$ ).

On sait que pour un ouvert borné on peut prendre  $\epsilon > 0$ , arbitraire et qu'il existe  $C$  tel que :

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(U)} \leq \epsilon \|u\|_{C^{2,\alpha}(U)} + C \|u\|_{C^0(U)}$$

on a évidemment  $\|u\|_{C^{2,\alpha}(V)} \leq \|u_R\|_{C^{2,\alpha}(V)} + \sum_A \|u_A\|_{C^{2,\alpha}(V)}$  et

$$\|u_R\|_{C^{2,\alpha}(V)} < C \|u_R\|_{C^{2,\alpha}(V_{2R})}$$

où  $C$  dépend de  $R$  (qui est fixé), tandis que :  $\|u_A\|_{C^{2,\alpha}(V)} \leq C \|u_A\|_{C^{2,\alpha}(\Omega_A)}$

D'où finalement l'inégalité annoncée (3-4).

4 - THEOREME D'ISOMORPHISME.

THEOREME : Si l'opérateur  $L$ , satisfaisant aux conditions (2-1), (2-2) et (3-2), (3-3) est injectif toute fonction  $u \in C_{\beta}^{2, \alpha}$  satisfait à l'inégalité

$$(4-1) \quad \|u\|_{C_{\beta}^{2, \alpha}(V)} \leq C \|Lu\|_{C_{\beta+2}^{0, \alpha}}$$

Preuve : S'il n'existe pas de telle constante  $C$  il existe une suite  $\{u_n\}$  avec  $\|u_n\|_{C_{\beta}^{2, \alpha}(V)} = 1$

alors que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n\|_{C_{\beta+2}^{0, \alpha}} = 0$ .

Considérons une suite  $\{u_n\}$  avec  $\|u_n\|_{C_{\beta}^{2, \alpha}(V)} = 1$ . On a

$$u_n = u_n \Theta_R + \sum_{A=1}^p u_n \psi_A \quad \psi_A = (1 - \Theta_R) X_A$$

La suite  $\{\Theta_R u_n\}$  est uniformément bornée dans  $C^{2, \alpha}(V_{2R})$  donc admet une sous suite, encore désignée par  $\{\Theta_R u_n\}$ , qui converge dans  $C^0(V_{2R})$ .

Il résulte d'autre part d'un théorème d'Oskolkov et Tarasov [20] concernant le laplacien dans  $\mathbb{R}^3 \setminus B$  que pour toute fonction  $v$  à support dans  $\Omega_A$  on a

$$\|v\|_{C_{\beta}^{2, \alpha}(\Omega_A)} \leq C_e \|\Delta_e v\|_{C_{\beta+2}^{0, \alpha}(\Omega_A)}$$

où  $\Delta_e$  est le laplacien de la métrique euclidienne  $e$ .

On a en coordonnées locales adaptées :

$$(4-2) \quad \Delta_e - L \equiv (\delta^{ij} - g^{ij}) \partial_{ij}^2 + (\Gamma_{jl}^i g^{jl} - b^i) \partial_i - c$$

on remarque que, puisque  $\Omega_A \subset V \setminus \bar{V}_R$  on a, pour un tenseur  $f \in C_{\gamma}^{\ell, \alpha}(\Omega_A)$  avec  $\gamma > 0$

$$\|f\|_{C_{\gamma}^{\ell, \alpha}(\Omega_A)} \leq R^{-\gamma} \|f\|_{C_{\gamma}^{\ell, \alpha}(\Omega_A)}$$

On déduit de (4-2), si  $v \in C_{\beta}^{2, \alpha}(\Omega_A)$ , en utilisant le lemme 1, § 1 :

$$\|(\Delta_e - L)v\|_{C_{\beta+2}^{0, \alpha}(\Omega_A)} \leq C R^{-\gamma} \|v\|_{C_{\beta}^{2, \alpha}(\Omega_A)}$$

où  $C$  ne dépend que de  $\lambda$  et  $\mu$ . Explicitement

$$C = \|g - e\|_{C_{\gamma}^{0, \alpha}(\Omega_A)} + \|g\Gamma\|_{C_{1+\gamma}^{0, \alpha}(\Omega_A)} + \|b\|_{C_{1+\gamma}^{0, \alpha}(\Omega_A)} + \|c\|_{C_{2+\gamma}^{0, \alpha}}$$

et, en choisissant  $R$  assez grand pour que  $C C_e R^{-\gamma} < 1$  :



$$\|v\|_{C^{2,\alpha}_\beta(\Omega_A)} \leq C \|Lv\|_{C^{0,\alpha}_\beta(\Omega_A)}$$

En appliquant cette inégalité aux fonctions  $\psi_A(u_n - u_m)$  et utilisant le même raisonnement que § 3 on obtient :

$$\|u_n - u_m\|_{C^{2,\alpha}_\beta(V)} \leq C \left\{ \|L(u_n - u_m)\|_{C^{0,\alpha}_{\beta+2}(V)} + \|u_n - u_m\|_{C^{0,\alpha}(V_{2R})} \right\}$$

Quand  $n, m$  tendent vers l'infini le deuxième membre tend vers zéro, donc aussi le premier membre. C'est dire que  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $C^{2,\alpha}_\beta(V)$ , et admet une limite  $u \neq 0$  (puisque  $\|u\|_{C^{2,\alpha}_\beta} = 1$ ), alors que

$Lu = 0$ . Ce résultat est contradictoire avec l'hypothèse d'injectivité faite sur  $L$ .

*Remarque :* L'opérateur  $L$  est injectif de  $C^{2,\alpha}_\beta(V)$  dans  $C^{0,\alpha}_{\beta+2}(V)$  si  $c \leq 0$  (utilisation du principe du maximum cf Lichnerowicz [16]).

**THEOREME .** *Sous les hypothèses 2-1, 2-2 et 3-2, 3-3 et si  $L$  est injectif (donc en particulier si  $c \leq 0$ ) l'opérateur  $L$  est un isomorphisme de  $C^{2,\alpha}_\beta(V)$  sur  $C^{0,\alpha}_{\beta+2}(V)$ .*

*Preuve :* L'ensemble des opérateurs  $L$  satisfaisant aux hypothèses et qui sont des isomorphismes est ouvert (théorème des fonctions implicites). Il est aussi fermé : considérons en effet une suite  $L_n$ , d'isomorphismes, convergeant vers un opérateur injectif  $L$ . Soit  $f \in C^{0,\alpha}_{\beta+2}$ , et  $u_n$  telle que  $L_n u_n = f$ . On a :

$$\|u_n\|_{C^{2,\alpha}_\beta} \leq C \|f\|_{C^{0,\alpha}_{\beta+2}}$$

La suite  $\{u_n\}$  étant bornée dans  $C^{2,\alpha}_\beta$  admet une sous suite qui converge dans  $C^{2,\alpha}_{\beta_1}$ ,  $\beta_1 < \beta$ ,  $\alpha_1 < \alpha$  vers une fonction  $u \in C^{2,\alpha}_\beta$ . La suite  $L_n u_n$  converge vers  $Lu$  dans  $C^0(V)$ , et  $Lu = f$ , donc  $L$  est surjectif, donc un isomorphisme. L'ensemble des opérateurs  $L$  satisfaisant aux hypothèses est connexe, l'un d'entre eux  $\Delta_e$  est un isomorphisme (cf. ci-dessous) donc tous le sont.

**THEOREME.** *L'opérateur  $\Delta_e$  est un isomorphisme de  $C^{2,\alpha}_\beta(V)$  sur  $C^{0,\alpha}_{\beta+2}$*

*Preuve :* (1) l'équation  $\Delta_e u = f$  sur  $V$ , variété euclidienne à l'infini d'atlas (fini)  $\{\Omega_i, \Omega_A\}$ , avec  $\bigcup_i \bar{\Omega}_i = K$ ,

compact,  $\Omega_A$  difféomorphe à  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}$ , est équivalente à l'équation pour l'inconnue  $v = \phi^{-1}u$

$$(4-3) \quad \Delta_e v + \alpha v = f \phi^{-5}$$

sur la variété compacte  $\tilde{V}$ , d'atlas  $\{\Omega_i, \dot{\Omega}_A\}$ ,  $\dot{\Omega}_A$  difféomorphe à une boule  $B$  de  $\mathbb{R}^3$ , déduit de  $\Omega_A$  par adjonction du «point à l'infini»  $\omega_A$ .

$$(4-4) \quad \epsilon = \phi^4 e$$

est une métrique  $C^\infty$  sur  $\tilde{V}$ , qui coïncide dans  $\dot{\Omega}_A$  avec la métrique de la sphère  $S^3$ , tandis que  $\phi$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $V$ ,  $> 0$ . Sur  $\tilde{V}$   $\phi$  est aussi  $C^\infty$  quand on la prolonge par zéro aux points  $\omega_A$ . Dans les coordonnées locales (2) adaptées à  $\Omega_A$  on a

(1) cf «compactification de variétés asymptotiquement euclidiennes» [7]

(2) les  $(x^i)$  ne sont pas de vraies coordonnées locales dans  $\dot{\Omega}_A$  (de vraies coordonnées sont  $(y^i) = \frac{(x^i)}{1+r^2}$ )

on peut cependant utiliser les  $(x^i)$  pour les calculs intermédiaires de quantités intrinsèques, définies sur  $\tilde{V}$  à l'aide de la métrique  $\epsilon$ .

$$\phi(x^i) \equiv (\phi \circ \psi_A^{-1})(x) = (1+r^2)^{-1/2}, r^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$$

$\alpha$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\tilde{V}$ ,  $\alpha(x) = -3$  si  $x \in \dot{\Omega}_A$

Supposons que  $f \in \mathcal{D}'(c\text{-à-d. } f \text{ est une fonction } C^\infty \text{ à support compact sur } V)$ , alors  $f \circ \phi^{-1}$  est  $C^\infty$  sur  $\tilde{V}$  - il résulte des théorèmes classiques sur les équations elliptiques sur une variété compacte, et de l'injectivité <sup>(1)</sup> de l'opérateur  $\Delta_\epsilon + \alpha$  que l'équation (4-3) a une solution et une seule  $v \in C^\infty(\tilde{V})$ . Or on a :

LEMME : Si  $v \in C^\infty(\tilde{V})$  alors  $u = \phi v \in C_1^k(V)$ , quelle que soit  $k$ .

Preuve du lemme : puisque  $u_R = \phi v \theta_R$  est  $C^\infty$ , à support compact ; il suffit de démontrer que chaque  $u_A = \phi v \psi_A \in C_1^k(V)$ . On a, le signe  $|\cdot|$  dénotant la  $\epsilon$ -norme :

$$\|u_A\|_{C_1^k(V)} = \sup_{x \in \Omega_A} \sum_{\ell \leq k} |\sigma(x)|^{1+\ell} |D^\ell u_A(x)|$$

En chaque point  $x$  :

$$D^\ell u_A = \sum_{p=0}^{\ell} C_p^\ell D^p(\phi v) D^{\ell-p} \psi_A$$

d'où

$$|D^\ell u_A| \leq |\psi_A D^\ell(\phi v)| + C(\psi_A) \sum_{p=0}^{\ell-1} |D^p(\phi v)|$$

où  $C(\psi_A)$  s'annule en dehors du compact  $\bar{V}_{3R} \setminus V_{2R}$ .

Dans  $\Omega_A$  on a  $\phi = (1+r^2)^{-1/2}$ , d'où en coordonnées  $(x^i)$  :

$$(D\phi)_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -x^i (1+r^2)^{-3/2} = -x^i (1+r^2)^{-1/2} \phi^2$$

$$(D^2\phi)_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} = (3x^i x^j (1+r^2)^{-1} - \delta_j^i) \phi^3$$

$$(4-5) \quad D^\ell \phi = \psi_{(\ell)} \phi^{\ell+1}$$

où  $\psi_{(\ell)}$  est un champ de tenseurs  $C^\infty$  sur  $\Omega_A$ , borné en  $\epsilon$ -norme.

La fonction  $v$  est d'autre part  $C^\infty(\tilde{V})$ , c'est-à-dire a des dérivées de tous ordres bornées en  $\epsilon$ -norme. On déduit de (4-4) que pour le vecteur covariant  $Dv$

$$|Dv| \equiv |Dv|_\epsilon = \phi^2 |Dv|_\epsilon$$

Tandis que pour le tenseur  $\ell$ -covariant  $D^\ell v$  :

$$(4-6) \quad |D^\ell v| \equiv |D^\ell v|_\epsilon = \phi^{2\ell} |D^\ell v|_\epsilon$$

Puisque

$$D^\ell(v) = \sum_{p=0}^{\ell} C_p^\ell D^p \phi \otimes D^{\ell-p} v$$

on déduit de (4-5), (4-6) que, en tout point de  $\Omega_A$  :

$$|D^\ell(\phi v)| \leq C \sum_{p=0}^{\ell} \phi^{2\ell-p+1} |D^{\ell-p} v|_\epsilon$$

Les  $\epsilon$ -normes des dérivées de  $v$  étant bornées, ainsi, dans  $\Omega_A$ , que le produit  $\sigma(x) \phi(x)$ , on a donc :

$$|\sigma(x)|^{1+\ell} |D^\ell(\phi v)(x)| \leq C \sum_{p=0}^{\ell} |D^p v|_\epsilon$$

D'où

$$\|u_A\|_{C_1^k(V)} \leq C \|v\|_{C^k(\tilde{V})}$$

(1) qui résulte de celle de  $\Delta_\epsilon$ .

Pour démontrer la surjectivité de  $\Delta_e$  de  $C_{\beta}^{2, \alpha}$  sur  $C_{\beta+2}^{0, \alpha}$  il suffit alors de remarquer que  $C_1^k(V) \subset C_{\beta}^{2, \alpha}(V)$  si  $k > 2, \beta \leq 1$ , puis d'approcher une fonction quelconque  $f \in C_{\beta+2}^{0, \alpha}(V)$  par une suite  $\{f_n\} \in \mathcal{S}$ , la suite des solutions correspondantes  $u_n$  est d'après l'inégalité (4-1) une suite de Cauchy dans  $C_{\beta}^{2, \alpha}$ , donc admet une limite  $u$ , solution de  $\Delta_e u = f$ .

Remarque : Nous aurions pu aussi écrire l'équation (3-1) sous la forme :

$$Lu \equiv g. D^2 u + B. Du + cu \Leftrightarrow f$$

$$(g_{ij} D^2_{ij} u + B^i D_i u + cu = f)$$

en mettant en évidence les dérivées covariantes  $D$  dans la métrique de base  $e$ . On a alors :

THEOREME : Si 1)  $g - e \in C_{\delta}^{0, \alpha}(V), B \in C_{1+\delta}^{0, \alpha}(V), c \in C_{2+\delta}^{0, \alpha}(V)$  avec  $\delta > 0, g(\xi, \xi) \geq \lambda e(\xi, \xi), \lambda > 0,$

$$2) c \leq 0$$

l'opérateur :

$$L \equiv g. D^2 + B. D + c$$

est un isomorphisme de  $C_{\beta}^{2, \alpha}$  sur  $C_{\beta+2}^{0, \alpha}, 0 < \beta < 1$ .

COROLLAIRE : Sous les hypothèses 1)  $L$  est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Preuve : Posons  $\rho = \sup_{x \in V} |c(x)|, c_0 = \rho(\sigma(x))^{-2-\delta}$  l'opérateur  $L_0 = L - c_0$  est un isomor-

phisme d'après le théorème ; d'autre part l'opérateur  $u \mapsto cu$  de  $C_{\beta}^{2, \alpha}$  dans  $C_{\beta+2}^{0, \alpha}$  est compact, car borné de

$$C_{\beta}^{2, \alpha} \text{ dans } C_{\beta+2+\delta}^{0, \alpha}, \alpha^1 > \alpha.$$

### 5 - EQUATION DU SECOND ORDRE NON LINEAIRE, LA DEUXIEME INEGALITE A PRIORI.

Une équation quasi linéaire du second ordre, à partie principale divergentielle, sur une variété riemannienne, s'écrit (cf [9]).

$$(5-1) \quad \text{div } A(x, Du, u) = a(x, Du, u)$$

$A : (x, p, k) \mapsto A(x, p, k)$  et  $a : (x, p, k) \mapsto a(x, p, k)$  dont des applications <sup>(1)</sup> de  $T^*(V) \times \mathcal{R}$  dans respectivement  $T(V)$  (avec  $A(x, p, k) \in T_x(V)$  et  $\mathcal{R}$  que nous supposons définies sur un ouvert  $U$  de  $T^*(V) \times \mathcal{R}$  de la forme :

$$U : (x, p, k) \in T^*(V) \times \mathcal{R}, 1_0(x) < k < m_0(x) \}$$

où  $1_0(x)$  et  $m_0(x)$  sont deux fonctions numériques de classe  $C^2$  sur  $V$ , avec,

$$-\infty \leq 1_0(x) < m_0(x) \leq +\infty \text{ sur } V$$

Nous supposons  $A$  différentiable et  $a$  mesurable.

La notation  $\text{div } A(x, Du, u)$  désigne la divergence dans la métrique  $e$  du champ de vecteurs sur  $V$

$$x \mapsto A(x, (Du)(x), u(x)).$$

Un changement de coordonnées locales  $(x^i) \rightarrow x'^j(x^i)$  sur  $V$  induit un changement de coordonnées locales  $(x^i, p^i) \rightarrow (x'^j(x^i), p'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} p_i)$  sur  $T^*(V)$ . On en déduit que les  $(\frac{\partial A^i}{\partial p_j})$  sont les composantes en coordonnées loca-

les d'un 2-tenseur contravariant, que nous notons  $D_p A$  tandis que  $(\Gamma_{j\ell}^k)$  est la connexion de  $e$

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma_{il}^i A^l + \frac{\partial A^i}{\partial p_k} \Gamma_{ik}^l p_l$$

sont les composantes d'un scalaire, que nous notons  $\tilde{D}_x A$ .

(1)  $T^*(V)$  est l'espace cotangent à  $V, T(V)$  l'espace tangent,  $T_x(V)$  l'espace tangent au point  $x$ .

$D_u A$  est le vecteur de composantes en coordonnées locales  $(\frac{\partial A^i}{\partial u})$ .

L'équation (4-1) s'écrit

$$(D_p A)(x, Du, u) \cdot D^2 u + (D_u A)(x, Du, u) \cdot Du + (\tilde{D}_x A)(x, Du, u) = a(x, Du, u)$$

[en coordonnées locales

$$\frac{\partial A^i}{\partial p_j} D_i D_j u + \frac{\partial A^i}{\partial u} D_i u + \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jl} D_j u \frac{\partial A^i}{\partial p_l} + \Gamma^i_{ij} A^j = a]$$

Remarque : (5-1) s'écrit en coordonnées locales :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (|\det e_{ij}|^{1/2} A^i(x^j, u, \partial_l u)) = |\det e_{ij}|^{1/2} a(x^j, u, \partial_l u)$$

Nous supposons que le problème est elliptique c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que,

$$(5-2) \quad (D_p A)(x, p, k)(\xi, \xi) \geq \lambda e_x(\xi, \xi), \quad \forall (x, p, k) \in U$$

et nous limiterons, comme dans le cas d'une variété compacte, les coefficients  $a$  et  $A$  par les inégalités suivantes (1), sur  $U$  :

$$(5-3) \quad |D_p A| \leq \mu$$

$$(5-4) \quad |A| + |\tilde{D}_u A| \leq \mu(1 + |p|)$$

$$(5-5) \quad |a| + |\tilde{D}_x A| \leq \mu(1 + |p|^2)$$

Sur la variété riemannienne complète, à rayon d'injectivité non nul,  $(V, e)$ , nous introduisons la norme :

$$\|u\|_{\tilde{C}^{\ell, \alpha}(V, \delta)} = \sup_i \|u\|_{C^{\ell, \alpha}(B(x_{(i)}, \delta))}$$

où les boules géodésiques  $B(x_{(i)}, \delta)$ , de centre  $x_{(i)}$  et de rayon  $\delta$ , avec  $0 < \delta \leq \rho_0$  ( $\rho_0$  rayon d'injectivité de  $(V, e)$ ), forment un recouvrement localement fini (2) de  $V$

LEMME : Les normes  $\tilde{C}^{\ell, \alpha}(V, \delta)$  et  $C^{\ell, \alpha}(V)$  sont équivalentes.

Preuve : on a défini  $C^{\ell, \alpha}(V)$  par :

$$\|f\|_{C^{\ell, \alpha}(V)} = \sup_{x \in V} \sum_{k \leq \ell} |D^k f(x)| + \sup_{\substack{x, x' \in V \\ d(x, x') < \rho(x)}} \frac{|D^\ell f(x) - D^\ell f(x')|}{|d(x, x')|^\alpha}$$

on en déduit

$$\|f\|_{C^{\ell, \alpha}(V)} \geq \|f\|_{\tilde{C}^{\ell, \alpha}(V, \delta)}$$

mais aussi :

$$\|f\|_{C^{\ell, \alpha}(V)} \leq \|f\|_{\tilde{C}^{\ell, \alpha}(V, \delta)} + \sup_{\substack{x, x' \in V \\ \delta \leq d(x, x') < \rho(x)}} \frac{|D^\ell f(x) - D^\ell f(x')|}{|d(x, x')|^\alpha}$$

Donc

$$\|f\|_{C^{\ell, \alpha}(V)} \leq (1 + \frac{2}{\delta^\alpha}) \|f\|_{\tilde{C}^{\ell, \alpha}(V, \delta)}$$

**THEOREME :** Soit  $(V, e)$  une variété riemannienne à rayon d'injectivité non nul, à courbure et gradient de courbure bornées ; toute solution  $u \in H^2_{loc}(V)$ , de (5-1) définie sur  $V$ , telle que  $1_0(x) < u(x) < m_0(x)$ , et à dérivées bornées, est sous les hypothèses (5-2), (5-3) et (5-4), (5-5) dans  $C^{1, \alpha}(V)$  et vérifie une inégalité a priori

(1) On peut généraliser un peu les hypothèses en multipliant les 2<sup>e</sup> membres de (5-2), (5-3), (5-4) et (5-5) par  $(1 + |p|^{m-2})$ , avec  $m > 1$ .

(2) Un nombre fini d'entre elles recouvrent le compact  $\bar{V}_R$ .

$$\|u\|_{C^1, \alpha(V)} \leq K$$

où  $K$  est une constante qui ne dépend que de  $\lambda$  et  $\mu$ .

*Preuve :* Prenons, dans une boule géodésique  $B_\delta$  de rayon  $\delta < \rho_0$  des coordonnées normales.

L'équation s'écrit

$$(5-6) \quad \frac{\partial}{\partial x^i} (|\det e|^{1/2} A^i(x^j, u, \partial_j u)) - |\det e|^{1/2} a(x^i, u, \partial_i u) = 0$$

D'après un lemme de Aubin [1] on peut choisir  $\delta_0$  et  $c$  (une constante) ne dépendant que de  $M = \|R\|_{C^1(V)}$

(où  $R$  est le tenseur de courbure de la métrique  $e$ ) tels que dans toute boule géodésique  $B_{\delta_0}$  on ait, en coordonnées normales

$$|e_{ij} - \delta_{ij}| \leq c, \quad |\partial_\rho e_{ij}| \leq c$$

on en déduit que dans une boule  $B_{\delta_0}$  les coefficients de (5-6) vérifient les hypothèses requises (cf Ladyzenskaia et Uraltseva [14]) pour que les solutions  $u$  considérées vérifient dans une boule  $B_\delta$ , avec  $\delta < \delta_0$ , une inégalité a priori :

$$\|u\|_{C^1, \alpha(B_\delta)} \leq K \text{ où } K \text{ ne dépend que de } \lambda, \mu, \delta_0 - \delta.$$

Le théorème résulte alors du lemme précédent.

## 6 - EQUATION NON LINEAIRE SUR UNE VARIETE EUCLIDIENNE A L'INFINI, THEOREME D'EXISTENCE.

Les définitions des espaces  $C^{\ell, \alpha}(U)$ , pour des applications de la variété  $U$ , ouvert de  $T^*(V) \times \mathbb{R}$ , dans  $\mathbb{R}$ , ou dans un fibré vectoriel, par exemple  $T(V)$ , sont analogues aux définitions données pour  $C^{\ell, \alpha}(V)$ , la métrique de base sur  $U$  étant, au point  $(x, p, k)$ ,  $e_x \otimes e_x^* \otimes 1$ .

Sur  $A$  et  $a$  nous ferons l'hypothèse suivante :

$$(6-1) \quad A \in C^1, \alpha(U), \quad a \in C^0, \alpha(U)$$

on en déduit que si  $u \in C^1, \alpha(V)$  et  $1_0(x) < u(x) < m_0(x)$  on a que  $(1) D_p A \circ u, \tilde{D}_x A \circ u, D_u A \circ u$  et  $a \circ u$  sont de classe  $C^0, \alpha(V)$ .

Nous considérons maintenant une variété  $(V, e)$  euclidienne à l'infini. Nous supposons, de plus que si  $u \in C^1, \alpha(V)$  il existe  $\gamma > 0$  tel que :

$$(6-2) \quad D_p A \circ u - e \in C^0, \alpha(V), \quad D_u A \circ u \in C^0, \alpha(V)_{1+\gamma}$$

on suppose que  $\tilde{D}_x A$  peut s'écrire :

$$(6-3) \quad \tilde{D}_x A(x, u, Du) \equiv B_1(x, u, Du) \cdot Du + a_1(x, u, Du)$$

avec

$$(6-4) \quad B_1 \circ u \in C^0, \alpha(V)_{1+\gamma}, \quad a_1 \circ u \in C^0, \alpha(V)_{\beta+2}$$

et que :

$$(6-5) \quad a \circ u \in C^0, \alpha(V)_{\beta+2}$$

Les applications de  $C^1, \alpha(V)$  définies en (6-2), (6-3), (6-4), (6-5) sont toutes supposées bornées.

---

(1) Si  $f$  est une application  $(x, p, k) \rightarrow f(x, p, k)$  et  $u$  une fonction  $x \rightarrow u(x)$  on note  $f \circ u$  l'application  $x \rightarrow f(x, p, k)|_{p = Du(x)}$

$$k = u(x)$$

par exemple :  $D_p A \circ u$  est l'application  $x \rightarrow (D_p A)(x, Du(x), u(x))$ .

Remarques 1 : Si le vecteur A ne dépend pas explicitement de x (c'est-à-dire n'en dépend en coordonnées locales que par l'intermédiaire de  $e_{ij}$ ) les conditions (6-3), (6-4) sont toujours vérifiées si (6-2) l'est.

2 : Dans le cas hyper quasi linéaire, c'est-à-dire si le vecteur A est de la forme

$$A(x, p, k) = g(x, k) \cdot p, \quad [A^i \circ u = g^{ij}(x^k, u) \partial_j u]$$

on a

$$\tilde{D}_x A \equiv B_1 \cdot Du \quad \text{avec } B_1 = D_x g, \text{ alors que } D_p A = g.$$

3 : Dans le cas semi-linéaire, c'est-à-dire quand

$$A(x, p, k) = g(x) \cdot p$$

les hypothèses (6-2), (6-3), (6-4) sont équivalentes aux hypothèses sur le tenseur g faites dans le cas linéaire.

DEFINITION : Une sous solution l de l'équation (5-1) est une fonction bornée  $l \in C^2(V)$ , telle que sur V

$$l_0 < l < m_0, \quad \text{div } A(x, Dl, l) > a(x, Dl, l)$$

Une sur solution  $m \in C^2(V)$  est définie de même par :

$$l_0 < m < m_0, \quad \text{div } A(x, Dm, m) < a(x, Dm, m) \quad \forall x \in V$$

THEOREME : Soit  $(V, e)$  une variété riemannienne complète, euclidienne à l'infini. Soit

$$(6-6) \quad L(u) \equiv \text{div } A(x, Du, u) - a(x, Du, u) = 0$$

Une équation aux dérivées partielles du second ordre sur V dont les coefficients satisfont, si  $l_0 < u < m_0$  aux hypothèses (5-2), (5-3), (5-4), (5-5) et (6-2), (6-3), (6-4), (6-5).

Supposons que l'équation admet une sous solution  $l > l_0$  et une sur solution  $m < m_0$  avec

$$\sup_{x \in V} l(x) < 0 < \inf_{x \in V} m(x) \text{ uniformément bornées sur } V \text{ et telles que } \Delta_\rho l \in C^{0, \alpha}_{2+\alpha}(V), \Delta_\rho m \in C^{0, \alpha}_{2+\alpha}(V)$$

alors l'équation admet au moins une solution  $u \in C^{2, \alpha}_\beta(V)$ .

Preuve : On désigne par  $\Omega$  l'ouvert borné de  $C^{1, \alpha}(V)$  défini par :

$$\|v\|_{C^{1, \alpha}(V)} < K_0$$

$$\inf_{x \in V} (m(x) - v(x)) > 0, \quad \inf_{x \in V} (v(x) - l(x)) > 0$$

où  $K_0$  est un nombre qui sera déterminé plus tard.

On considère l'équation elliptique linéaire à l'inconnue u, pour  $v \in \Omega$  donné :

$$D_p A(x, Dv, v) \cdot D^2 u + [D_u A(x, Dv, v) + B_1(x, Dv, v)] \cdot Du + a_1(x, Dv, v) - a(x, Dv, v) = 0$$

D'après le théorème d'isomorphisme cette équation a une solution et une seule  $u \in C^{2, \alpha}_\beta(V)$ .

On note  $u = F(v)$ . L'application F est une application bornée de  $\Omega$  dans  $C^{2, \alpha}_\beta(V)$ , donc une application compacte de  $\Omega$  dans  $C^{1, \alpha}(V)$ . Il en est de même des applications  $F_t$  (on remarque que  $F_0$  est l'application constante  $v \mapsto 0$ ) définie par résolution des problèmes :

$$(6-7) \quad L_0 u \equiv \Delta_e u - f(x) u = 0, \quad L_t u \equiv Lu + (1-t)L_0 u = 0$$

(avec  $f \in C^{0, \alpha}_{2+\gamma}$ ,  $f(x) \geq 0$ )

L'application  $F_0$  admet un point fixe dans  $\Omega$  d'indice 1. Il en sera de même de toutes les applications  $F_t$ ,

$0 \leq t \leq 1$ , si on peut montrer a priori qu'elles n'ont pas de point fixe  $u_t \in \partial \Omega$ . D'après le théorème toutes les solutions vérifieront  $\|u\|_{C^{1, \alpha}(V)} < K_0$  si  $K_0 > K$  (la constante résultant de ce théorème).

Montrons que toute solution  $u \in C_{\beta}^{2, \alpha}$  de 6-6 vérifiant

$$\inf_{x \in V} (m(x) - u(x)) \geq 0, \quad \inf_{x \in V} (\ell(x) - u(x)) \geq 0$$

vérifie aussi

$$\inf_{x \in V} (m(x) - u(x)) > 0 \text{ et } \inf_{x \in V} (\ell(x) - u(x)) > 0.$$

Supposons qu'en un point  $\bar{x} \in V$  on ait  $u(\bar{x}) = m(\bar{x})$ . Ce point est un minimum de  $u - m$ , donc aussi  $Du(x) = Dm(\bar{x})$  et  $D_p A(\bar{x}, Dm(\bar{x}), m(\bar{x})) \cdot D^2 |u(x) - m(x)| > 0$  ce qui est impossible en un minimum. D'autre part puisque  $u \in C_{\beta}^{2, \alpha}(V)$  et  $\inf_{x \in V} m(x) > 0$  on a  $\inf_{x \in V \setminus V_R} (m(x) - u(x)) > 0$ .

D'où la conclusion. Un raisonnement analogue donne la 2ème inégalité.

D'autre part on peut choisir  $f$  de manière à ce que  $l$  et  $m$  soient aussi sous et sur solution de 6-7 : il suffit qu'on prenne  $f$  tel que :

$$f(x) > \max(0, |l(x)|^{-1} (-\Delta_e l(x)), |m(x)|^{-1} \Delta_e m(x))$$

Il existe sous les hypothèses faites, une infinité de telles fonctions  $f \in C_{2+\delta}^{0, \alpha}$

Les fonctions  $l$  et  $m$  sont sous et sur solutions de tous les problèmes  $Lu + (1-t)L_0 u = 0, 0 \leq t \leq 1, u \in C_{\beta}^{2, \alpha}$ , donc aucun de ces problèmes n'admet de solution sur  $\partial\Omega$ .

## 7 - UNICITE

On considère sur la variété riemannienne complète  $(V, e)$  l'équation quasi linéaire

$$(7-1) \quad g(x, Du) \cdot D^2 u + c(x, Du, u) = 0$$

on fait les hypothèses suivantes sur les coefficients, dans l'ouvert  $U \subset T^*(V) \times \mathcal{R}$  défini par  $l_0(x) < k < m_0(x)$

(i) l'opérateur est elliptique et  $g$  est borné :

$$\mu e_x(\xi, \xi) \geq g(x, p, k) (\xi, \xi) \geq \lambda e_x(\xi, \xi), \lambda > 0$$

(ii) les coefficients  $g$  et  $c$  sont continuellement différentiables par rapport à la variable  $p$ .

(iii) le coefficient  $c : (x, p, k) \mapsto c(x, p, k)$  est une fonction non croissante de  $k$ .

On a alors un théorème unicité de démonstration analogue à celle donnée classiquement <sup>(1)</sup> pour un ouvert borné de  $\mathcal{R}^n$

**THEOREME.** L'équation (7-1) a au plus une solution  $u \in C_{\beta}^2(V)$ , avec  $l_0 < u < m_0$  sous les hypothèses (i), (ii), (iii).

*Preuve :* La différence  $w = u - v$  de deux solutions vérifie l'équation

$$g(x, Du) \cdot D^2 w + b \cdot Dw = c_1$$

avec

$$b = D_p g(x, p) \Big|_p = Du + \theta Dv \cdot D^2 v + D_p c(x, p, u) \Big|_p = Du + \theta' Dv$$

$$c_1 = c(x, u, Dv) - c(x, v, Dv)$$

Supposons que  $u - v$  prenne une valeur  $\alpha > 0$  en un point  $\bar{x} \in V$  puisque  $u - v \in C_{\beta}^2$ , il existe  $R$  tel que  $\bar{x} \in V_R$ . Soit  $V_R^+$  l'ouvert  $\{x \in V_R, w(x) > 0\}$ . Sur  $V_R^+$  on a  $c_1 \geq 0$  (hypothèse (iii), donc  $\sup_{x \in V_R^+} w(x) \leq \sup_{x \in \partial V_R^+} w(x)$ , ce qui est contradictoire avec  $\bar{x} \in V_R^+$

(1) cf Potter et Weinberger [21], D. Gilbarg et Trudinger [13]

D'autre part, quand les coefficients principaux dépendent de  $u$  on obtient un théorème d'unicité pour l'équation à partie principale divergentielle sur une variété euclidienne à l'infini

$$(7-2) \quad \operatorname{div} (A(x, Du, u)) = a(x, Du, u)$$

sous les hypothèses faites au § 5 et 6 auxquelles on ajoute les suivantes, dans  $U$  :

$$2b) \text{ Il existe une constante } \nu > (2-\beta) / \beta$$

$$(7-3) \quad \nu (A(x, p, k) - A(x, q, k')) \cdot (p - q) + (k - k') [a(x, p, k) - a(x, q, k')] \geq 0$$

$$3b) \text{ a croît strictement avec k :}$$

$$(7-4) \quad [a(x, p, k) - a(x, p, k')] [k - k'] > 0 \text{ si } k \neq k'$$

THEOREME : Sous les hypothèses 5-3, 5-4, (7-3), (7-4) l'équation (7-2) a au plus une solution  $u \in C^2_\beta$  avec  $\beta > 0, l_0 < u < m_0$  sur la variété riemannienne complète euclidienne à l'infini  $(V, e)$ , telle que  $a \circ u \in C^0_{\beta+1}$

Preuve : Soient  $u$  et  $v$  deux telles solutions. On a

$$\operatorname{div} [A(x, Du, u) - A(x, Dv, v)] = a(x, Du, u) - a(x, Dv, v)$$

d'où en multipliant par  $(u-v)_+^\nu - \eta$ , avec  $\nu \geq 1$ , et en intégrant sur  $V$  ( $\eta$  est l'élément de volume de  $e$ ,  $\omega$  la forme de Leray induite sur  $\partial V_R$ )

$$\int_{V_R} w\eta + \int_{\partial V_R} h \cdot \omega = 0$$

avec :

$$W = (u-v)_+^{\nu-1} \{ \nu (A(x, Du, u) - A(x, Dv, v)) \cdot D(u-v)$$

$$+ (a(x, Du, u) - a(x, Dv, v)) (u-v) \}$$

$$h = (u-v)_+^\nu \{ A(x, Du, u) - A(x, Dv, v) \}$$

On voit que si  $u \in C^2_\beta$  et  $v \in C^2_\beta$   $a \circ u \in C^0_{\beta+1}$   $a \circ v \in C^0_{\beta+1}$  avec  $D_p A$  et  $D_u A$  bornés, si  $(V, e)$  est euclidienne à l'infini,  $W$  est intégrable sur  $V$  et on a :

$$\int_V W\eta = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{V_R} W\eta = 0$$

à condition que  $\nu > (2-\beta) / \beta$  (et <sup>(1)</sup>  $\nu > 1$ ). Il résulte alors de (7-3) :

$$W = 0 \text{ sur } V$$

Si  $u - v$  prend une valeur positive sur  $V$ , il atteint son maximum en un point  $\bar{x} \in V$ . En ce point on a  $Du - Dv = 0$  et  $W > 0$  d'après (7-4) ; donc  $u - v \leq 0$ , de même  $u - v \geq 0$  donc  $u = v$ .

En faisant des hypothèses supplémentaires de régularité sur les coefficients on peut démontrer un théorème d'unicité quand  $a$ , supposé indépendant de  $p$ , est non croissant, par une méthode inspirée du cas d'un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  (cf Gilbarg et Trudinger ch. 9, § 5)), en utilisant le théorème d'existence du cas linéaire.

---

(1) conséquence de  $\nu > \frac{2-\beta}{\beta}$  si  $0 < \beta \leq 1$ .



## REFERENCES

- [1] T. AUBIN. «*Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes*, » Bull. Sc. Math 1976 p 149-173.
- [2] V. BENCI and D. FORTUNATO. «*Weighted Sobolev spaces and the non linear Diriclet problem in unbounded domains*» (to appear)
- [3] J.M. BONY. «*Majorations a priori et problèmes frontières elliptiques du second ordre* » Séminaire Choquet 1966, miméographie.
- [4] M. CANTOR. «*The existence of Non-trivial Asymptotically Flat Initial Data for vacuum Space-times* » Comm. Math. Phys. Vol. 57, ne 1 (1977).
- [5] M. CANTOR. « *Some problems of global analysis on asymptotically simple manifolds* ». Composition Mathematica, to appear.
- [6] A. CHALJUB-SIMON et Y. CHOQUET-BRUHAT. « *Solutions asymptotiquement euclidienne de l'équation de Lichnerowicz* » . C.R. Ac. Sc., t. 286, p. 917 (1978).
- [7] Y. CHOQUET-BRUHAT. « *Compactification de variétés asymptotiquement euclidiennes, applications* » C.R. Ac. Sc., t. 285, p. 1061 (1977).
- [8] Y. CHOQUET-BRUHAT et S. DESER. « *On the stability of flat space* ». Ann. of Phys. Vol. 81, n° 1 (1973).
- [9] Y. CHOQUET-BRUHAT et J. LERAY. « *Sur le problème de Dirichlet quasi-linéaire d'ordre 2* » C.R. Ac. Sc., t. 274, p. 81–85 (1972).
- [10] Y. CHOQUET-BRUHAT et J. YORK . « *Cauchy problem* » to appear in Einstein Centenary volume, Bergman, Goldberg and Held ed., Plenum Press.
- [11] B. DEWITT. « *Dynamical Theory of groups and fields* » Gordon and Breach (1962).
- [12] D. FORTUNATO. « *On the index of elliptic differential operators on  $R^n$*  » (to appear).
- [13] D. GILBARG and N.S. TRUDINGER. « *Elliptic partial differential equations of second ordre* » Springer-Verlag (1977).

- [14] O.A LADYZENSKAIA et N.N. URALSEVA. « *Equations aux dérivées partielles de type elliptique* » Dunod (1968) .
- [15] J. LERAY et J. SCHAUDER. « *Topologie et équations fonctionnelles* » Ann. Ec. Norm. Sup. 51 p. 47-48 (1934) .
- [16] A. LICHNEROWICZ. « *Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* », Masson (1955) .
- [17] A. LICHNEROWICZ . « *Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale* », Publ. I.H.E.S. n° 10 (1961) .
- [18] OSKOLKOV . « *Sur la solution d'un problème aux limites pour des équations linéaires elliptiques dans un domaine non borné* » Vestnik Leningrad University 16 n° 7, p. 38-50 (1961) en russe.
- [19] OSKOLKOV . « *Solvability of the Dirichlet problem for quasi-linear elliptic equations in an unbounded domain* » Proc. Steklov. Inst. Math. 102, p. 145-155 (1967) .
- [20] OSKOLKOV-TARASOV. « *A priori estimates of the first derivatives of solutions of the Dirichlet problem for quasi-linear elliptic equations in an unbounded region* » Vestnik Leningrad Univ. 21 n° 7, p. 58-62 (1966) en russe.
- [21] PROTTER et WEINBERGER. « *Maximum principle in differential equations* » Prentice Hall (1967).

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1978)