ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

NGUYEN THANH VAN

Sur une classe de bases de l'espace des fonctions holomorphes dans un polydisque

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 30 (1966), p. 85-94

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1966_4_30__85_0>

Sur une classe de bases de l'espace des fonctions holomorphes dans un polydisque

par NGUYEN THANH VAN

Résumé. — Généralisation aux fonctions de plusieurs variables de certains résultats de KAZMIN et SUNYER BALAGUER sur les bases formées par les primitives successives d'une fonction.

SUNYER BALAGUER [1] et KAZMIN [2] ont étudié la représentation des fonctions holomorphes d'une variable complexe en série des primitives successives d'une fonction donnée. On verra que les résultats de ces auteurs résultent très simplement de certaines propriétés connues des bases de Schauder. Cette considération nous permet d'étendre aisément aux fonctions de plusieurs variables la plupart des résultats dus aux auteurs cités.

Notations. — On garde les notations de la note [3] sur l'interpolation d'Abel-Gontcharoff. Soient $i = (i_1, i_2 \dots i_n)$ et $j = (j_1, j_2 \dots j_n)$ deux éléments de N^n on écrira $i \leqslant j$ lorsque $i_1 \leqslant j_1$, $i_2 \leqslant j_2 \dots$ et $i_n \leqslant j_n$, on écrira $i < j$ lorsque $i \leqslant j$ et $i \neq j$. Pour $z = (z_1, z_2 \dots z_n) \in C^n$ on pose : $|z| = \operatorname{Max} |z_i|$. Dans [3] on a laissé à part l'étude des conditions N. S. pour que les polynômes d'Abel-Gontcharoff forment une base de $H_n(\rho)$, cette étude nous est nécessaire ici (ρ désigne un nombre $\in]0, +\infty]$).

1) Polynômes d'Abel-Gontcharoff

Soit $\{Z_s\}_{s \in N^n}$ une suite de points du polydisque $\Omega_\rho^n = \{z : |z| < \rho\}$. Soit $\{A_s\}_{s \in N^n}$ la suite des polynômes d'Abel-Gontcharoff associée à $\{Z_s\}$, on a le

LEMME 1. — $\{A_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ si et seulement si la suite des fonctions :

$$L_s(w) = \frac{w^s}{\prod_{i=1}^{n} \left(1 - z_{s,i} \cdot w_i\right)^{s_i}}$$

(les $z_{s,i}$, w_i et s_i désignent les n coordonnées de z_s, w et s respect.) est une base de $H_n(\overline{\rho^{-1}})$.

Démonstration. — Considérons les formes linéaires $\mathfrak{L}_s$:

$$\mathfrak{L}_s(f) = \frac{1}{s!} f^{(s)}(z_s) \qquad (s \in \mathrm{N}^n)$$

Le dual fort de $\mathrm{H}_n(\rho)$ est isomorphe à $\mathrm{H}_n(\overline{\rho^{-1}})$ par l'application qui à toute forme linéaire continue $\mathfrak{L}$ sur $\mathrm{H}_n(\rho)$ fait correspondre la fonction $\mathrm{L} \in \mathrm{H}_n(\overline{\rho^{-1}})$ définie par :

$$\mathrm{L}(w) = \sum_{s \in \mathrm{N}^n} \mathfrak{L}(\Phi_s)\, w^s$$

(ϕ_s désigne la fonction $z \to z^s$).

Il est clair que cette application transforme $\mathfrak{L}_s$ en la fonction L_s. Le lemme est donc conséquence immédiate d'un résultat connu (voir lemme préliminaire de [3]).

Profosition 1. — Si $\lim\limits_{\|s\| \to \infty} \mathrm{Sup.}\ \|s\| \,.\, |z_s| < \rho \log 2$

Alors $\{\mathrm{A}_s\}$ est une base de $\mathrm{H}_n(\rho)$.

Démonstration. — Posons $\lim.\mathrm{Sup.}\ \|s\|\,|z_s| = \tau^{-1} \,.\, \log 2$, on va montrer que $\{\mathrm{L}_s\}$ est une base de $\mathrm{H}_n(r)$ pour tout $r < \tau$.

Posons :

$$\mathrm{L}_s(w) = w^s \Big[1 + \sum_{p > 0} \lambda_{s,p}\, ,\ w^p \Big]$$

$$h_s(r) = \sum_{p>0} |\lambda_{s,p}|\ r^{\|p\|}$$

On a :

$$h_s(r) \leqslant \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - |z_{s,i}| \,.\, r)^{s_i}} - 1$$

$$h_s(r) \leqslant \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - |z_s| \,.\, r)^{s}} - 1 = (1 - |z_s| \,.r)^{-\|s\|} - 1$$

$$h_s(r) \leqslant \left(1 - \frac{\|s\|\ |z_s| \,.\, r}{\|s\|}\right)^{-\|s\|} - 1$$

Donc :

$$\lim_{\|s\| \to \infty} \mathrm{Sup.}\ h_s(r) \leqslant \exp\left(r \,.\, \Big(\lim_{\|s\| \to \infty} \mathrm{Sup.}\ \|s\|\ |z_s|\Big)\right) - 1$$
$$\leqslant e^{\log 2} - 1 = 1$$

Donc, d'après le théorème de Paley-Wiener sur les bases voisines [4] $\{L_s\}$ est une base de $H_n(r)$ pour tout $r < \tau$. Puisque $H_n(\overline{\rho^{-1}})$ est la limite inductive des $H_n(r)$ avec $r \in \left] \frac{1}{\rho}, \tau \right[$ $\{L_s\}$ est une base de $H_n(\overline{\rho^{-1}})$. Donc, d'après le lemme $\{A_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$.

2) Une classe de bases de $H_n(\rho)$

1) Lemme 2. — Pour toute $f \in H_n(\rho)$ et toute suite finie $\{z_p\}$ $(p < s)$ de points du polydisque Ω^n_ρ, il existe une fonction unique $F \in H_n(\rho)$ telle que

$$\begin{cases} F^{(q)}(z_q) = 0 \quad \text{pour} \quad q < s \\ F^{(q)}(0) = s\,!\, f^{(q-s)}(0) \quad \text{pour} \quad q \geqslant s. \end{cases}$$

Démonstration. — Désignons par $\{\widetilde{Z}_q\}$ la suite définie par :

$$\widetilde{Z}_q = Z_q \quad \text{si} \quad q < s$$

$$\widetilde{Z}_q = 0 \quad \text{si} \quad q \geqslant s.$$

D'après la proposition 1 la suite $\{A^q\}$ des polynômes d'Abel-Gontcharoff associée à $\{\widetilde{Z}_q\}$ est une base de $H_n(\rho)$, de plus c'est une base q-p. Il est clair que la série $\sum\limits_{q \geqslant s} \frac{1}{q!} f^{(q-s)}(0)\, Aq$ est semblable dans $H^*(\rho)$. En posant :

$$F = s! \sum_{q \geqslant s} \frac{1}{q\,!} f^{(q-s)}(s)\, A_q$$

On vérifie aisément que F est l'unique fonction qui satisfait les conditions mentionnées dans le lemme.

Dans la suite on va désigner par $I_{(Zp;p<s)}$ l'opération qui à toute $f \in H_n(\rho)$ fait correspondre la fonction F définie ci-dessus. C'est une généralisation naturelle de l'opération

$$f \rightarrow F(z) = m\,! \int_{z_0}^{z} ds_1 \int_{z_1}^{s_1} ds_2 \ldots \int_{z_{m-1}}^{s_{m-1}} f(s_m)\, ds_m$$

définie pour les fonctions holomorphes d'une variable complexe.

Soit maintenant une suite $\{Z_s\}_{s \in N^n}$ de points du polydisque $\Omega\frac{n}{\rho}$ soit φ une fonction holomorphe dans ce polydisque, on considère la suite des fonctions :

$$F_s = I_{(Zp;\, p<s)}(\varphi)$$

On se propose d'étendre à $\{F_s\}$ la plupart des propriétés établies par Sunyer Balaguer [1] et Kazmin [2].

2) THÉORÈME 1. — Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\|Z_s\| \to 0$ lorsque $\|s\| \to \infty$

(ii) $\varphi(0) \neq 0$

(iii) La suite $\{A_s\}$ des polynômes d'Abel-Gontcharoff associée à $\{Z_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$.

Alors $\{F_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ si et seulement si $\varphi(z_s) \neq 0$ pour tout $s \in N^n$.

Démonstration. — On remarque d'abord que si $\{A_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ alors elle en est une base q-p. On a :

$$F_s = s! \sum_{q \geq s} \frac{1}{q!} \varphi^{(q-s)}(z_q). A_q$$

La transofrmation $\mathcal{T}$:

$$f = \Sigma C_s . A_s \to \quad g = \Sigma C_s \;.\; \phi_s$$

est un automorphisme (algébrique et topologique) de $H_n(\rho)$, donc $\{F_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ si et seulement si la suite des fonctions :

$$G_s = \mathcal{T}(A_s) = \sum_{q \geq s} \frac{s!}{q!} \varphi^{(q-s)}(z_q) . \Phi_q$$

Si $\varphi(Z_s) \neq 0$ pour tout s, alors le théorème de Paley-Wiener donne facilement que $\{G_s\}$ est une base q-p de $H_n(\rho)$.

Si $\{G_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$, alors il est nécessaire que $\varphi(Z_s) \neq 0 \; \forall \; s$, sinon la matrice représentant $\{G_s\}$ par rapport à $\{\phi_s\}$ ne serait pas inversible, ce qui est contraire à un résultat connu (voir p. ex. [8]).

THÉORÈME 2. — Si les conditions suivantes sont vérifiées

$\|Z_s\| \to 0$ lorsque $\|s\| \to \infty$
$\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(Z_s) \neq 0 \; \forall \; s$.

Alors $\{A_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ (donc une base q-p) si et seulement si $\{F_s\}$ est une base q-p de $H_n(\rho)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\{A_s\}$ est une base q-p lorsque $\{F_s\}$ est une base q-p. L'hypothèse « $|z_s| \to 0$, $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(z_s) \neq 0 \; \forall \; s$ » assure (à l'aide du théorème de Paley-Wiener) que les fonctions

$$G_s = \sum_{q \geq s} \frac{s!}{q!} \varphi^{q-s}(z_q). \Phi_q$$

forment une base$q$-p de $H_n(\rho)$. Le théorème résulte du lemme suivant :

LEMME 3. — Si $\{F_s\}$ est une base q-p de $H_n(\rho)$, si les séries

$$\sum_{q \geq s} \frac{s!}{q!} \varphi^{(q-s)}(z_q) \;.\; \phi_q$$

sont sommables dans $H_n(\rho)$ et leurs sommes G_s forment une base *q-p* du même espace, alors $\{A_s\}$ est une base *q-p* de cet espace.

Démonstration du lemme. — Il suffit de montrer que la transformation $\mathcal{T}$:

$$f \rightarrow h = \sum_{s \in N^n} \frac{1}{s!} f^{(s)}(z_s) \cdot \Phi_s$$

est un automorphisme de l'espace $H_n(\rho)$.

Puisque $\{F_s\}$ est une base *q-p* de $H_n(\rho)$, la transformation $\mathcal{T}_1$:

$$f = \sum_{s \in N^n} \alpha_s \cdot F_s \rightarrow g = \sum_{s \in N^n} \alpha_s \cdot \Phi_s$$

est un automorphisme de $H_n(\rho)$.

Puisque $\{G_s\}$ est une base *q-p* de $H_n(\ )$, la transformation $\mathcal{T}e$:

$$g = \sum_{s \in N^n} \alpha_s \cdot \Phi_s \rightarrow h = \sum_{s \in N^n} \beta_s \cdot \Phi_s$$

avec

$$\beta_p = \sum_{p \leqslant s} \frac{p!}{s!} \varphi^{(s-p)}(z_s) \cdot \Phi_p$$

est un automorphisme de $H_n(\rho)$.

Soit f une fonction quelconque holomorphe dans Ω^n_ρ, désignons par $\sum_{s \in N^n} \alpha_s \cdot F_s$ le développement de f suivant la base $\{F_s\}$:

$$f = \sum_{s \in N^n} \alpha_s \cdot F_s$$

Par un simple calcul on a :

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(z_s) = \sum_{p \leqslant s} \frac{p!}{s!} \varphi^{(s-p)}(z_s) \cdot \alpha_p$$

Il en résulte :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$$

Donc $\mathcal{T}$ est un automorphisme de $H_n(\rho)$. C.Q.F.D.

Remarque. — Par la même méthode on peut montrer que si $\{A_s\}$ et $\{F_s\}$ sont des bases *q-p* de $H_n(\rho)$, alors les séries $\sum_{q \geqslant s} \frac{s!}{q!} \varphi^{(q-s)}(z_q) \cdot \Phi_q$ sont sommables dans $H_n(\rho)$ et leurs sommes G_s forment une base *q-p* de cet espace.

Il en résulte des théorèmes 1 et 2 le

THÉORÈME 3. — Soit $\{Z_s\}$ une suite de points du polydisque Ω vérifiant les conditions :

(i) $\|Z_s\| \to 0$ lorsque $\|s\| \to \infty$

(ii) Il existe une fonction φ^* holomorphe dans Ω_ρ^n telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi^*(0) \neq 0, \quad \varphi^*(z_s) \neq 0 \ \forall\, s \text{ et les fonctions} \\ F_s^* = I_{(z_p\,;\, p<s)}(\varphi^*) \text{ forment une base } q-p \text{ de } H_n(\rho)\end{array}\right.$$

Alors que toute fonction φ holomorphe dans Ω_ρ^n vérifiant la condition : " $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(Z_s) \neq 0$ $\forall s$ ", la suite

$$F_s = I_{(z_p\,;\, p < s)}(\varphi)$$

est une base $q-p$ de $H_n(\rho)$.

3) Examinons le cas où φ est entière.

THÉORÈME 4. — Si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\|Z_s\| \to 0$ lorsque $\|s\| \to \infty$ ($\{Z_1\}$ est 1 suite dans Ω_ρ^n)

(ii) $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(z_s) \neq 0$ $\forall s$

(iii) $\{F_s\}$ est une base $q-p$ de $H_n(\rho)$

(iv) φ est entière.

Alors on a les propriétés suivantes :

(α) $\{F_s\}$ est une base $q-p$ de $H_n(R)$ pour tout $R > \rho$

(β) Pour toute $f \in H_n(\rho)$, $f = \sum_{s \in N^n} \alpha_s \,.\, F_s$, on a :

$$\lim_{\|s\| \to \infty} \text{Sup.}\ |\alpha_s|^{\frac{1}{\|s\|}} = \lim_{\|s\| \to \infty} \text{Sup.} \left| \frac{1}{s!} f^{(s)}(0) \right|^{\frac{1}{\|s\|}}$$

(γ)

$$\lim_{\|s\| \to \infty} \left[\underset{|z| \leqslant R}{\text{Max}} |F_s(z)| \right]^{\frac{1}{\|s\|}} = R \text{ pour tout } R \in]\rho, +\infty[$$

Les deux lemmes suivants sont utiles pour la démonstration du Théorème 4.

LEMME 4. — Soit $\{P_s\}_{s \in N^n}$ une suite de polynômes vérifiant

$$\lim_{\|s\| \to \infty} \text{sup.}\ \frac{D(s)}{\|s\|} = 1$$

(où $D(s)$ désigne le degré total du polynôme P_s)

Si $\{Ps\}$ est une base de $H_n(\rho)$ ou $H_n(\bar{\rho})$, alors elle est une base de $H_n(R)$ pour tout $R > \rho$.

La démonstration de ce lemme est semblable à celle relative au cas d'une variable. (Voir NEWNS [5], p. 461, et WHITTAKER [7], p. 19.)

LEMME 5. — Si une suite de fonctions entières $\{E_s\}_{s \in N^n}$ est une base

$q-p$ de l'espace $H_n(R)$ pour tout $R \geqslant \rho$, alors pour toute $f \in H_n(\rho)$, $f = \sum_{s \in N^n} \alpha_s . E_s$, on a l'égalité :

$$\lim_{\|s\| \to \infty} \text{Sup.} \; | \alpha_s | ^{\frac{1}{\|s\|}} = \lim_{\|s\| \to \infty} \text{sup.} \left| \frac{1}{s!} f^{(s)}(0) \right| ^{\frac{1}{\|s\|}}$$

Démonstration du lemme. — Posons

$$\tau = \lim_{\|s\| \to \infty} \text{Sup.} \left| \frac{1}{s!} f^{(s)}(0) \right| ^{\frac{1}{\|s\|}}$$

f est un élément de $H_n(1/\tau)$. Puisque $\{E_s\}$ est une base $q-p$ de $H_n(1/\tau)$ $(1/\tau \geqslant \rho)$, la série $\Sigma\, \alpha_s . \phi_s$ est sommable dans $H_n(1/\tau)$, donc :

$$\sigma = \lim. \text{Sup.} \, |\alpha_s| ^{\frac{1}{\|s\|}} = \tau$$

Montrons maintenant que $\sigma \geqslant \tau$. Supposons le contraire : $\sigma < \tau$, et considérons la fonction $g = \Sigma\, \alpha_s . \phi_s$, on a alors :

$$\begin{cases} g \in H_n(1/\sigma) \\ f \in H_n(1/\tau) \quad \text{et} \quad f \notin H_n(R) \quad \text{pour tout} \quad R > 1/\tau \end{cases}$$

avec $1/\tau < 1/\sigma$. Or c'est une contradiction car l'application

$$G = \sum_{s \in N^n} \gamma_s . \phi_s \rightarrow F = \sum_{s \in N^n} \gamma_s . F_s \; (\gamma_s \in C)$$

est un automorphisme de $H_n(1/\sigma)$.

On a donc : $\sigma = \tau$ C. Q. F. D.

Démonstration du théorème 4 :

(α) : D'après le th. 2 $\{A_s\}$ est une base $q-p$ de $H_n(\rho)$, ensuite le Lemme 4 assure que $\{A_s\}$ est une base $q-p$ de $H_n(R)$ pour tout $R > \rho$; il en résulte (th. 1) que $\{F_s\}$ est une base $q-p$ de $H_n(R)$ $(\forall\, R > \rho)$, (α) est donc démontrée.

(β) : (β) résulte immédiatement de (α) et Lemme 5.

(γ) : La démonstration de (γ) demande plus de subtilité. Posons :

$$M(F_s, R) = \underset{|z| \leqslant R}{\text{Max}} \, |F_s(z)|$$

D'après (α) la série $\sum_{s \in N^n} |\alpha_s| . M(F_s, R)$ converge pour toute suite $\{\alpha_s\}$ telle que :

$$\lim_{\|s\| \to \infty} \text{Sup.} \; | \alpha_s | ^{\frac{1}{\|s\|}} < \frac{1}{R} \quad (R > \rho)$$

Il en résulte que :

$$\lim_{\|s\|\to\infty} \operatorname{Sup.} [M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} \leqslant R$$

Montrons maintenant que : lim. Inf. $[M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} \geqslant R$. Pour cela on a besoin du théorème suivant ([6], Th. 3.2).

THÉORÈME (*). — Si X est un espace tonnelé séparé (sur C), si $\{\mathcal{X}_m\}$ est une base de Schauder de X et si $\{N_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ est une famille de seminormes continues engendrant la topologie de X, alors pour tout $i \in \mathcal{J}$, il existe une constante $A > 0$ et un indice $j \in \mathcal{J}$ tels que :

$$N_i\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\, x_k\right) \leqslant A\; N_j\left(\sum_{k=1}^{q} a_k\, x_k\right)$$

pour tout $q \geqslant p$ (p et $q \in \mathrm{N}$) et $a_1, a_2 \ldots a_q \in \mathrm{C}$.

Soit ε un nombre quelconque de l'intervalle $]0, R-\rho[$, on va montrer

que : $$\operatorname{lim.\,Inf.} [M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} > R - \varepsilon.$$

On a :

$$F_s = \varphi(z_s) \,.\, A_s + \sum_{q>s} \frac{s\,!}{q\,!}\, \varphi^{(q-s)}(z_q) .\, A_q$$

En appliquant le Th. (*) on voit qu'il existe une constante $A_1 > 0$ et un nombre $R_1 \in]R-\varepsilon, R[$ tels que :

$$M(F_s, R) \geqslant |\varphi(z_s)| \,.\, A_1 \,.\, M(A_s, R_1)\ \forall_s$$

D'autre part on a : $A_s = \varphi_s + \sum_{p<s} \lambda_{s,p}\, \phi_p$ donc, en appliquant de nouveau le Th. (*), on voit qu'il existe une constante $A_2 > 0$ et un $R_2 \in]R-\varepsilon, R_1[$ tels que :

$$M(A_s, R_1) \geqslant A_2\, M(\phi_s, R_2) = A_2 (R_2)^{\|s\|}\ \forall_s.$$

Donc :

$$M(F_s, R) \geqslant |\varphi(z_s)| \,.\, A_1 \,.\, A_2 \,.\, (R_2)^{\|s\|}$$

$$\operatorname{lim.\,inf.} [M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} \geqslant R_2 > R - \varepsilon.$$

Enfin :

$$\operatorname{lim.\,Sup.} [M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} = \operatorname{lim.\,Inf.} [M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} = R$$

$$\lim. [M(F_s, R)]^{\frac{1}{\|s\|}} = R.$$ C.Q.F.D.

ERRATUM

Le Lemne 2 est faux, les conditions :

$$F^{(q)}(z_q) = 0 \text{ pour } q < s \quad , \quad F^{(q)}(0) = s\,!\, f^{(q-s)}(0) \text{ pour } q \geqslant s.$$

ne suffisent pas pour déterminer F de façon unique, car l'ordre $\leqslant$ n'est pas total sur N^n. Cependant, dans le cas où la suite $\{Z_s\}_{s \in N^n}$ est le produit n suites de nombres complexes $\{Z_k^{(j)}\}_{k \in N}$:

$$Z_s = \left(z_1^{(1)} , Z_{s_2}^{(2)} , \; \ldots\ldots , \; Z_{s_n}^{(n)} \right\} \quad , \forall\, s = (s_1 , s_2 \ldots s_n) \in N^n \Big) .$$

On peut définir sans ambiguïté les opérations $I\,(z_p ;\ p < s)$ en posant :

$$I\, z_p ; p < s)\,(f) = F$$

$$F\, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}) = s!\underbrace{\int_{z_0^{(1)}}^{z^{(1)}} dt_1^{(1)} \int_{z_1^{(1)}}^{t_1^{(1)}} dt_2^{(1)} \ldots \int_{z_{s_1-1}^{(1)}}^{t_{s_1-1}^{(1)}} dt_{s_1}^{(1)}}_{\text{Intégration par rapport à la } 1^{\text{re}} \text{ variable}} \ldots \underbrace{\int_{z_0^{(n)}}^{z^{(n)}} dt_1^{(n)} \int_{z_1^{(n)}}^{t_1^{(n)}} dt_2^{(n)} \ldots \int_{z_{s_n-1}^{(n)}}^{t_{s_n-1}^{(n)}} dt_{s_n}^{(n)}}_{\text{Intégration par rapport à la } n^{\text{ième}} \text{ variable}} f(t_{s_1}^{(1)}, \ldots , t_{s_n}^{(n)})$$

Si l'on suppose a priori que :

— $\{Z_s\}_{s \in N^n}$ soit un produit de n suites de nombres complexes $\{Z_k^{(j)}\}_{k \in N}$

— La fermeture $\overline{\{Z_s\}}$ de l'ensemble constitué par les éléments de $\{Z_s\}_{s \in N^n}$ soit un compact dans $\Omega^n \rho$.

Alors les Théorèmes 1 et 2 peuvent être modifiés de façon suivante :

Théorème 1 : *a*) Si $\{A_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ et si φ est non nulle sur $\overline{\{Z_s\}}$, alors $\{F_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$. *b*) Si $\{A_s\}$ et $\{F_s\}$ sont des bases de $H_n(\rho)$, alors φ est non nulle sur $\{Z_s\}$.

Théorème 2 : Si φ est non nulle sur $\overline{\{Z_s\}}$, alors $\{A_s\}$ est une base de $H_n(\rho)$ si et seulement si $\{F_s\}$ est une base q-p de $H_n(\rho)$.

Les Théorèmes 3 et 4 se modifient de façon analogue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SUNYER BALAGUER : Mem. Acad. Ci. Madrid. 5 (1959), n° 2.

[2] KAZMIN : Vestnik Moskov. Univ. Ser. I, Mat. Meh., 1962, n° 6, pp. 9-19.

[3] NGUYEN T. V. : Comptes Rendus. Ser. A, 263 (1966), pp. 782-784.

[4] POMMIEZ : Comptes Rendus. Ser. A, 262 (1966), pp. 226-228 et pp. 1103-1106.

[5] NEWNS : Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 245 (1953), pp. 429-468.

[6] MC ARTHUR & RETHERFORD : Math. Annalen. 164 (1966), pp. 39-42.

[7] WHITTAKER : Sur les séries de bases de polynômes quelconques. Gauthier-Villars, 1949.

[8] NGUYEN T. V. : Annales Fac. Sci. Toulouse. 4e série, 18 (1964), pp. 139-147.