ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. V. GROSJEAN

L'axiomatique des quanta, nouvelle axiomatique pour l'algèbre linéaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 30 (1966), p. 75-84
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1966_4_30__75_0>

L'axiomatique des quanta, nouvelle axiomatique pour l'algèbre linéaire

par P. V. GROSJEAN

INTRODUCTION ET SOMMAIRE

L'axiomatique de Landé [1] constitue la vue la plus profonde et la plus générale qu'on puisse avoir aujourd'hui des bases de la Mécanique quantique. Elle repose principalement sur la loi de composition des « amplitudes de transition » :

(1) $$\psi_{AB} \cdot \psi_{BC} = \psi_{AC}$$

Comme l'écrit Costa de Beauregard (op. cité, p. 24), « cette formule contient l'alpha et l'oméga de toute la Mécanique quantique ».

Or, pour un algébriste, (1) n'est visiblement qu'une loi de *composition d'applications :* un ensemble (C) est appliqué sur (B) par l'*applicateur* ψ_{BC}; et (B) est appliqué à son tour sur (A) par ψ_{AB}. Cette simple constatation rattache ainsi l'axiomatique de Landé à l'une des idées-forces de l'Algèbre moderne.

Mais comme l'outil fondamental de la Mécanique quantique n'en reste pas moins l'Algèbre linéaire, on peut se demander si cette dernière ne trouverait pas elle-même son alpha et son oméga dans la formule (1). Autrement dit : Ne serait-il pas possible de donner à l'Algèbre linéaire une axiomatique où l'accent serait mis principalement sur la notion d'applicateur (linéaire), et très secondairement sur celle de vecteur?

C'est une telle axiomatique qui va être amorcée. Nous disons bien amorcée, et non développée, car il n'est pas question d'écrire ici un nouveau traité d'Algèbre linéaire.

Cette axiomatique sera intimement associée à un système de notation, à la fois très simple et très général, système inspiré par la formule (1) et par le calcul tensoriel classique. Ce qui fera bénéficier l'Algèbre linéaire du remarquable *automatisme* des formules, si caractéristique de l'axiomatique de Landé-Dirac (cf. Costa de Beauregard, op. cité, pages 26, 43, 44 notamment).

Comme toute axiomatique, celle-ci n'aura d'autre prétention que de présenter de vieilles choses sous une peinture neuve...

---

(1) A. LANDÉ, « New Foundations of Quantum Mechanics » (Cambridge, 1965). Les lecteurs d'expression française auront intérêt à consulter l'excellent « Précis de Mécanique quantique relativiste » (Dunod, 1967), de O. COSTA DE BEAUREGARD, auquel il sera fait allusion plusieurs fois ici.

Chapitre I. — AXIOMATIQUE DES APPLICATEURS

§ 1 - Algèbre des matricules

1.1. — Soit M un demi-groupe non commutatif, doté d'une composition multiplicative et d'un élément neutre K. Ses éléments, notés A, B, etc., seront appelés des *demi-matricules*. Considérons alors M^2, l'ensemble des paires ordonnées de M, notées $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Dotons M^2 d'une loi de composition interne que nous appellerons la *fusion :*

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.C \\ B.D \end{pmatrix} \tag{2}$$

Cette loi, visiblement associative, fait de M^2 un demi-groupe multiplicatif, non communicatif, d'élément neutre $\begin{pmatrix} K \\ K \end{pmatrix}$. Ces paires seront appelées des *matricules.*

M^2 contient trois sous-ensembles remarquables, isomorphes à M, à savoir :

— celui des *paires symétriques,* du type $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$

— celui des *paires « inf-neutres »,* du type $\begin{pmatrix} A \\ K \end{pmatrix}$

— celui des *paires « sup-neutres »,* du type « dual » $\begin{pmatrix} K \\ A \end{pmatrix}$

1.2. — Nous introduisons une opération dite de *contraction,* consistant à supprimer un facteur qui serait commun aux deux termes d'une paire. La contraction est dite *impropre* lorsqu'elle porte uniquement sur K; c'est une opération toujours possible, mais qui laisse invariante la paire ainsi contractée. Exemples de contractions propres :

$$\begin{pmatrix} ABC \\ DB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AC \\ D \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K \\ K \end{pmatrix} \tag{3}$$

1.3. — La *fusion contractée* est une composition obtenue en contractant B et C *lorsqu'ils sont égaux,* dans une fusion telle que (2). Nous adopterons le signe O et nous écrirons ainsi, dans le cas où se présente un nombre quelconque de matricules-facteurs :

$$\boxed{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \circ \cdots \circ \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ J \end{pmatrix}} \tag{4}$$

Il est expressément convenu que les demi-matricules en contraction se disposent toujours selon l'oblique « sud-ouest, nord-est » joignant deux facteurs *contigus*. La contraction peut porter simultanément sur tous les facteurs des demi-matricules, ou sur certains d'entre eux seulement; dans ce dernier cas, les demi-matricules résiduels se composent selon la loi (2).

Bien qu'elle soit associative, la composition (4) n'est en rien une loi de groupe ou de demi-groupe : c'est une *composition en chaîne* dont l'exemple le plus connu est la composition polygonale des « vecteurs liés » : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots$ (Par parenthèse, ces bons vieux vecteurs liés ne sont en rien des vecteurs pour l'algébriste moderne, puisque $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ n'a aucun sens si $B \neq C$ et qu'ainsi cette composition n'est pas une loi de groupe). Toutefois, si tous les demi-matricules sont égaux dans (4), la composition est groupale; mais alors, tout matricule symétrique est idempotent.

1.4. — Tout produit, contracté sur K uniquement, est une simple fusion; mais inversement, toute fusion sans contraction propre, se ramène à une contraction sur K. En définitive, il n'existe donc qu'une seule loi de composition, la loi ($\circ$), et nous n'aurons plus à employer le signe $\times$.

Cette loi n'est pas commutative, mais il existe cependant des cas importants de commutativité, dont notamment le suivant, écrit en faisant usage, pour la dernière fois ici, du signe $\times$:

$$(5)\quad \left[\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}\right]\times\left[\begin{pmatrix}D\\E\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}E\\F\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}AD\\CF\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}D\\E\end{pmatrix}\right]\circ\left[\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}E\\F\end{pmatrix}\right]$$

Ce qu'on lira, en abrégé : La fusion d'un produit est égale au produit des fusions.

1.5. — La *transposition* est une opération involutoire dans M et dans M^2, notée $\dagger$, et définie comme suit :

$$(6)\qquad {}^{\dagger}\begin{pmatrix}AB\\CD\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dagger D & \dagger C\\ \dagger B & \dagger A\end{pmatrix}$$

Elle définit un anti-automorphisme dans M, mais aussi dans M^2, à cause de la convention draconienne de « l'oblique S-W, N-E » :

$$(7)\qquad {}^{\dagger}\left[\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\dagger C\\ \dagger B\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}\dagger B\\ \dagger A\end{pmatrix}$$

§ 2 - Algèbre des applicateurs

2.1. — Supposons maintenant qu'il existe une famille d'ensembles, chacun de ceux-ci étant « immatriculé » biunivoquement par un élément de M^2. Ces ensembles seront notés V^A_B ; et le matricule figurera aussi dans la notation de leurs éléments respectifs. *Tous* les éléments de *tous* ces ensembles seront appelés des *applicateurs,* quel que soit leur matricule, mais avec toutefois les dénominations particulières ci-après :

— des *opérateurs,* si le matricule est symétrique : $A = B$

— des *scalaires,* si le matricule est neutre : A = K = B
— des *vecteurs,* si le matricule est inf-neutre; exemple : $x^{\mathrm{A}}_{\mathrm{K}}$ $(\mathrm{A} \neq \mathrm{K})$
— des *covecteurs,* si le matricule est sup-neutre; exemple : $a^{\mathrm{K}}_{\mathrm{A}}$ $(\mathrm{A} \neq \mathrm{K})$

2.2. — Il est alors postulé qu'entre les applicateurs existe une loi de composition (○), régie uniquement par les propriétés de la loi similaire relative aux matricules. Ce qui conduit à la *loi fondamentale :*

(8) $$\boxed{\mathrm{A}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} \bigcirc \mathrm{B}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{C}} \bigcirc \ldots \bigcirc \mathrm{G}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}} \bigcirc \mathrm{H}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{J}} = \mathrm{N}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{J}}}$$

avec ses cas particuliers de contractions impropres :

(8′) $$\mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} \bigcirc \mathrm{G}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{D}} = \mathrm{H}^{\mathrm{AC}}_{\mathrm{BD}}$$

(8″) $$\alpha^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}} \bigcirc \mathrm{A}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{E}} = \alpha^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}} \bigcirc \mathrm{A}^{\mathrm{AK}}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{\mathrm{KA}}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$$

cette dernière indiquant que le demi-matricule neutre peut toujours n'être que sous-entendu.

A la contraction des matricules correspondra la contraction des applicateurs (implicitement supposée possible, comme déjà ci-avant). A la transposition correspondra l'*adjonction :* $\dagger\mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} = \mathrm{F}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{A}}$ (lettre d'appui conservée, signe-croix omis sur les demi-matricules).

Parmi les cas particuliers de (8) on retiendra aussi :

(9) $$a_{\mathrm{A}} \bigcirc \mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} = b_{\mathrm{B}} \qquad \mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}} \bigcirc x^{\mathrm{B}} = y^{\mathrm{A}}$$

que les traités de Géométrie vectorielle transcrivent en remplaçant (A) par une flèche, et (B) par un indice courant : $\vec{y} = \vec{\mathrm{F}}_i . x^i$. Signalons aussi les deux expressions symétriques :

(10) $$a_{\mathrm{A}} \bigcirc x^{\mathrm{A}} = \alpha = \alpha^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}} \quad ; \quad x^{\mathrm{A}} \bigcirc a_{\mathrm{K}} = \varpi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}}$$

dont la première introduit les formes linéaires, et dont la seconde définira un projecteur affine lorsque $\alpha = \mathrm{I}^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}}$ (voir ci-après).

Pour tout ensemble $\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}}$ d'opérateurs, (8) est une loi de demi-groupe, par suite de l'idempotence des matricules symétriques; l'opérateur neutre sera noté $\mathrm{I}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}}$ (opérateur identique). Tout $\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}}$ contient un sous-ensemble isomorphe au demi-groupe $\mathrm{V}^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}}$, et dont les éléments seront les opérateurs scalaires : $\alpha^{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}} = \alpha\, \mathrm{I}^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}}$

On retiendra que la notation $\mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ *n'est pas* celle d'une application d'un ensemble (A) sur un ensemble (B) ou vice versa, bien que dans certains cas, $\mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ puisse être, accessoirement, le résultat d'une application (exemples : n-uples, suites mono- ou bilatères, fonction, etc). Non, $\mathrm{F}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{B}}$ est un *applicateur* parce qu'il est *potentiellement capable de réaliser une application,* de tout $\mathrm{V}^{\mathrm{B}}_{n}$ à sa droite, de tout $\mathrm{V}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{A}}$ à sa gauche, $\forall$ M, N $\in$ **M**. Les vecteurs et les covecteurs n'échappent pas à cette définition, comme le montrent clairement les relations (9) et (10). Cette définition donne un sens précis à la remarque intuitive, mais encore assez vague, formulée dans l'Introduction.

2.3. — Il reste à « linéariser » les ensembles immatriculés, ce qui se fera pour tous en bloc par deux postulats :

— $\forall$ A, B, V^A_B est un groupe abélien (loi notée +, neutre noté O^A_B) ;

— la loi ($\bigcirc$) se distribue bilatéralement sur la loi (+).

Dès lors, tout V^A_B est un K-module, et tout V^A_A est un anneau. La « vectorialisation » demandera un dernier postulat :

— V^K_K est un corps commutatif.

On supposera en outre que le corps est de caractéristique nulle. S'il est réel, $\dagger\alpha = \alpha$; s'il est le corps C, alors $\dagger\alpha =$ le conjugué complexe de α. Dans un V^A_A, $\bar{L}^A_A$ désignera l'opérateur inverse de L^A_A. Si $L^A_A = \dagger L^A_A$ l'opérateur est auto-adjoint (cas des scalaires réels) ; et si $\bar{L}^A_A = \dagger L^A_A$, l'opérateur est unitaire (cas de $i = \dagger\bar{i}$ dans C).

Si des ensembles d'applicateurs sont isomorphes, on pourra les noter $V^A_B \overset{is}{=} V^{A'}_{B'} \overset{is}{=} V^{A''}_{B''}$. Si un ensemble est sous-espace vectoriel d'un autre, on notera le premier V'^A_B, par exemple, le sur-ensemble étant V^A_B.

2.4. — Tel serait donc l'essentiel d'une axiomatique de l'Algèbre linéaire, dont la notion d'applicateur serait le fondement, et la loi (8), associée aux postulats du n° 2.3, la clé de voûte.

Parmi tous les développements possibles à partir de ces prémisses, nous esquisserons simplement les suivants, à titre exemplatif; on y verra apparaître la notion de « base vectorielle » comme un simple cas particulier de celle d'applicateur. On observera aussi, en passant, l'aisance et la généralité des lois et des notations, ainsi que l'automatisme des calculs.

§ 3 - Applicateurs semi-réguliers - Projecteurs - Bases

3.1. — G^B_A sera un *applicateur semi-régulier* sur A si :

(11) $$\exists\, F^A_B : \qquad F^A_B \bigcirc G^B_A = I^A_A$$

En effet :

(12) $$\left\{\begin{array}{l} \forall M : \ G^B_A \bigcirc x^A_M = G^B_A \bigcirc y^A_M = u^B_M \\ \Longrightarrow \ x^A_M = y^A_M = F^A_B \bigcirc u^B_M \end{array}\right.$$

On verra similairement que F^A_B est semi-régulier sur A. Mais ni lui, ni G^B_A ne sont nécessairement semi-réguliers sur B. Si (11) est réalisée pour $F^A_B = \dagger G^B_A$, on dira que F^A_B et son adjoint sont *normés sur A*.

En particulier, tout vecteur x^B_K est un applicateur semi-régulier sur K, puisqu'il existe au moins un covecteur a^K_B donnant (11) : $a_B \bigcirc x^B = 1$. Et x^B_K sera normé au sens banal si (11) est vraie pour $a^K_B = x^K_B$

3.2 — Si (11) est vérifiée, alors l'opérateur :

(12) $$P^B_B = G^B_A \bigcirc F^A_B ,$$

est idempotent; c'est un *projecteur*. On l'appellera « projecteur individuel » si $A = K$, et « projecteur standard » si dans (11,13), F^A_B est l'adjoint de G^B_A. Un projecteur standard est auto-adjoint : $P^B_B = \dagger P^B_B$.

P^B_A applique sur eux-mêmes F^A_B et G^B_A, ainsi que les applicateurs du type u^B_M apparus en (12) :

$$(14) \qquad P^B_B \circ u^B_M = P^B_B \circ G^B_A \circ x^A_M = G^B_A \circ x^A_M = u^B_M$$

Tous les u^B_A ainsi appliqués sur eux-mêmes forment un sous-espace applicatoriel, qu'on peut noter V'^B_M. Et celui-ci est isomorphe à V^A_M si bien qu'on peut écrire : $u^{B'}_M = u'^B_M = u^{A'}_M$; en effet, F^A_B n'étant pas nécessairement semi-régulier sur B, on peut avoir :

$$(15) \qquad x^A_M = F^A_B \circ u^B_M = F^A_B \circ v^B_M$$

Mais si $v^B_M = v'^B_M$, alors, en faisant agir G^A_B, on voit que $u^B_M = v^B_M \stackrel{is}{=} x^A_M$. En particulier, pour $A = K$ (projecteur individuel), et $N = K$, alors V'^B_K est isomorphe à V^K_K (considéré ici comme un espace d'applicateurs).

Deux projecteurs sont supplémentaires lorsque

$$(16) \qquad P^B_B + \hat{P}^B_B = I^B_B$$

Un projecteur, standard ou non, n'a qu'un seul supplémentaire. Par extension, I^B_B et O^B_B sont des supplémentaires « impropres ». Inutile de poursuivre ici cette théorie bien connue, mais qui n'en constitue pas moins la manière la plus élégante d'introduire les sous-espaces supplémentaires.

3.3 — Si dans (11,13), $P^B_B = I^B_B$, les deux applicateurs sont *réguliers* (deux fois semi-réguliers) ; nous dirons qu'ils sont *duals* l'un de l'autre, et non « inverses » puisque (8) n'est pas une loi de groupe, sauf si $A = B$ (cas des opérateurs). Employant la même lettre d'appui, on aura donc, comme cas particulier de (11,13), les relations fondamentales :

$$(17) \qquad E^A_B \circ \bar{E}^B_A = I^A_A \qquad\qquad E^B_A \circ \bar{E}^A_B = I^B_B$$

En particulier, ils peuvent être unitaires, auquel cas la barre d'inversion devient inutile dans la notation.

S'il existe une paire de duals tels que (17), il en existe une double infinité, dont chaque élément est donné par :

$$(18) \qquad D^A_B = L^A_A \circ E^A_B \circ M^B_B \iff E^A_B = \bar{L}^A_A \circ D^A_B \circ M^B_B \ ; \qquad \bar{D}^A_B = \ldots$$

L'applicateur régulier E^A_A sera appelé une *base de* V^A_M *selon* V^B_M, et une *cobase de* V^N_B *selon* V^N_A ; son dual recevra des appellations analogues. Deux espaces V^A_M et V^B_M seront isomorphes s'il existe au moins deux paires de bases duales donnant les relations :

$$(19) \qquad \forall x : \quad x^A_M = E^A_B \circ x^B_N \circ F^N_M \iff x^B_N = \bar{E}^B_A \circ x^A_M \circ \bar{F}^M_N$$

Et réciproquement. En particulier, pour M = N, la paire duale afférente pourra être la paire symétrique (I^{M}_{M} , I^{M}_{M}).

Les relations (18,19) contiennent toute la théorie de la représentation des vecteurs par des ensembles de composantes selon une base donnée, ainsi que celle des changements de base (substitutions linéaires). Si V^{A}_{K} est du type K^{n} il sera, par définition, « de dimension n », et cette propriété s'étendra à tous ses isomorphes, tels que V^{B}_{K}. En notation habituelle, où B est une flèche et A un indice courant, on retrouve les formules connues : $\overline{E}^{B}_{A} = \left[\vec{e}_{i}\right]$, d'où $\vec{x} = \vec{e}_{i} \cdot x^{i}$, etc.; et aussi $E^{A}_{B} = \left[\underrightarrow{e^{i}}\right]$, d'où $\underrightarrow{a} = a_{i} . \underrightarrow{e^{i}}$, etc (ici, $F^{M}_{N} = \overline{F}^{M}_{N} = I^{K}_{K} = 1$).

Ces mêmes relations (18,19) contiennent, comme cas particuliers : *a*) les relations de « représentation » entre opérateurs, si A = M, B = N; *b*) la théorie des « opérateurs semblables », si A = M = B = N, puisqu'alors on a, au lieu de (19) :

$$y^{A}_{A} = L^{A}_{A} \bigcirc x^{A}_{A} \bigcirc \overline{L}^{A}_{A} \tag{20}$$

Si dans (18), A = K, V^{A}_{K} est isomorphe à V^{K}_{K} (considéré comme espace d'applicateurs). En particulier, $\overline{E}^{B}_{A}$ et E^{K}_{B} peuvent être considérés comme des « unités », au sens physique du terme : « unités simples », si le demi-matricule B est simple, « unités composées » si, par exemple, B = L.M.T.$^{-1}$. Ainsi, toute la théorie des « dimensions physiques » se rattache à notre schéma universel de notations et de conceptions.

3.4. — Nous ne ferons qu'esquisser ici la théorie de la *dualité*. G_{AB} permet de définir des formes bilinéaires à valeurs dans V_{MN} :

$$G_{AB} \bigcirc (x^{A}_{M} \bigcirc y^{B}_{N}) = z_{MN} \tag{21}$$

(en particulier, si M = N = K, alors $V_{MN} = V_{K} = V^{K}_{K}$). Mais cet applicateur peut aussi appliquer $x^{A} \in V^{A}_{K}$ sur $x_{B} \in V^{K}_{B}$; il définira une dualité si A = B et s'il est régulier. En fait, G_{AA} permet d'introduire deux dualités, selon que l'on contracte le premier ou le second demi-matricule; d'où nécessité de compliquer la notation, soit en soulignant le A contracté. soit en affectant les A d' « indices-signes » (comme en Théorie unitaire par exemple). Si les deux dualités coïncident, alors G_{AA} est dit *symétrique,* et ces complications de notations disparaissent d'elles-mêmes.

Nous pouvons cependant supprimer cette petite difficulté d'une autre manière, qui va faire rentrer la dualité dans les schémas précédents, tout en préparant l'introduction des formes hermitiques. Pour cela, il suffit de se rappeler qu'il existe une dualité fondamentale, l'adjonction, déjà introduite; dès lors on posera :

$$\underline{\exists}\ G_{AA} \longleftrightarrow G^{A}_{A} : G_{\underline{A}A} \bigcirc x^{A}_{M} \longleftrightarrow x^{M}_{A} \bigcirc G^{A}_{A} : G_{A\underline{A}} \bigcirc x^{A}_{M} \longleftrightarrow G^{A}_{A} \bigcirc x^{A}_{M} \tag{22}$$

$$\Longrightarrow \quad G_{AA} \bigcirc (x^{A}_{M} \bigcirc y^{A}_{N}) \longleftrightarrow x^{M}_{A} \bigcirc G^{A}_{A} \bigcirc y^{A}_{N} \tag{22'}$$

Somme toute, on n'aura fait que donner, dans la pratique des calculs, la prépondérance à l'aspect « matriciel » de G_{AA}, plutôt qu'à l'aspect « tensoriel ». En particulier, les formes symétriques ($V^K_K = R$) et les formes à symétrie hermitique ($V^K_K = C$) seront introduites par :

(23) $$G^A_A = \dagger G^A_A \quad \Longrightarrow \quad x_A \circ G^A_A \circ y^A \overset{\text{déf.}}{=\!=} < x \mid G \mid y >$$

(Dans le réel, $G^A_A \neq \dagger G^A_A$ introduira les formes « pseudo-hermitiques » de la Théorie unitaire d'Einstein).

Enfin, soit E^A_B une base; celle-ci donnera une représentation G_{BB} :

(24) $$G_{AA} \circ (E^A_B \circ E^A_B) = G_{BB} \quad \Longleftrightarrow \quad E^B_A \circ G^A_A \circ E^A_B = G^B_B$$

où E^B_A est l'adjointe de E^A_B, et *non* son inverse (sa duale) : la représentation est une « congruence », et *non* une « similitude », *sauf* si E^A_B est unitaire. De même deux applicateurs « congrus » seront reliés par (24) où A = B :

(25) $$\dagger L^A_A \circ G^A_A \circ L^A_A = H^A_A$$

que l'on comparera, pour l'opposer, à (20).

Chapitre II. — RETOUR A LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Si maintenant on veut bien se référer à COSTA DE BEAUREGARD par exemple (op. cité.), on constatera qu'il y a identité complète entre cette axiomatique du Linéaire et l'axiomatique de LANDÉ-DIRAC VON NEUMANN, abstraction faite de l'interprétation physique, bien sûr, ainsi que de divergences de vocabulaires et de notations. La spécificité d'un problème quantique, — tout comme celle de beaucoup de problèmes de Physique théorique, — se marquera par le choix des espaces applicatoriels à employer, et par une définition mathématique correcte des opérations de contraction (ce qui ne sera pas toujours aisé!).

Ici, les demi-matricules désigneront des « observables », telles que, notamment, la position spatio-temporelle Q et l'impulsion-énergie P. L'observable neutre K se rattache au corps de base, C, devenu ainsi une ... « observable » (curieuse réintégration de la mathématique pure dans le monde sensible!). L'idée d'observable n'est opératoire que si elle se rattache à celle des valeurs de l'observable, ou des états « chiffrés » de l'observable. Si l'ensemble des états est incomplet, on aura, au lieu de l'observable A, seulement une observable réduite 'A, elle-même une observable.

La composition dans M est donc celle des observables : une paire d'observables est encore une observable (bien sûr!), même si les éléments de la paire s'opposent selon la complémentarité au sens de BOHR.

Nos applicateurs s'appellent ici des « amplitudes de transition », et leur loi de composition est (1), c'est-à-dire (8). Comme à tout F^A_B correspond un adjoint F^B_A, l'usage a prévalu, depuis DIRAC, d'écrire $F^A_B = \langle A|B \rangle$ et $F^B_A = \langle B|A \rangle$. Il y a là, en certains cas, un abus d'une notation qu'il est préférable de réserver, comme le font de nos jours presque tous les algébristes, aux formes sesquilinéaires à symétrie hermitique.

A toute « amplitude » F_B^A normée sur A (au sens du n° 3.1 ci-devant) correspond un projecteur standard P_B^B. On sait le rôle fondamental que Von Neumann a fait jouer à ces projecteurs auto-adjoints en Mécanique quantique; mais notre Algèbre des applicateurs vient de montrer l'importance de ces opérateurs, auxquels l'Algèbre classique n'assigne qu'un rôle plutôt modeste [1].

Parmi les espaces vectoriels qui seront le plus employé, il faut citer : *a*) l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables, à carré sommable et à dérivées à décroissance rapide, ainsi que ses sous-ensembles « à support compact »; *b*) son dual, ensemble des distributions tempérées. Et parmi les premiers, il faut citer V_K^Q et V_K^P, où le demi-matricule supérieur désigne l'observable « de la représentation ».

Nous écrirons ici : $\psi(q) = \psi_A^Q \in V_K^Q$, et $\dagger\psi(q) = \psi_Q^K$; ce qu'un théoricien quantiste traduirait par $\psi(q) = \langle Q|K\rangle$ et $\dagger\,\psi(q) = \langle K|Q\rangle$. Le postulat de la complémentarité (ou de l' « incertitude ») impose de choisir comme base unitaire U_Q^P de V_K^P selon V_K^Q, l'exponentielle normée : $U_Q^P = \alpha.\exp(2\pi.h^{-1}.p.q.)$, où $p.q. \in R^r$. Alors (19) est une transformation de Fourier, tandis que dans (17) apparaît $I_Q^Q = [\delta(q - q')]$, suite continue de distributions (d'ordre zéro) ou de mesures de Dirac : $q, q', \in R^r$.

Soit *b* une observable, réduite de B, et telle que $V_K^b \overset{\text{is}}{=} V_K^K$ (V_K^b est monodimensionnel, ce que rappelle l'emploi de la minuscule *b*). Et soit une suite complète orthonormée rattachée à A dans la représentation Q; cette suite constitue une base unitaire φ_A^Q. Si ψ_b^Q est développable selon cette suite, on écrira donc : $\psi_b^Q = \varphi_A^Q \circ C_B^A \Longleftrightarrow C_b^A = \varphi_Q^A \circ \psi_B^Q$ (développement dit de Fourier). Pour l'observable complète B, la formule est la même, la majuscule remplaçant la minuscule, et C_B^A étant alors une base unitaire.

Si $\psi_b^Q = \psi_K^Q$ est normée sur K, elle introduit un projecteur standard élémentaire $p_Q^Q = \psi_K^Q \circ \psi_Q^K = [\psi(q') \circ \psi^*(q)]$, avec $q, q', \in R^r$. A toute paire de projecteurs standards, dont l'un au moins est élémentaire (individuel), est associée une probabilité définie par : $\varpi = \langle \psi|P|\psi\rangle$ c.-à-d. :

$$\varpi_K^K = \psi_Q^K \circ P_Q^Q \circ \psi_R^Q = \psi_Q^K \circ \chi_E^Q \circ \chi_Q^E \circ \psi_K^Q = \mathrm{trace}\,(P_Q^Q \circ p_Q^Q)$$

Et on voit sans peine que $O \leqslant \varpi \leqslant 1$. Ce qui ouvre la porte des Probabilités aux Quanta, — mais aussi celle de l'Algèbre des applicateurs aux probabilités !

On se réfèrera à Costa de Beauregard pour d'autres développements, en particulier pour la théorie des propagateurs, qui s'exprime, elle aussi,

---

(1) Les projecteurs jouent un rôle tout aussi capital dans d'autres théories physiques, servant à construire, notamment, le tenseur « fluide parfait »; et on connaît l'importance que C. Cattaneo (Cours au Collège de France, 1961-62) leur a conférée en Relativité Générale.

dans la même axiomatique. Et l'on se trouvera toujours conduit à la même conclusion : La Théorie des Quanta, dans ses grands principes, est formellement identique à l'Algèbre des applicateurs, c'est-à-dire, en définitive, à l'Algèbre linéaire sous la forme que nous avons tenté de lui donner ici.

REMARQUE FINALE

Une composition en chaîne, telle que (4), est *toujours* possible sur *tout* ensemble-produit E^2, quelles que soient la nature de E et sa structure éventuelle. Cette loi est liée, en effet, à un processus logique fondamental : Penser la paire $(a, b) \in E^2$, puis la paire (b, c), conduit inéluctablement à penser la paire (a, c). Ainsi, la Théorie des quanta et l'Algèbre des applicateurs se rattachent-elles toutes deux à un mécanisme logique essentiel à la pensée humaine, et bien connu depuis ARISTOTE, celui de l' « Association des idées »...

Rabat, 1er novembre 1967.