Pàl Fischer

Sur l'équivalence des équations fonctionnelles $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f^2(x+y) = [f(x) + f(y)]^2$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 30 (1966), p. 71-74
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1966_4_30__71_0>

Sur l'équivalence des équations fonctionnelles

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f^2(x+y) = [f(x) + f(y)]^2$

par Pàl FISCHER

Résumé. — Dans cet article, M. Pàl Fischer compare les équations fonctionnelles $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f^2(x + y) = [f(x) + f(y)]^2$ où la fonction inconnue f est une application d'un demi-groupe Q dans un anneau commutatif H. Il montre que, pour que ces deux équations soient équivalentes, il faut et il suffit que H n'admette pas d'élément nilpotent différent de zéro.

Récemment ont paru plusieurs articles qui traitent de l'équivalence des équations fonctionnelles [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

M. E. Vincze dans son article [6] a démontré le théorème suivant : si $f(x)$ est une application d'un demi-groupe Q dans le corps commutatif H, les équations fonctionnelles :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

$$f^2(x + y) = (f(x) + f(y))^2 \qquad (2)$$

sont équivalentes, c'est-à-dire toutes les solutions de l'équation (1) sont solutions de l'équation (2) et inversement.

Le but de cet article est de donner les conditions suffisantes et nécessaires de l'équivalence. Premièrement, démontrons le théorème suivant :

Théorème I. — Si $f(x)$ est une application d'un demi-groupe Q dans l'anneau d'intégrité H, les équations fonctionnelles (1) et (2) sont équivalentes.

Démonstration. — Pour cela, il est suffisant de démontrer qu'une solution arbitraire de l'équation (2) est aussi solution de (1).

Si $a^2 = b^2$ dans un anneau d'intégrité, on en conclut immédiatement que $a = b$ ou $a = -b$.

Donc l'équation (2) se réduit à la forme suivante :

$$f(x + y) = e(x, y)\ [f(x) + f(y)] \qquad (3)$$

où $e(x, y)$ est une fonction réelle et $e^2(x, y) = 1$.
Si $f(x)$ est une solution de l'équation (2), on a :

$$f(2x) = 2\, e(x, x)\ f(x)$$

et :

$$f(3x) = e(x, 2x)\ [f(2x) + f(x)] = e(x, 2x)\ [2e(x, x) + 1]\ f(x)$$

donc d'une part

$$f(4x) = 2e(2x, 2x)\ f(2x) = 4e(x, x)\ e(2x, 2x)\ f(x)$$

d'autre part :

$$f(4x) = e(x, 3x)\ [f(x) + f(3x)] = e(x, 3x)\ [\{e(x, 2x)\ [2e(x, x) + 1]\} + 1]\ f(x)$$

d'où on obtient immédiatement :

$$f(2x) = 2f(x) \tag{4}$$

Si le théorème n'était pas vrai, il existerait deux éléments x et y de Q pour lesquels :

$$f(x + y) = -f(x) - f(y) \tag{5}$$

donc

$$f(2x + y) = e(2x, y)\ [2f(x) + f(y)] = e(x + y, x)\ [f(x + y) + f(x)]$$

Il faut distinguer deux cas :

$$1)\quad 2f(x) + f(y) = -f(y) \tag{6}$$

d'où l'on obtient :

$$f(x) + f(y) = 0$$

mais dans ce cas $f(x)$ satisfait l'équation 1;

$$2)\quad 2f(x) + f(y) = f(y)$$

d'où

$$f(x) = 0.$$

Si on échange les rôles de x et y, on obtient immédiatement :

$$f(y) = 0 \text{ également,}$$

ce qui démontre le théorème.

Dans ce qui suit, nous démontrons que le théorème I reste vrai si on remplace l'anneau d'intégrité H par un produit $\widetilde{\mathrm{H}}$ d'anneaux d'intégrité.

Plus précisément, le théorème suivant est vrai.

THÉORÈME II. — *Si $f(x)$ est une application d'un demi-groupe Q dans $\widetilde{\mathrm{H}}$, $\widetilde{\mathrm{H}}$ étant produit direct d'anneaux d'intégrité, les équations fonctionnelles (1) et (2) sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. — Pour la simplicité de l'exposé, supposons que $\widetilde{\mathrm{H}}$ est produit direct des anneaux d'intégrité H_1 et H_2 c'est-à-dire :

$\widetilde{\mathrm{H}} = \{(a, b) : a \in \mathrm{H}_1,\ b \in \mathrm{H}_2\}$ et les opérations dans H sont habituellement définies par les deux relations :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{et} \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2).$$

Si on désigne par $f_1(x)$ (resp. $f_2(x)$) la première coordonnée (resp. la seconde coordonnée) de la fonction $f(x)$, il en résulte que l'équation (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(f^2_1(x+y),\ f^2_2(x+y)) = ((f_1(x)+f_1(y))^2,\ (f_2(x)+f_2(y))^2) \qquad (7)$$

où $f_1(x)$ (resp. $f_2(x)$) est une application d'un demi-groupe Q dans l'anneau d'intégrité H_1 (resp. H_2) et elle satisfait l'équation (1), donc $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ la satisfait également.

Dans ce qui suit, nous démontrerons que si H contient un élément nilpotent différent de 0, les deux équations fonctionnelles ne sont pas équivalentes. En effet, soit $a \neq 0$, un élément nilpotent, il est évident qu'il existe un élément nilpotent b, tel que $b \neq 0$ et $b^2 = 0$. Soit $x_0 \neq 0$ un élément arbitraire de Q.

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases} \qquad (8)$$

On peut aisément vérifier que $f(x)$ satisfait l'équation (2) mais elle ne satisfait pas l'équation (1).

Un anneau commutatif H ne contient pas un véritable élément nilpotent si et seulement si H est un anneau d'intégrité ou le produit direct de ceux-ci. Utilisant cette propriété, nous avons démontré le théorème suivant :

THÉORÈME III. — Si $f(x)$ est une application d'un demi-groupe Q dans un anneau commutatif H, la condition suffisante et nécessaire de l'équivalence des deux équations est que H ne contienne pas un élément nilpotent véritable.

COROLLAIRE. — A l'aide de ce théorème, on peut donner une caractérisation de l'équation fonctionnelle de la différence entre le calcul opérationnel dans un intervalle fini et dans un intervalle infini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ACZEL, K. FLADT, M. HOSSZU : Lösungen einer mit dem Doppelverhältnis zusammerhängender Funktionalgleichung. MTA, Mat. Kut. Int. Közl., 7 A, 1962, 335-352.

[2] P. FISCHER, Gy. MUSZELY : A. CAUCHY — Félé függvényegyenletek bizonyos tipusu altalanositasai (en hongrois). Mat. Lapok, 16, 1965, 67-75.

[3] P. FISCHER, Gy. MUSZELY : On some new generalizations of the funrtional equation of CAUCHY. Canadian Mathematical Bulletin. Vol. 10, n° 2, 1967, 197-205.

[4] M. HOSSZU : Egy alternativ függvenyegyenletröl. Mat. Lapok, 14, 1963, 98-102. (En hongrois.)

[5] E. VINCZE : Alternativ függvenyegyenletek megoldasairol. Mat. Lapok, 14, 1963, 179-195. (En hongrois.)

[6] E. VINCZE : Beitrag zur Theorie der CAUCHY schen Funktionalgleichungen. Arch. Math., 15, 1964, 132-135.

[7] E. VINCZE : Über eine Verallgemeinerung der CAUCHY schen Funktionalgleichung. Funkeialaj Ekvacioj, 6, 1964, 55-62.