

A. CRUMEYROLLE

**Construction d'une nouvelle théorie unitaire en mécanique relativiste.
Théorie unitaire hypercomplexe ou complexe hyperbolique**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 29 (1965), p. 53-76

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1965_4_29_53_0

© Université Paul Sabatier, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Construction d'une nouvelle théorie unitaire en mécanique relativiste

Théorie unitaire hypercomplexe ou complexe hyperbolique

par A. CRUMEYROLLE

INTRODUCTION

On sait que la théorie de la Relativité générale se propose de déduire les lois de la mécanique et de la physique de conditions de structure géométrique de l'univers, ces conditions de structure étant autant que possible déduites d'un principe variationnel.

On peut considérer que la théorie d'EINSTEIN (1917) donne une solution parfaite de ce problème, en ce qui concerne la gravitation, dans le cas « extérieur », c'est-à-dire en dehors de la matière. Dans le cas intérieur l'introduction d'un terme phénoménologique, le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ apporte un caractère d'imperfection.

Diverses théories ont été proposées pour géométriser la théorie de tous les champs, en particulier pour incorporer gravitation et électromagnétisme dans un même hyperchamp : nous citerons les théories pentadimensionnelles (JORDAN - THIRY) et les théories unitaires asymétriques (EINSTEIN - SCHRÖDINGER).

Les théories à plus de quatre dimensions introduisent des coordonnées surabondantes dont il est d'usage de se débarrasser par un « passage au quotient ». La théorie de JORDAN - THIRY, malgré la synthèse connue qu'elle apporte conserve encore un tenseur phénoménologique dans le cas intérieur. C'est une théorie unitaire « extérieure ». La théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER supprime le terme phénoménologique : elle peut être considérée comme assez satisfaisante dans le cas extérieur, mais sous bien des réserves.

Il apparaît qu'il convient d'élargir le cadre géométrique de l'univers proposé par EINSTEIN en 1917 : l'espace riemannien quadridimensionnel est insuffisant pour une description purement géométrique des lois de la physique et de la mécanique. D'autre part, il semble que les quatre coordonnées d'espace et de temps soient suffisantes pour décrire tous les phénomènes.

Nous proposons d'interpréter l'espace-temps comme une sous-variété à 4 dimensions d'un hyper-univers octodimensionnel. Nous disposerons ainsi d'un espace-tangent à 8 dimensions sans introduire pour autant

dans la théorie des variables surabondantes. La vitesse sera de manière naturelle incorporée au champ.

Nous déduisons les équations des champs d'un principe variationnel unique ce qui nous permet dans le cas symétrique de donner une origine géométrique au tenseur d'énergie, bref de supprimer le caractère phénoménologique de la théorie de la Relativité générale dans le cas intérieur. Nous avons pu montrer que sous des hypothèses d'approximation et dans un cas particulier (λ et τ constants avec nos notations, cf. *infra*), cette théorie que nous qualifierons d'hypercomplexe, ou de « complexe hyperbolique » donne bien des équations analogues aux équations de MAXWELL dans le cas intérieur. Elle apporte avec le champ gravitationnel un autre champ qui présente des caractères d'analogie étroite avec le champ électromagnétique : en particulier on retrouve en première approximation les équations classiques du mouvement des particules chargées à partir des identités de conservation.

Rien n'oblige à supposer que λ et τ (cf *infra*) sont constants. Nous pourrions aussi étudier le cas où λ et τ sont variables : par exemple posant $\lambda^2 = \frac{Cz}{6}$, $\tau = \frac{Cz}{\lambda}$, où C est supposé constant, il est possible de mettre en évidence un courant essentiellement lié à $\Delta \rho$ dans le cas où le mouvement du fluide est irrotationnel. Nous ne reproduisons pas ici ces calculs. Nous signalons ce résultat qui permet de supposer que la théorie unitaire hypercomplexe peut donner lieu à des interprétations physiques fort variées.

VARIÉTÉS A STRUCTURE COMPLEXE HYPERBOLIQUE

Amplification d'un espace vectoriel

Soit E_K un espace vectoriel de dimension n sur un corps K qui sera toujours R ou C .

A est un anneau unitaire qui admet une structure d'algèbre associative sur K de dimension finie p . $(a_i), i = 1, 2 \dots p$, est une base de A sur K .

On démontre que l'on peut plonger E_K dans un A -module unitaire, défini à un A -isomorphisme près comme l'ensemble $E_A = A \otimes E_K$, muni de la loi de composition externe, $a' \cdot (a \otimes x) = a' a \otimes x, \forall a, a' \in A, \forall x \in E$, étendue par K -linéarité à un élément quelconque de E_A .

E_A est un module unitaire de dimension n sur A , admettant comme base $(1 \otimes e_i), i = 1, 2 \dots n$, identifiée à (e_i) base de E_K . E_A est aussi un espace vectoriel F de dimension np sur K (base $a_i \otimes e_j$). Ainsi si $E_K = K^n, E_A$ peut être identifié à A^n, F à K^{pn} . [1-2]

Ces notions sont susceptibles de s'étendre à des espaces, modules, ou anneaux A beaucoup plus généraux, nous nous limiterons ici à ce cas élémentaire.

Fonctions A-différentiables

Soit f une application de A dans A , posons :

$$\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \quad \tilde{f} \circ \varphi = \varphi \circ f$$

si φ désigne l'isomorphisme de A dans K^p naturellement associé au choix d'une base (a_i) dans A , cherchons à quelle condition f est A -linéaire, f étant supposée K -linéaire?

Posons $u = \varphi(z), \wedge$ est l'endomorphisme de K^p défini par :

$$\varphi(\lambda z) = \wedge(u) = \wedge \varphi(z) \quad (\lambda \rightarrow \wedge : \text{représentation régulière de } A).$$

Alors : $f(\lambda z) = \lambda f(z) \quad \forall \lambda, z \in A$, équivaut à

$$\varphi f(\lambda z) = \varphi(\lambda f(z))$$

$$\tilde{f} \varphi(\lambda z) = \wedge \varphi(f(z))$$

$$\tilde{f} \wedge(u) = \wedge \tilde{f}(u) \quad \forall u \in K^p$$

Donc pour que \tilde{f} induise une application linéaire de A dans A , il faut et il suffit que \wedge commute avec $\tilde{f}, \forall \lambda \in A$. (c'est-à-dire que f appartienne au centralisateur de la représentation régulière de A).

f désignant maintenant une application de la variété K^p dans elle-même,

on peut identifier l'espace tangent en $u \in K^p$ avec K^p et noter par \tilde{f} l'application tangente, on dira que f est différentiable au point z si :

- a) \tilde{f} est une application de K^p dans K^p au sens usuel.
 b) $\tilde{f} \wedge = \wedge \tilde{f}, \forall \lambda \in A$ (1)

Si A admet la base (a_i) sur K , la recherche des fonctions A -différentiables revient à trouver les applications K -différentiables de K^p dans K^p dont la matrice jacobienne commute avec les p éléments a_1, a_2, \dots, a_p .

Si $K = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$, le problème se ramène à chercher les matrices jacobiniennes 2×2 qui commutent avec l'opérateur linéaire associée à i .

Si $K = \mathbb{R}$, et A le corps des quaternions usuels de base $1, i, j, k$, le problème se ramène à la recherche des matrices jacobiniennes 4×4 à coefficients réels qui commutent avec les opérateurs associés à i et j (cela suffit, en raison de la table de multiplication). (De même pour tous les systèmes de quaternions.)

Si $K = \mathbb{R}$, $A = M_n(\mathbb{R})$, \tilde{f} se réduit à une homothétie. C'est sans intérêt.

Si $K = \mathbb{R}$ et si $A = \mathbb{H}$, \mathbb{H} extension quadratique de \mathbb{R} ,

$$\mathbb{H} = \{a + \varepsilon b; a, b \in \mathbb{R}\},$$

$\varepsilon^2 = 1$, le problème conduit à l'introduction de matrices jacobiniennes 2×2 :

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array} \right\| \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{array}$$

qui commutent avec l'opérateur associé à ε .

Applications A -différentiables de A^n dans A^n

Considérons A^n , A -module identifié à $A \otimes E_K = E_A$ et K^{pn} identifié à F .

Avec les notations précédentes, f est A -linéaire si et seulement si \tilde{f} commute avec l'endomorphisme Δ de K^{pn} associé à tout $\lambda \in A$;

$$\text{si } u = \varphi(z), \quad \varphi(\lambda z) = \Delta(u) = \Delta\varphi(z), \quad z \in A^n.$$

Or si z est de la forme $a \otimes x$ $a \in A$

$$x \in E_K$$

$$\lambda z = \lambda \cdot (a \otimes x) = \lambda a \otimes x, \text{ de sorte}$$

que Δ est le produit tensoriel de l'opérateur \wedge défini plus haut, par I_n . f désignant maintenant une application de la variété K^{pn} dans K^{pn} , avec le même abus de notation que plus haut, nous dirons que f est A -différentiable :

a) si \tilde{f} est différentiable au sens usuel

b) si $\tilde{f} \circ \Delta = \Delta \circ \tilde{f}, \quad \Delta = \Lambda \otimes I_n, \quad \lambda \in A$ (3)

(\tilde{f} appartient au centralisateur de la représentation $\lambda \rightarrow \Lambda$)

Définition d'une variété A-différentiable

V est un espace topologique que nous supposerons séparé au sens de Hausdorff; une carte locale de V est un couple (U, φ) constitué par un ouvert U de V et un homéomorphisme de U sur un ouvert de Aⁿ, n étant un entier positif; n est la dimension de U sur A.

Une structure de A-variété différentiable de dimension n est définie sur V comme dans le cas usuel :

- 1° il existe une famille de cartes (U_α, φ_α)_{α ∈ J} telle que $\bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha} = V$;
 - 2° α, β ∈ J tels que U_α ∩ U_β ≠ ∅, φ_β ∘ φ_α⁻¹ est une application A-différentiable de φ_α(U_α ∩ U_β) sur φ_β(U_α ∩ U_β) ;
 - 3° toute carte locale (U, φ) telle que φ ∘ φ_α⁻¹ soit un A-difféomorphisme de φ_α(U_α ∩ U) sur φ(U_α ∩ U) peut être incorporée à la famille des cartes.
- Il est clair que V peut être muni d'une structure de variété de dimension pn sur K : V_K^{pn}.

Les propriétés de l'algèbre A se refléteront dans celles de la variété V. Ainsi si la représentation régulière de A est complètement réductible, la variété V se décomposera : c'est là la distinction essentielle entre le cas où A = C et le cas où A = H.

Variétés à structure complexe hyperbolique (ou H-complexes)

De telles variétés ont été considérées antérieurement par P. LIBERMANN (1954-1955) et G. LEGRAND (1956) mais dans un contexte différent.

Prenons donc A = H, H admet la base (1, ε) avec ε² = 1.

Nous introduisons aussi la base e_I, e_{II} telle que :

$$e_I = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \quad e_{II} = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon), \quad e_I e_{II} = 0, \quad (e_I)^2 = e_I, \quad (e_{II})^2 = e_{II}$$

H est le composé direct de deux corps isomorphes à R. Nous dirons que a + ε b et a - ε b, (a, b ∈ R) sont conjugués.

Soit g l'application linéaire associée à ε de matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ dans la base (1, ε). Δ = g ⊗ I_n admet la matrice : (4) $\begin{vmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{vmatrix}$ dans la base de R²ⁿ

$$\begin{pmatrix} 1 \otimes e_{\alpha} = e_{\alpha} \\ \varepsilon \otimes e_{\alpha} = e_{\alpha^*} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 1, 2 \dots n \\ (e_{\alpha}) \text{ base de E} \end{array} \right)$$

cette base sera dite « associée ».

Si on rapporte R²ⁿ à la base : e_I ⊗ e_α = f_α (base « produit »)
e_{II} ⊗ e_α = f_{α*}

la matrice de Δ s'écrit : $\begin{vmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_n \end{vmatrix}$ (5)

Introduisant l'amplifié de \mathbb{R}^{2n} et l'application H-linéaire qui prolonge Δ (notée encore Δ), la matrice de Δ dans le repère de \mathbb{H}^{2n} :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha + \varepsilon e_{\alpha^*})$$

$$\varepsilon_{\alpha^*} = \frac{1}{2}(e_\alpha - \varepsilon e_{\alpha^*})$$

qui sera dit repère « adapté » s'exprimera par :

$$\left\| \begin{array}{cc} \varepsilon I_n & 0 \\ 0 & -\varepsilon I_n \end{array} \right\|$$

V , (ou $V_{\mathbb{R}^{2n}}$) désignera une variété H-complexe de dimension n sur \mathbb{H} : elle est munie naturellement d'une structure de variété réelle de dimension $2n$.

Soient $z^\alpha = x^\alpha + \varepsilon x^{\alpha^*} = e_I \xi^\alpha + e_{II} \xi^{\alpha^*}$

$$\alpha = 1, 2 \dots n$$

les n coordonnées de $x \in V$, dans un ouvert U_α , Δ ayant la matrice (4) en coordonnées (x^α, x^{α^*}) et (5) en coordonnées $(\xi^\alpha; \xi^{\alpha^*})$, les hypothèses de H-différentiabilité donnent, en exprimant que Δ commute avec la matrice jacobienne du changement de coordonnées :

$$(7) \quad \frac{\partial x^{i^*}}{\partial x^{j^*}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} \quad \begin{array}{l} i, j = 1, 2, \dots, 2n \\ * = \pm n \end{array}$$

ou (coordonnées « associées »)

$$(8) \quad \frac{\partial z^{x'}}{\partial z^{\lambda^*}} = \frac{\partial z^{x^*}}{\partial z^{\lambda}} = 0 \quad (\text{coordonnées « produits »})$$

et ceci montre que V s'identifie au produit de 2 variétés réelles identiques $V = W \times W$. [VII, 3.]

Sous-variété diagonale. Coordonnées diagonales

$\mathcal{U}_{\mathbb{R}}^n$ (ou \mathcal{U}) désigne la sous-variété de $W \times W$ formée de couples identiques.

$(0_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in J}$ étant un atlas de W , on peut définir un atlas sur un voisinage de \mathcal{U} , dans V , par la famille :

$$\begin{array}{l} (0_\alpha \times 0_\alpha, \psi_\alpha \times \psi_\alpha)_{\alpha \in J} \\ \psi_\alpha \times \psi_\alpha : (p, q) \in 0_\alpha \times 0_\alpha \rightarrow (\xi^\alpha, \xi^{\alpha^*}) \\ \text{si } \psi_\alpha : p \in 0_\alpha \rightarrow \xi^\alpha \\ \quad \quad \quad q \in 0_\alpha \rightarrow \xi^{\alpha^*} \end{array}$$

comme :

$$(9) \quad \begin{array}{l} \frac{\partial z^{x'}}{\partial z^{\lambda^*}} = \frac{\partial x^{x'}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial x^{x'}}{\partial x^{\lambda^*}} \\ \frac{\partial z^{x^*}}{\partial z^{\lambda^*}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda^*}} \end{array}$$

la condition :

$$(10) \quad \frac{\widehat{\partial x^{\alpha'}}}{\widehat{\partial x^{\lambda*}}} = \frac{\widehat{\partial x^{\alpha*'}}}{\widehat{\partial x^{\lambda}}} = 0$$

($\widehat{}$ désigne la restriction à \mathcal{U})

caractérise un tel atlas : les coordonnées correspondantes seront appelées diagonales (produit ou associées). [VII, 3.]

Sur \mathcal{U} : $\widehat{\xi}^\alpha = \widehat{\xi}^{\alpha*}$ ou $\widehat{x}^{\alpha*} = 0$,

les (\widehat{x}^α) sont des coordonnées quelconques.

Les connexions de type « unitaire »

On peut considérer au point x de V le module tangent M_x sur H que l'on peut identifier à un espace vectoriel $(T_x)_R$ de dimension $2n$, on peut enfin introduire l'amplifié de ce dernier par passage de R à H : nous le noterons $(T_x)_H$. Le repère $(dz^\alpha, dz^{\alpha*} = \overline{dz^\alpha})$ de $(T_x)^*_H$ est « adapté » au sens donné plus haut. Il correspond aux $2n$ coordonnées H -complexes z^α et $\overline{z^\alpha}$.

Les connexions introduites sont relatives à l'espace fibré des repères de l'espace vectoriel $(T_x)_R$: elles sont réelles.

L'étude des connexions ∇ , telles que si $X_x \in (T_x)_R$

$[\nabla_x, \Delta] \equiv \nabla_x \Delta = 0$ ⁽¹⁾ est classique [XI, 2], nous considérons ici les connexions ∇ telles que :

$$(11) \quad \underline{[\nabla_x, \Delta] (Y)} \equiv (\nabla_x \Delta) (Y) = \Delta \cdot T(X, Y) \quad X_x, Y_x \in (T_x)_R$$

où $T(X, Y)$ désigne la valeur de la forme de torsion T , 2-forme vectorielle contravariante, pour les champs X et Y .

(11) s'écrit encore, en coordonnées naturelles :

$$(12) \quad \nabla_r \Delta^s_t = 2 S^k_{rt} \Delta^s_k \quad (S^k_{rt} \text{ tenseur de torsion})$$

et équivaut en repères associés : (coordonnées $x^\alpha, x^{\alpha*}$)

$$\grave{a} : \underline{L^i_{jk} = L^i_{k^*j^*}} \quad * = \pm n \quad (13)$$

et en repères adaptés (coordonnées $z^\alpha, z^{\alpha*}$) \grave{a} :

$$\left. \begin{aligned} W^{\alpha}_{\beta\gamma} &= W^{\alpha}_{\gamma\beta} \\ W^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} &= -W^{\alpha}_{\gamma^*\beta^*} \\ W^{\alpha}_{\beta^*\gamma} &= W^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ et (f.c.c.)} \quad (14)$$

L^i_{jk}, W^i_{jk} désignant les coefficients de ∇ . [VII. 1 et VII, 3.]

La forme quadratique fondamentale et les conditions de Ricci sur V .

Il est possible d'introduire localement sur V un champ de tenseurs symétriques réels de type (0, 2) de composantes g_{ij} en coordonnées associées et

(1) Ce sont des A-connexions pour la structure de A-variété différentiable.

γ_{ij} en coordonnées adaptées : $\overline{\gamma_{ij}} = \gamma_{i^*j^*}$. Les g_{ij} sont des fonctions différentiables au sens ordinaire de (x^α, x^{α^*}) et nous posons :

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}} \right) \quad (\text{et f.c.c.})$$

Existe-t-il des connexions de type unitaire qui sont aussi euclidiennes sur V? Si ce problème est possible, il conduit aux systèmes suivants qui traduisent : $\nabla \gamma_{ij} = 0$

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^\rho} - W_{\alpha\varrho}^i \gamma_{i\beta} - W_{\beta\varrho}^i \gamma_{\alpha i} = 0 \quad (15-1)$$

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial z^\rho} - W_{\alpha\varrho}^\sigma \gamma_{\sigma\beta^*} - W_{\alpha\varrho}^{\sigma^*} \gamma_{\sigma^*\beta^*} = 0 \quad (15-2)$$

$$\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial z^{\sigma^*}} = 0 \quad (15-3)$$

Posant : $\gamma_{\lambda\beta^*} \gamma^{\lambda\alpha^*} = \delta_{\beta^*}^{\alpha^*} = \gamma_{\lambda\beta^*} \gamma^{\lambda^*\alpha^*}$, sous des conditions de régularité évidentes, on obtient :

$$W_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\lambda^*} \left(\frac{\partial \gamma_{\beta\lambda^*}}{\partial z^\gamma} + \frac{\partial \gamma_{\gamma\lambda^*}}{\partial z^\beta} \right) \quad (16)$$

$$W_{\beta\gamma}^{\alpha^*} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha^*\lambda^*} \left(\frac{\partial \gamma_{\beta\lambda^*}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \gamma_{\gamma\lambda^*}}{\partial z^\beta} \right) \quad (17)$$

avec les conditions de possibilité (15-3) et :

$$(\partial_\varrho \gamma_{\alpha\beta^*} + \partial_\alpha \gamma_{\varrho\beta^*}) - 2 \gamma_{\lambda\beta^*} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \varrho \end{matrix} \right\} \quad (18)$$

$$= \gamma^{\delta\lambda} \gamma^{\sigma^*\varrho^*} \gamma_{\lambda\beta^*} [\gamma_{\alpha\sigma^*} (\partial_\theta \gamma_{\varrho\beta^*} - \partial_\varrho \gamma_{\theta\beta^*}) + \gamma_{\varrho\sigma^*} (\partial_\theta \gamma_{\alpha\beta^*} - \partial_\alpha \gamma_{\theta\beta^*})] \text{ où } \partial_\varrho = \partial/\partial z^\varrho.$$

$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha \varrho \end{matrix} \right\}$ désignant les symboles de CHRISTOFFEL de $\gamma_{\alpha\beta}$.

Signalons deux cas où il y a des solutions au problème posé :

$\gamma_{\alpha\beta^*} = \gamma_{\alpha^*\beta} = 0$, alors $W_{\beta\gamma}^{\alpha^*} = 0$ en général, et les $W_{\alpha\beta\gamma}$ sont égaux à $\{\alpha\beta\gamma\}$

$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha^*\beta^*} = 0$: le calcul précédent n'est plus entièrement valable, mais on obtient directement

$$\gamma_{\alpha\beta^*} = \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial z^\alpha \partial z^{\beta^*}} \quad \text{où } \phi \text{ } \Phi \text{ peut être choisi à valeurs réelles)}$$

$$W_{\beta\gamma}^\alpha = \gamma^{\alpha\lambda^*} \frac{\partial \gamma_{\beta\lambda^*}}{\partial z^\gamma}$$

$$W_{\alpha\varrho}^{\sigma^*} \gamma_{\sigma^*\beta} + W_{\beta\varrho}^{\sigma^*} \gamma_{\alpha\sigma^*} = 0$$

ce qui, d'une certaine manière, rappelle les variétés khälériennes. [VII-3.]

CHAPITRE II

**GÉOMÉTRISATION ET ÉLARGISSEMENT
DE LA THÉORIE UNITAIRE D'E. S.**

Dans ce qui suit on prendra $n = 4$, mais au moins au début, ce n'est pas indispensable. A toute variété V , munie de sa structure de H -variété différentiable, d'une connexion de type unitaire L^i_{jk} , d'un champ de tenseurs symétriques g_{ij} , tels que $\widehat{g}_{\alpha\beta} = \widehat{g}_{\alpha\beta^*} = 0$ en coordonnées diagonales sur \mathcal{U} , ($x^{\alpha^*} = 0$), associons respectivement : la sous-variété diagonale \mathcal{U} , un champ de tenseurs $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, une connexion $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ un champs de tenseurs de type (1, 2)

$$\wedge^{\alpha}_{\beta\gamma}, \text{ tels que : } \widehat{g}_{\alpha\beta^*} = \mathcal{G}_{\alpha\beta}, \widehat{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}, \widehat{L}^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

(les composantes étant considérées dans les coordonnées x^{α})

Cette correspondance définit intrinsèquement un foncteur pour des catégories et morphismes qu'il serait facile d'expliciter.

Exprimons donc que $\nabla \gamma_{ij} = 0$, on obtient :

$$\partial_{\lambda} \mathcal{G}_{\alpha\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\alpha\lambda} \mathcal{G}_{\sigma\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\beta\lambda} \mathcal{G}_{\alpha\sigma} = 0 \quad (19)$$

$$\wedge^{\sigma}_{\lambda\alpha} \mathcal{G}_{\sigma\beta} + \wedge^{\sigma}_{\lambda\beta} \mathcal{G}_{\alpha\sigma} = 0 \quad (20)$$

$$\wedge^{\sigma}_{\alpha\lambda} \mathcal{G}_{\beta\sigma} + \wedge^{\sigma}_{\beta\lambda} \mathcal{G}_{\alpha\sigma} = 0 \quad (21)$$

Posons : $\gamma_{ij} = \mathcal{R}_{ij} + \varepsilon \mathcal{J}_{ij}$ (\mathcal{R}_{ij} partie « réelle »
 \mathcal{J}_{ij} partie « imaginaire »)

$$\begin{aligned} T^{\alpha}_{\beta} &= - \wedge^{\lambda}_{\lambda\beta^*} \wedge^{\lambda^*}_{\lambda\alpha} \\ &= k_{\sigma\beta} h^{\sigma\alpha}, \text{ avec} \\ \mathcal{G}_{\alpha\beta} &= h\alpha\beta + k\alpha\beta, \quad h\alpha\beta = \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha}(\alpha\beta), \quad k\alpha\beta = \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha}[\alpha\beta] \\ \mathcal{G}^{\alpha\beta} &= l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \\ l^{\alpha\beta} &= \mathcal{G}^{(\alpha\beta)} \\ m^{\alpha\beta} &= \mathcal{G}^{(\alpha\beta)} \end{aligned}$$

alors il vient :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}} &= \widehat{\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\lambda}}} = \widehat{\frac{\partial \mathcal{J}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda^*}}} = 0 \\ \widehat{\gamma_{\alpha\beta}} &= \frac{\varepsilon \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha}(\alpha\beta)}{2}, \quad \widehat{\gamma_{\alpha\beta^*}} = - \frac{\varepsilon \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha}[\alpha\beta]}{2} \\ \widehat{\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha}(\alpha\beta)}{\partial x^{\lambda}} \\ \widehat{\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\lambda^*}}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \widehat{\mathcal{J}_{\alpha\beta^*}}}{\partial x^{\lambda^*}} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta^*}}{\partial x^{\lambda^*}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{G}_{\beta}^{\alpha}[\alpha\beta]}{\partial x^{\lambda^*}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{W}_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \mathcal{L}_{[\beta\gamma]}^{\alpha} + \varepsilon \wedge_{[\beta\gamma]}^{\alpha} \\ \widehat{W}_{\beta\gamma}^{\alpha*} &= \mathcal{L}_{[\beta\gamma]}^{\alpha*} + \varepsilon \wedge_{[\beta\gamma]}^{\alpha*}\end{aligned}$$

Ainsi le calcul des « paramètres » $\frac{\widehat{\partial \mathcal{J}_{\alpha\beta}^{\gamma}}}{\partial x^{\alpha*}}$ et $\frac{\widehat{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}^{\gamma}}}{\partial x^{\alpha*}}$ permettra grâce à (17) d'obtenir les coefficients de connexion. Ce calcul utilise (18), que l'on sépare en partie « réelle » et « imaginaire ».

Posant :

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}^{\gamma}}}{\partial x^{\alpha*}} - \frac{\widehat{\partial \mathcal{R}_{\alpha\beta}^{\gamma*}}}{\partial x^{\alpha*}} &= \mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma} = -\mathfrak{E}_{\gamma\alpha\beta} \\ \frac{\widehat{\partial \mathcal{J}_{\alpha\beta}^{\gamma}}}{\partial x^{\alpha*}} - \frac{\widehat{\partial \mathcal{J}_{\alpha\beta}^{\gamma*}}}{\partial x^{\alpha*}} &= \mathbf{u}_{\alpha\beta\gamma} = -\mathbf{u}_{\gamma\alpha\beta}\end{aligned}$$

on trouve aisément [VII, 3] :

$$(22) \quad \mathfrak{E}_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta}^{\delta} T_{\gamma}^{\varepsilon} \mathfrak{E}_{\alpha\delta\varepsilon} + T_{\alpha}^{\delta} T_{\gamma}^{\varepsilon} \mathfrak{E}_{\delta\varepsilon\beta} + T_{\beta}^{\delta} T_{\alpha}^{\varepsilon} \mathfrak{E}_{\varepsilon\delta\gamma} \simeq 0$$

(modulo termes connus)

$$(23) \quad \mathbf{u}_{\alpha\beta\gamma} + \mathbf{u}_{\alpha\gamma\beta} + T_{\alpha}^{\delta} T_{\gamma}^{\varepsilon} \mathbf{u}_{\delta\varepsilon\beta} + T_{\beta}^{\delta} T_{\alpha}^{\varepsilon} \mathbf{u}_{\varepsilon\delta\gamma} = 0$$

La résolution de ces systèmes peut se faire, pour $n=4$, en calculant une forme réduite simple pour T^{α}_{β} . On trouvera les détails de la solution dans les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse [VII, 3] : la réduction repose sur la notion de sous-espace isotrope pour la métrique $\mathcal{G}(\alpha\beta)$ et sur la forme du polynôme minimal de T^{α}_{β} (on suppose que $\mathcal{G}_{(\beta\alpha)}$ est de type hyperbolique normal).

Il est connu que la résolution de (19) ou de (22) conduit à une solution unique en $\mathcal{L}^{\alpha\beta\gamma}$, les $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ étant donnés satisfaisant à des conditions très larges de régularité. [se reporter à XV].

Posant :

$\wedge_{\alpha[\beta\gamma]} = \wedge^{\sigma} [\beta\gamma] h_{\sigma\alpha}$, on tire aisément de (20) et (21) ou de (23) que :

$$\wedge^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]} = h^{\lambda\alpha} [\wedge^{\sigma} [\lambda\beta] k_{\sigma\gamma} + \wedge^{\sigma} [\lambda\gamma] k_{\sigma\beta}] \quad (24)$$

$$\wedge^{\sigma}{}_{(\alpha\beta)} k_{\gamma\sigma} = \wedge_{\alpha}{}^{\sigma} [\beta\gamma] + \wedge_{\beta}{}^{\sigma} [\alpha\gamma] \quad (25)$$

On rappelle que (23), ou (20) et (21), admettent toujours des solutions non triviales quand $h_{\alpha\beta}$ est régulier. On peut se donner arbitrairement un vecteur (U^{α}) et les coefficients $\wedge^{\alpha\beta\gamma}$ sont univoquement déterminés en fonction de (U^{α}) et des $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. On note que si $\det |k_{\alpha\beta}| = k = 0$, alors $\wedge^{\alpha}{}_{[\beta\alpha]} \equiv 0$ — [VII, 3].

Si $\mathcal{G}_{[\alpha\beta]} = 0$, alors $\Delta_{\alpha[\beta\gamma]}$ est antisymétrique en tous ses indices, d'après (20) et (21); définissant avec les notations habituelles :

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad , \quad \gamma^{\alpha\beta\gamma\delta} = - \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}}{\sqrt{|g|}}$$

$g = \det \mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm 1$ selon la parité de la permutation $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, on trouve dans ce cas :

$$\begin{aligned} \wedge_{\alpha[\beta\gamma]} &= \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} U^\delta \\ \wedge^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]} &= \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\delta} \varepsilon_{\delta\beta\gamma} U^\delta \end{aligned} \quad (26)$$

où les U^α sont les composantes d'un vecteur arbitraire U , on supposera que ces composantes sont des fonctions suffisantes régulières des coordonnées.

Le cas où les $k_{\alpha\beta}$ sont considérés comme « petits » par rapport aux $h_{\alpha\beta}$.

Nous posons : $\sum_{p.c.} \wedge_{\alpha(\beta\gamma)} = 3 V_{\alpha\beta\gamma}$ (p.c. signifie permutation circulaire)

Les $V_{\alpha\beta\gamma}$ sont antisymétriques en tous leurs indices; si nous définissons les $D_{\alpha\beta\gamma}$ par :

$$\wedge_{\alpha(\beta\gamma)} + \wedge_{\beta(\alpha\gamma)} = D_{\alpha\beta\gamma}$$

$$\text{il vient : } \wedge_{\alpha(\beta\gamma)} = V_{\alpha\beta\gamma} + \frac{D_{\alpha\beta\gamma} - D_{\alpha\gamma\beta}}{3}$$

(23) exprime que :

$$\wedge_{\alpha(\beta\gamma)} + \wedge_{\beta(\alpha\gamma)} = -T_{\gamma}^{\lambda} (T_{\alpha}^{\sigma} \wedge_{\sigma[\lambda\beta]} + T_{\beta}^{\sigma} \wedge_{\sigma[\lambda\alpha]})$$

ou que :

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta\gamma} = & -\frac{1}{3} T^{\lambda\gamma} T_{\alpha}^{\sigma} (D_{\sigma\lambda\beta} - D_{\sigma\beta\lambda}) - \frac{1}{3} T^{\lambda\gamma} T_{\beta}^{\sigma} (D_{\sigma\lambda\alpha} - D_{\sigma\alpha\lambda}) \\ & - T^{\lambda\gamma} T_{\alpha}^{\sigma} V_{\sigma\lambda\beta} - T^{\lambda\gamma} T_{\beta}^{\sigma} V_{\sigma\lambda\alpha} \end{aligned} \quad (27)$$

Comme la résolution du système (20), (21), montre que $D_{\alpha\beta\gamma}$ est univoquement déterminé par la donnée arbitraire des $V_{\alpha\beta\gamma}$, (27) a une solution unique, ces derniers coefficients étant choisis. (27) se prête à un calcul des $D_{\alpha\beta\gamma}$ par itération quand les $k_{\alpha\beta}$ (ou les T^{α}_{β}) sont considérés comme « petits », disons qu'ils sont d'ordre 2 au moins par rapport à un infiniment petit $\frac{1}{c}$.

Dans ces conditions :

$D_{\alpha\beta\gamma} = -T^{\lambda\gamma} (T^{\sigma}_{\alpha} V_{\sigma\lambda\beta} + T^{\sigma}_{\beta} V_{\sigma\lambda\alpha})$, modulo des termes d'ordre 8 en $\frac{1}{c}$, et à partir de là, il est sans difficulté de montrer que l'on peut exprimer $D_{\alpha\beta\gamma}$ sous forme d'une série entière relativement aux $n^2 T^{\alpha}_{\beta}$, convergente pour des T^{α}_{β} suffisamment voisins de 0.

Nous bornant aux termes principaux on trouve aisément :

$$(28) \quad \wedge_{\alpha(\beta\gamma)} = V_{\alpha\beta\gamma} + \frac{2}{3} T^{\lambda\beta} T^{\sigma}_{\gamma} V_{\sigma\lambda\alpha} + \frac{1}{3} T^{\sigma}_{\alpha} (T^{\lambda\beta} V_{\sigma\lambda\gamma} - T^{\lambda\gamma} V_{\sigma\lambda\beta})$$

(modulo des termes d'ordre 8 en $\frac{1}{c}$)

$$(29) \quad \wedge^{\alpha}{}_{(\beta\gamma)} = h^{\lambda\alpha} (V_{\lambda\beta\gamma} T^{\rho}_{\gamma} + V_{\lambda\gamma\beta} T^{\rho}_{\beta}), \text{ (modulo des termes d'ordre 6 en } \frac{1}{c} \text{) et}$$

il est possible, du moins théoriquement, de former des développements de $\wedge (\alpha_{\beta\gamma})$, $\wedge (\alpha_{\beta\gamma})$ en séries entières des variables T^α_β .

On observera que cette résolution par itération est indépendante de la dimension.

Notons que cette méthode d'itération s'applique aussi, en dimension quelconque, pour résoudre le système (22) équivalent à (19) et donne pour les termes principaux :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\alpha_{\beta\gamma}) &= \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \right\} \text{ (modulo des termes d'ordre 4 en } \frac{1}{c} \text{.)} \\ \mathfrak{L}(\alpha_{\beta\gamma}) &= \frac{h^{\alpha\lambda}}{2} (\partial_\lambda k_{\beta\gamma} + \partial_\gamma k_{\beta\lambda} - \partial_\beta k_{\gamma\lambda}) + T^\mu_\beta \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \gamma\lambda \end{smallmatrix} \right\} - T^\mu_\gamma \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{smallmatrix} \right\} \\ &\text{(modulo des termes d'ordre 4)} \end{aligned}$$

où les $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\lambda \end{smallmatrix} \right\}$ sont les symboles de Christoffel de $h_{\alpha\beta}$. On a supposé que les $\partial_\lambda k_{\alpha\beta}$ sont aussi d'ordre 2 en $\frac{1}{c}$.

Nous aurons besoin plus loin d'écrire les premiers termes des coefficients $\wedge (\alpha_{\beta\gamma})$, $\wedge (\alpha_{\beta\gamma})$. Nous tirons de (28) et (29) en prenant :

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\gamma} &= \sqrt{|h|} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} U^\delta & U_\alpha &= h_{\delta\alpha} U^\delta \\ & & h &= \det h_{\alpha\beta} \\ (30) \quad \wedge (\alpha_{\beta\gamma}) &= \sqrt{|h|} h^{\alpha\sigma} \varepsilon_{\sigma\beta\gamma\delta} U^\delta \text{ (modulo des termes d'ordre supérieur)} \\ \wedge (\alpha_{\beta\gamma}) &= \frac{\varepsilon^{\sigma\alpha\delta\lambda}}{\sqrt{|h|}} (h_{\lambda\beta} k_{\sigma\gamma} + h_{\lambda\gamma} k_{\sigma\beta}) U_\delta \text{ (modulo des termes d'ordre supérieur,} \\ (32) \quad \wedge (\alpha_{\beta\gamma}) &= 0 \text{ (modulo des termes d'ordre supérieur)} \\ (33) \quad \wedge (\alpha_{\beta\gamma}) &= \frac{\varepsilon^{\rho\delta\lambda}}{\sqrt{|h|}} h_{\lambda\gamma} k_{\sigma\rho} U_\delta \text{ (id}^\circ \text{)} \end{aligned}$$

Les tenseurs de Ricci généralisés

La forme de courbure de la connexion que l'on a introduite sur l'espace à 8 dimensions induit sur la sous-variété diagonale $\mathcal{V} : x^{\alpha^*} = 0$, une forme dont les composantes sont $\frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}^i_{j\lambda\mu}$, le chapeau désignant la restriction à \mathcal{V} .

$$\widehat{\mathcal{R}}^i_{j\lambda\mu} = \partial_\lambda L^i_{j\mu} - \partial_\mu L^i_{j\lambda} + L^i_{\rho\lambda} L^\rho_{j\mu} - L^i_{\rho\mu} L^\rho_{j\lambda} + L^i_{\rho^*\lambda} L^{\rho^*}_{j\mu} - L^i_{\rho^*\mu} L^{\rho^*}_{j\lambda}$$

Par contraction ordinaire, ou mixte on obtient les tenseurs de Ricci généralisés :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda}_{\lambda\beta} &, & \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda^*}_{\alpha^*\lambda\beta} \\ \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda^*}_{\alpha\lambda\beta} &, & \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda}_{\alpha^*\lambda\beta} \end{aligned}$$

Nous poserons :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta} &= \mathcal{P}_{\alpha\beta}, \quad \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda^*}_{\alpha^*\lambda\beta} = \widetilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta} \\ \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda^*}_{\alpha\lambda\beta} &= \mathcal{Q}_{\alpha\beta}, \quad \widehat{\mathcal{R}}^{\lambda}_{\alpha^*\lambda\beta} = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$(34) \quad \mathfrak{F}_{\alpha\beta} = \nu_\lambda \mathfrak{F}_{\alpha\beta}^\lambda - \nu_\beta \mathfrak{F}_{\alpha\lambda}^\lambda + \mathfrak{F}_{\beta\lambda}^\lambda \mathfrak{F}_{\alpha\beta}^\lambda - \mathfrak{F}_{\beta\beta}^\lambda \mathfrak{F}_{\alpha\lambda}^\lambda + \wedge^{\lambda\beta} \wedge^{\rho\alpha\beta} - \wedge^{\lambda\beta\gamma} \wedge^{\rho\alpha\lambda}$$

$$(35) \quad \mathfrak{Q}_{\alpha\beta} = \nu_\lambda \wedge^{\lambda\alpha\beta} - \nu_\beta \wedge^{\lambda\alpha\lambda} + \wedge^{\lambda\beta\lambda} \mathfrak{F}_{\alpha\beta}^\lambda - \wedge^{\lambda\beta\gamma} \mathfrak{F}_{\alpha\lambda}^\lambda + \mathfrak{F}_{\lambda\beta}^\lambda \wedge^{\rho\alpha\beta} - \mathfrak{F}_{\beta\gamma}^\lambda \wedge^{\rho\alpha\lambda}$$

$\widetilde{\mathfrak{F}}_{\alpha\beta}$ et $\widetilde{\mathfrak{Q}}_{\alpha\beta}$ se déduisent respectivement de $\mathfrak{F}_{\alpha\beta}$ et $\mathfrak{Q}_{\alpha\beta}$ en appliquant le principe dit de pseudo-hermiticité : $\mathfrak{F}_{\alpha\beta}^\lambda$, $\wedge^{\lambda\alpha\beta}$ remplacés respectivement par $\mathfrak{F}_{\beta\alpha}^\lambda$, $\wedge^{\lambda\beta\alpha}$.

Les scalaires $\mathfrak{G}^{\alpha\beta} \mathfrak{F}_{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta} \widetilde{\mathfrak{F}}_{\beta\alpha}$ et

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} \mathfrak{Q}_{\alpha\beta} + \mathfrak{G}^{\alpha\beta} \widetilde{\mathfrak{Q}}_{\beta\alpha}$$

sont séparément invariants par le prin-

cipe de pseudo-hermiticité.

On peut aussi noter que les identités de RICCI [VII, 1], montrent que compte tenu seulement de (19), (20), (21) : $\mathfrak{G}^{\alpha\beta} \mathfrak{F}_{\alpha\beta} = \mathfrak{G}^{\alpha\beta} \widetilde{\mathfrak{F}}_{\beta\alpha}$.

Le cas symétrique. Géométrisation complète de la théorie d'Einstein-Schrödinger dans le cas « intérieur ».

Les seules variables de champ sont les $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ assujetties aux relations (19) (20) et (21). U^α peut dépendre des coordonnées et des $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$. $\mathfrak{F}_{\beta\gamma}^\lambda$ et $\wedge^{\lambda\beta\gamma}$ sont définies en fonction des $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ et des 4 coefficients U^α .

Soit C une chaîne différentiable de dimension 4 de \mathcal{V} , les équations de la théorie relativiste complètement géométrisée sont celles qui réalisent l'extremum de l'intégrale pour toute variation arbitraire des $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}$ s'annulant sur la frontière de C.

$$(36) \quad I = \int_C \sqrt{|g|} \mathfrak{F}_{\alpha\beta} \mathfrak{G}^{\alpha\beta} dx.$$

$$(37) \quad \mathfrak{F}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} + 2 U_\alpha U_\beta - \lambda^2 \mathfrak{G}_{\alpha\beta}, \text{ où } \lambda^2 = U^\alpha U_\alpha.$$

$\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI usuel de la géométrie riemannienne.

1° Prenons $U_\alpha = (\sqrt{|g|})^\omega v_\alpha$, où ω et v_α sont des fonctions des seules coordonnées.

$\delta I = 0$ conduit alors à :

$$(38) \quad \mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathfrak{G}_{\alpha\beta} = \chi \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\alpha u_\beta - \frac{p}{c^2} \mathfrak{G}_{\alpha\beta} \right],$$

χ est la constante d'EINSTEIN,

$$\mathcal{R} = \mathfrak{G}^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta}, \quad U_\alpha = \lambda u_\alpha,$$

si $\lambda \neq 0$, (u_α) est un vecteur unitaire. Enfin ρ et p/c^2 sont définis par

$$\chi \rho = 3(1 - 2\omega)\lambda^2,$$

$$\frac{\chi p}{c^2} = 3(1 + 2\omega)\lambda^2.$$

On obtient donc le schéma « fluide parfait » ; $\rho \geq 0$, en supposant λ réel,

c'est-à-dire (U_α) orienté dans le temps, exige $\omega \leq 1/2$.

$\omega = -1/2$ donne le schéma « manière pure ».

Notons que les équations gardent un sens mathématique pour $\omega > 1/2$, ρ est négatif. Peut-être y a-t-il une interprétation physique? (2)

2° Prenons

$$U_\alpha = (\sqrt{|g|})^\omega (\theta^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{\alpha\beta})^{\omega'} v_\alpha, \quad \theta^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{\alpha\beta} = \theta \neq 0;$$

les coefficients $\theta^{\alpha\beta}$, ω , ω' , v_α ne dépendent que des coordonnées.

Un calcul analogue au précédent conduit à

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{G}_{\alpha\beta} = \gamma \left[\varphi u_\alpha u_\beta + \frac{p}{c'} (u_\alpha u_\beta - \mathcal{G}_{\alpha\beta}) - \frac{12 \omega' \lambda^2}{\gamma \theta} \theta_{\alpha\beta} \right],$$

équations qui correspondent au schéma « fluide visqueux », si

$$\theta^{\alpha\beta} v_\beta = 0,$$

ce qu'il est loisible de supposer a priori

3° *Généralisation.* — On obtiendra une infinité de schémas en faisant varier arbitrairement la manière dont les U_α dépendent des $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$.

Ainsi, posant par exemple :

$$U_\alpha = f(\mathcal{G}^{\alpha\beta}) v_\alpha, \quad U_\alpha = \lambda u_\alpha,$$

où f est une densité scalaire, il vient, les v_α étant indépendants des $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{G}_{\alpha\beta} = 6\lambda^2 u_\alpha u_\beta - 3\lambda^2 \mathcal{G}_{\alpha\beta} + 6\lambda^2 \frac{\partial \text{Log} |f|}{\partial \mathcal{G}^{\alpha\beta}}, \quad [\text{VII}, 4].$$

(2) On pourrait trivialement adapter cette méthode à la théorie de Jordan-Thiry qui se trouverait ainsi complètement géométrisée, même dans le cas « intérieur », gravitationnel et électromagnétique. Cependant il nous paraît intéressant de chercher à construire dans notre seul contexte géométrique une théorie unitaire asymétrique.

CONSTRUCTION D'UNE NOUVELLE THÉORIE UNITAIRE

Nous prenons le cas général où les $\mathcal{G}^{[\alpha\beta]}$ sont non nuls. Les tenseurs $h_{\alpha\beta}$ et $k_{\alpha\beta}$ sont supposés réguliers et nous postulons outre les condition (19), (20) et (21) que :

(39) $\lambda_{\gamma} (\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\gamma\beta}) = 0$ (qui entraînent que $S^{\rho}_{\gamma\alpha} = 0$ et réciproquement).
[XI, 1.]

Tenant compte du principe de pseudo-hermiticité et des conditions (39), nous formons les équations du champ par une méthode analogue à celle du cas symétrique, à partir de l'intégrale :

(40)
$$I = \int_c \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \left[\mathcal{F}^{\alpha\beta} + \tau \frac{(\mathcal{Q}_{\alpha\beta} + \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha\beta})}{2} - 2 \sigma_{\alpha} \lambda_{\gamma} (\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\gamma\alpha}) \right] dx$$

où l'on a tenu compte des conditions (39) par l'introduction de multipliateurs; il est entendu que les seules variables de champ sont les $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$, les conditions (19), (20) et (21) définissant les $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ et $\Lambda^{\alpha\beta\gamma}$, U_{α} pouvant dépendre des coordonnées et des $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. τ est fonction des coordonnées seules.

Dans le cas symétrique, il est facile de vérifier que $\mathcal{G}^{\alpha\beta}(\mathcal{Q}_{\alpha\beta} + \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha\beta})$ est identiquement nul, de sorte que (40) généralise (38).

Nous nous proposons d'expliciter la condition $\delta I = 0$.

Écrivons $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\alpha\beta} + \mathcal{R}_{\alpha\beta}$ avec

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\lambda\gamma}_{\alpha\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma\lambda} - \Lambda^{\lambda\gamma}_{\beta\alpha} \Lambda^{\rho}_{\gamma\lambda} .$$

a) Le terme $\sqrt{|g|} \mathcal{R}_{\alpha\beta}$ conduit par variation arbitraire et selon un calcul classique en théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER à :

$$\sqrt{|g|} \left(\mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{\mathcal{R}}{2} \mathcal{G}_{\alpha\beta} \right) \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} \quad , \quad \mathcal{R} = \mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \quad , \quad \text{[XI, 1]}$$

b) Le terme $\sqrt{|g|} \mathcal{R}_{\alpha\beta}$ donne par variation de $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ sous l'action de celle des $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$:

$$[-\Lambda^{\beta}_{\alpha\gamma} (\mathcal{G}^{\alpha\sigma} + \mathcal{G}^{\sigma\beta}) + \delta^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\lambda\sigma} \mathcal{G}^{\lambda\sigma} + \Lambda^{\lambda}_{\alpha\gamma} \mathcal{G}^{\alpha\beta}] \delta \Lambda^{\rho}_{\alpha\beta} .$$

Tenant compte des systèmes (20) et (21) le premier terme s'écrit exactement :

$$\begin{aligned} & (\Lambda^{\alpha}_{\sigma\gamma} \mathcal{G}^{\sigma\beta} + \Lambda^{\beta}_{\gamma\sigma} \mathcal{G}^{\alpha\sigma}) \delta \Lambda^{\rho}_{\alpha\beta} + 2 \Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{(\sigma\gamma)} \delta \mathcal{G}^{\alpha\rho} \\ & = (2 \Lambda^{\alpha}_{(\sigma\gamma)} m^{\sigma\beta} + 2 \Lambda^{\alpha}_{[\sigma\gamma]} l^{\sigma\beta}) \delta \Lambda^{\rho}_{[\alpha\beta]} + 2 \Lambda^{\sigma}_{\alpha\beta} \Lambda^{\beta}_{(\sigma\gamma)} \delta \mathcal{G}^{\alpha\rho} \end{aligned}$$

Finalement, il faut tenir compte pour ce cas (b) de l'apport suivant :

(A)
$$\left\{ \begin{aligned} & [2 \Lambda^{\alpha}_{(\sigma\gamma)} m^{\sigma\beta} + 2 \Lambda^{\alpha}_{[\sigma\gamma]} l^{\sigma\beta}] \delta \Lambda^{\rho}_{[\alpha\beta]} - 2 \Lambda^{\alpha}_{\lambda\gamma} \mathcal{G}^{\rho\sigma} \delta \Lambda^{\lambda}_{[\alpha\beta]} \\ & + (2 \Lambda^{\lambda}_{\alpha\gamma} \Lambda^{\rho}_{\lambda\beta} - \Lambda^{\lambda}_{\lambda\gamma} \Lambda^{\rho}_{\alpha\beta} - \Lambda^{\lambda}_{\lambda\beta} \Lambda^{\rho}_{\alpha\gamma}) \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} \end{aligned} \right.$$

c) Pour calculer $\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta Q_{\alpha\beta}$, on utilisera la dérivée covariante par rapport à la connexion $\mathcal{L}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ (méthode de PALATINI), on posera :

$$A^{\rho} = \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \mathcal{G}^{\alpha\rho} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\lambda}$$

et on obtiendra aisément :

$$\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta Q_{\alpha\beta} = \partial_{\lambda} (A^{\lambda} \sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} - 2 \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\beta\lambda} \mathcal{G}^{\alpha\sigma} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$$

avec :

$$\omega_{\alpha\beta} = \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\sigma} \delta \mathcal{L}^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Lambda^{\lambda}{}_{\beta\gamma} \delta \mathcal{L}^{\rho}{}_{\alpha\lambda} + \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\beta} \delta \mathcal{L}^{\lambda}{}_{\lambda\gamma} - \delta \mathcal{L}^{\rho}{}_{\beta\gamma} \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\lambda}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \tau \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta Q_{\alpha\beta} &= \partial_{\tau} (\tau A^{\rho} \sqrt{|g|} - (\partial_{\tau} \tau) \sqrt{|g|} A^{\rho} + \tau \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} \\ &\quad - 2 \tau \sqrt{|g|} S_{\sigma\lambda}^{\beta} \mathcal{G}^{\alpha\sigma} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Après utilisation de la formule de Stokes, tenant compte du terme déduit par pseudo-hermité, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} \sqrt{|g|} (\mathcal{G}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} + \mathcal{G}^{\beta\alpha} \tilde{\omega}_{\alpha\beta}) - \tau \sqrt{|g|} (S_{\sigma\tau}^{\lambda} \mathcal{G}^{\rho\sigma} + S_{\rho\tau}^{\lambda} \mathcal{G}^{\sigma\mu}) \delta \Lambda^{\rho}{}_{\lambda\mu} \\ + (\partial_{\tau} \tau) \sqrt{|g|} \left(- \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\alpha\rho} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\rho\alpha} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\alpha} \right) \end{aligned}$$

$\tilde{\omega}_{\alpha\beta}$ étant construit comme $\omega_{\alpha\beta}$, en remplaçant $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$, $\mathcal{L}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ par $\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$ et $\mathcal{L}^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$.

Mais de (20) et (21) on déduit :

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\sigma\rho} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\rho\sigma} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\sigma} - \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\beta} \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\Lambda^{\lambda}{}_{\sigma\lambda} \delta \mathcal{G}^{\sigma\rho} + \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\sigma} \delta \mathcal{G}^{\rho\sigma})$$

Ce qui permet d'écrire le coefficient de $(\partial_{\tau} \tau) \sqrt{|g|}$:

$$(\mathcal{G}^{\alpha\rho} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\lambda} + \mathcal{G}^{\rho\alpha} \delta \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\alpha}) + \Lambda^{\rho}{}_{\alpha\beta} \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\Lambda^{\lambda}{}_{\sigma\lambda} \delta \mathcal{G}^{\sigma\rho} + \Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\sigma} \delta \mathcal{G}^{\rho\sigma})$$

Quant à $\frac{1}{2} \sqrt{|g|} (\mathcal{G}^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} + \mathcal{G}^{\beta\alpha} \tilde{\omega}_{\alpha\beta})$ il s'écrit, tenant compte de (20) et de (21) :

$$\tau \sqrt{|g|} (\Lambda^{\rho}{}_{\lambda\sigma} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta \mathcal{L}^{\rho}{}_{\alpha\beta} + \Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\beta\sigma} \delta \mathcal{L}^{\rho}{}_{\lambda\sigma}) \quad (41)$$

Explicitons les variations des connexions. On peut établir [XI, 1] que compte tenu de (19) seulement :

$$L^{\sigma}{}_{(\rho\tau)} = \gamma_{\rho} = \frac{\partial_{\rho} \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}$$

$$S^{\sigma}{}_{\gamma\tau} = \Sigma_{\gamma} = - (\partial_{\rho} \mathcal{G}^{[\rho\beta]}) L_{\beta\gamma} - \gamma_{\rho} \mathcal{G}^{[\rho\beta]} L_{\beta\gamma} = - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\rho} (\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{[\rho\beta]}) L_{\beta\gamma}$$

$$\partial_{\rho} (\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\rho\tau}) = - \sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\tau}{}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta} - \sqrt{|g|} S_{\sigma\tau}^{\alpha} \mathcal{G}^{\sigma\tau}$$

L'expression de Σ_{γ} donne, compte tenu de (39), après variation :

$$\delta \Sigma_{\gamma} = - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta (\partial_{\beta} \sqrt{|g|} \mathcal{G}^{[\beta\gamma]} l_{\beta})$$

qui se transforme par intégration par parties et utilisation de la formule de STOKES, de sorte que l'expression (41) conduit à :

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{2\sqrt{|g|}} \partial_{\sigma} (\tau \sqrt{|g|} \wedge_{\lambda\mu}^{\rho} \mathcal{G}^{\lambda\mu}) \mathcal{G}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma} (\tau \wedge_{\lambda\mu}^{\rho} \mathcal{G}^{\sigma\tau} \mathcal{G}_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} (\tau \wedge_{\beta\gamma}^{\rho} \right. \\ \left. - \tau \wedge_{(\gamma\delta)}^{\rho} \mathcal{F}^{\tau\alpha\beta} + \frac{\tau}{2} \wedge_{(\gamma\delta)}^{\rho} \mathcal{F}^{\tau\lambda\mu} \mathcal{G}_{\lambda\mu}^{\rho} \mathcal{G}_{\alpha\beta}) \right] \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} \\ - \partial_{\alpha} (\tau \wedge_{(\gamma\lambda)}^{\rho} \mathcal{G}^{\sigma\tau} l_{\beta\sigma}) \delta (\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{[\alpha\beta]}) - \tau \sqrt{|g|} (S_{\sigma\beta}^{\lambda} \mathcal{G}^{\lambda\sigma} + S_{\beta\sigma}^{\lambda} \mathcal{G}^{\sigma\mu}) \delta \wedge_{\lambda\mu}^{\rho} \\ + \sqrt{|g|} (\partial_{\beta} \tau) \left[\mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta \wedge_{\alpha\lambda}^{\rho} + \mathcal{G}_{\beta}^{\rho\alpha} \delta \wedge_{\lambda\alpha}^{\rho} + \wedge_{\alpha}^{\rho\beta} \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \wedge_{\sigma\lambda}^{\rho} \delta \mathcal{G}^{\sigma\mu} + \frac{1}{2} \wedge_{\lambda\sigma}^{\rho} \delta \mathcal{G}^{\mu\sigma} \right] \end{array} \right.$$

d) Variions $\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{\alpha\beta}$ dans $\sqrt{|g|} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta}$

$$\text{et } \sqrt{|g|} \mathcal{Q}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta}, \mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{Q}_{\alpha\beta} + \tilde{\mathcal{Q}}_{\beta\alpha}}{2}$$

$\tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha\beta}$ étant un tenseur nous poserons $\mathcal{G}^{\alpha\beta} \tilde{\mathcal{Q}}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathcal{Q}}$.

Nous obtiendrons ainsi :

$$\begin{aligned} \sqrt{|g|} (\mathcal{Q}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{Q} \mathcal{G}_{\alpha\beta}) \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} \\ \sqrt{|g|} (\mathcal{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{G}_{\alpha\beta}) \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

où certains termes pourront se réduire avec ceux de (A).

e) Enfin nous observerons que la variation de $-2 \sigma_{\alpha} \partial_{\beta} (\sqrt{|g|} \mathcal{G}^{[\alpha\beta]})$ conduit après intégration par parties et utilisation de la formule de STOKES à :

$$\sqrt{|g|} \partial_{\beta} \sigma_{\alpha} - \partial_{\alpha} \sigma_{\beta} \delta \mathcal{G}^{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2} \sqrt{|g|} (\partial_{\lambda} \sigma_{\mu} - \partial_{\mu} \sigma_{\lambda}) \mathcal{G}^{[\lambda\mu]} \mathcal{G}_{\alpha\beta} \delta \mathcal{G}^{\alpha\beta}.$$

Finalement appelant $\sqrt{|g|} \mathbf{A}_{\alpha\beta}$ et $\tau \sqrt{|g|} \mathbf{B}_{\alpha\beta}$ les coefficients respectifs de $\delta \mathcal{G}^{\alpha\beta}$ dans (A) et (B), il vient :

$$(42) \quad \mathcal{F}_{\alpha\beta} - \frac{\mathcal{F}}{2} \mathcal{G}_{\alpha\beta} + \mathbf{A}_{\alpha\beta} + \tau \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta} - \frac{\mathcal{Q}}{2} \mathcal{G}_{\alpha\beta} \right) + \tau \mathbf{B}_{\alpha\beta} + \partial_{\beta} \sigma_{\alpha} - \partial_{\alpha} \sigma_{\beta} \\ + \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} \sigma_{\mu} - \partial_{\mu} \sigma_{\lambda}) \mathcal{G}^{[\lambda\mu]} \mathcal{G}_{\alpha\beta} = 0.$$

On peut éliminer le dernier terme en multipliant par $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ et sommant, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} (\partial_{\lambda} \sigma_{\mu} - \partial_{\mu} \sigma_{\lambda}) \mathcal{G}^{[\lambda\mu]} = \frac{\mathcal{F}}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta} + \tau \left(\frac{\mathcal{Q}}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{B}_{\alpha\beta} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \right),$$

et conduit à :

$$(43) \quad \mathbb{F}x\beta + Ax\beta - \frac{1}{2} A \mathbb{G}x\beta + \tau \left(\mathbb{Q}x\beta + Bx\beta - \frac{1}{2} B \mathbb{G}x\beta \right) + \lambda_\beta \sigma_\alpha - \lambda_\alpha \sigma_\beta = 0$$

Équations développées approchées dans un cas particulier.

Supposons que les coefficients $k_{\alpha\beta}$ soient suffisamment petits pour que l'on puisse donner les solutions de (22) et (23) sous la forme de séries entières convergentes.

La résolution relativement aux $\wedge^{\alpha\beta\gamma}$ introduit 4 indéterminées U_α , nous posons :

$U_\alpha = \lambda u_\alpha = \sqrt{|h|}^{(\omega)} v_\alpha$, où λ est supposé d'ordre 1 en $\frac{1}{c}$, les $k_{\alpha\beta}$ étant supposés d'ordre 2 au moins relativement au même infiniment petit principal.

τ sera supposé d'ordre 0. Nous négligerons les dérivées de τ et de λ .

De manière plus précise, en ce qui concerne les $\mathbb{G}_{\alpha\beta}$ nous prenons des développements du type usuel, i, j, k et tout indice latin étant un indice d'espace, 0 l'indice temporel, nous entendons par \simeq une égalité modulo des termes dont l'ordre dépasse de 2 celui des seconds membres.

$$\begin{array}{l|l} h_{00} \simeq 1 - 2 \frac{U_{00}}{c^2} & h^{00} \simeq 1 + 2 \frac{U_{00}}{c^2} \\ h_{0i} \simeq \frac{\alpha_i}{c^3} & h^{0i} \simeq \frac{\alpha_i}{c^3} \\ h_{ij} \simeq -\delta_{ij} + \frac{U_{ij}}{c^2} & h^{ij} \simeq -\delta^{ij} - 2\delta^{ij} \frac{U_{ij}}{c^2} \end{array}$$

$$h = \det h_{\alpha\beta} \simeq -1 + 2 \frac{U_{00}}{c^2} + \sum \frac{U_{ii}}{c^2}$$

$$\sqrt{|h|} = 1 - \frac{U_{00}}{c^2} - \sum \frac{U_{ii}}{c^2}$$

Nous définissons V^i par $u^i = u^0 \frac{V^i}{c}$, posant $V^2 = \sum (V^i)^2$

$$u_0 \simeq 1 - \frac{U_{00}}{c^2} + \frac{V^2}{2c^2}, \quad u^0 \simeq 1 + \frac{U_{00}}{c^2} + \frac{V^2}{2c^2}, \quad u_i \simeq u^0 \left(-1 - 2 \frac{U_{00}}{c^2} \right) + \frac{\alpha_i}{c^3}$$

$$k_{0i} \simeq \frac{\beta_i}{c^4}, \quad k_{ij} \simeq \frac{\beta_{ij}}{c^2}$$

Il sera tenu compte des conditions $S_{\alpha\beta} = 0$ qui donnent en désignant par $\vec{\beta}'$, et $\vec{\beta}$ les vecteurs d'un espace euclidien auxiliaire à 3 dimensions

définis par $(\beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{12})$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ respectivement les conditions suffisantes :

$$\vec{\beta}' = \text{Grad } \varphi, \quad \vec{\beta} = \text{Rot } \psi. \quad [\text{VII}, 1.]$$

On peut supposer que les coordonnées sont isothermes relativement à $h_{\alpha\beta}$:

$$\partial_\alpha (\sqrt{|h|} h^{\alpha\beta}) = 0$$

de sorte qu'en 1^{re} approximation :

$$\mathfrak{R}(\alpha\beta) = -\frac{1}{2} h^{\lambda\mu} (\partial_{\lambda\mu} \zeta^\alpha(\beta))$$

Nous varions $k_{\alpha\beta}$ de manière que $\delta k_{\alpha\beta}$ soit encore d'ordre 2 en $\frac{1}{2}$, ce qui fait que les $\delta \wedge^{\alpha\beta\gamma}$ pourront se calculer à l'aide des séries entières introduites plus haut : les équations obtenues seront des conditions nécessaires d'extremum.

Pour les besoins des calculs développés plus loin, nous conserverons dans les termes que nous évaluons approximativement :

a) ceux dont l'ordre est inférieur ou égal à 4 dans la partie symétrique.

b) ceux dont l'ordre est inférieur ou égal à 3 pour les indices $[i, j]$ ou à 4 pour les indices $[0, i]$ dans la partie antisymétrique.

Le principe variationnel conduit ainsi, après une transformation classique aux équations :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_{\alpha\beta} - \chi \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\alpha u_\beta + \frac{\gamma}{2} \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) \mathfrak{G}_{(\alpha\beta)} + \tau \mathcal{Q}_{\alpha\beta} \\ + \frac{\tau}{2\sqrt{|h|}} \varepsilon^{\sigma\mu\rho\delta} [(\omega - 2) h_{\alpha\beta} U_\delta + h_{\delta\alpha} U_\beta + h_{\delta\beta} U_\alpha] (\partial_\sigma k_{\mu\tau}) \\ + \partial_\beta \sigma_\alpha - \partial_\alpha \sigma_\beta = 0 \end{array} \right.$$

Conséquences immédiates.

1° Prenons la partie antisymétrique du 1^{er} membre de (44), nous allons ainsi mettre en évidence l'existence d'un « courant ».

D désignant la dérivation covariante relativement aux $\mathfrak{L}_{\beta\gamma}^\alpha$, nous avons rigoureusement :

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= D_\lambda \wedge_{\alpha\beta}^\lambda - D_\beta \wedge_{\alpha\lambda}^\lambda \\ \tilde{Q}_{\beta\alpha} &= D_\lambda \wedge_{\alpha\beta}^\lambda - D_\alpha \wedge_{\lambda\beta}^\lambda \end{aligned}$$

et approximativement :

$$(45) \quad \mathcal{Q}_{(\alpha\beta)} = \partial_\lambda \wedge_{(\alpha\beta)}^\lambda - \frac{1}{2} (\nabla_\beta \wedge_{(\lambda\alpha)}^\lambda + \nabla_\alpha \wedge_{(\lambda\beta)}^\lambda)$$

$$(46) \quad \mathcal{Q}_{[\alpha\beta]} = \nabla_\lambda \wedge_{[\alpha\beta]}^\lambda$$

(∇ étant la dérivation par rapport aux $\mathfrak{L}^{\alpha(\beta\gamma)}$).

On tire alors de (44) :

$$(47) \quad \mathcal{R}_{[\alpha\beta]} + \tau \nabla_\lambda \wedge \overset{\lambda}{[\alpha\beta]} + \partial_\beta \sigma_\alpha - \partial_\alpha \sigma_\beta = 0$$

Posant ensuite :

$D^\alpha = -\frac{1}{2} \overset{\beta\gamma\delta\alpha}{\tau} \nabla_\beta \mathcal{R}_{[\gamma\delta]}$, il vient, la dérivée de $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ étant nulle pour la connexion τ , à l'ordre d'approximation des calculs :

$$(48) \quad D^\alpha = \tau \nabla_\gamma (\nabla^\alpha U^\gamma - \nabla^\gamma U^\alpha) = \tau (h^{\alpha\gamma} h^{\gamma\delta} - h^{\gamma\alpha} h^{\delta\gamma}) (\nabla_\gamma \nabla_\tau U_\delta)$$

où on a posé : $\nabla^\alpha = h^{\alpha\beta} \nabla_\beta$

2° Prenons la partie symétrique du 1^{er} membre de (44). Définissons :

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{(\alpha\beta)} \mathcal{C}_\gamma^{(\alpha\beta)}, \quad \overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}_{(\alpha\beta)} \mathcal{C}_\gamma^{(\alpha\beta)}$$

Nous obtenons, en se bornant au cas où $p = 0$, $(\omega = -\frac{1}{2})$,

$$(51) \quad \mathcal{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \overline{\mathcal{R}} \mathcal{C}_\gamma^{(\alpha\beta)} = \gamma_\alpha^\rho u_\rho u_\beta - \tau \left(\mathcal{Q}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} \overline{\mathcal{Q}} \mathcal{C}_\gamma^{(\alpha\beta)} \right) - \tau M_{\alpha\beta}$$

et en définissant $M_{\alpha\beta}$ par :

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon^{\sigma\mu\rho\delta}}{2 \sqrt{|h|}} \left[\frac{3}{2} h^{\alpha\beta} U_\delta + h_{\delta\alpha} U_\beta + h_{\delta\beta} U_\alpha \right] (\partial_\sigma k_{\mu\rho})$$

Selon divers auteurs le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ défini par $l^{\alpha\beta} \sqrt{|g|} = a^{\alpha\beta} \sqrt{|a|}$, $a = \det a_{\alpha\beta}$, permet d'écrire simplement les identités de conservation satisfaites par $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$.

Nous définissons T_β^α par :

$$T_\beta^\alpha \sqrt{|a|} = \mathcal{R}_{[\alpha\beta]} \left(\sqrt{|g|} \mathcal{C}_\gamma^{(\alpha\beta)} \right) - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{(\alpha\beta)} \left(\sqrt{|g|} \mathcal{C}_\gamma^{(\alpha\beta)} \right) \delta_\beta^\alpha.$$

Alors :

$$\nabla_\beta T^{\mu\beta} \sqrt{|a|} = \frac{1}{2} a^{\mu\alpha} \sqrt{|g|} \mathcal{C}_\gamma^{[\alpha\beta]} \sum_{p.c.} \partial_\beta \mathcal{R}_{[\alpha\beta]}$$

Avec les approximations faites ici il est loisible de prendre $a_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$, $a = g$ et d'écrire :

$$(52) \quad \nabla_\beta T^{\mu\beta} - \frac{1}{2} h^{\mu\alpha} \mathcal{C}_\gamma^{[\alpha\beta]} \sum_{p.c.} \partial_\beta \mathcal{R}_{[\alpha\beta]} = 0$$

avec :

$$T^\nu_\alpha = \mathcal{R}_{[\alpha\beta]} \mathcal{C}_\gamma^{(\nu\beta)} - \frac{1}{2} \overline{\mathcal{R}} \delta^\nu_\alpha.$$

Définissons $\Theta_{\alpha\beta}$ par :

$$T_{\alpha\beta} = \chi (\rho u_\alpha u_\beta - \Theta_{\alpha\beta}) \text{ et } K_\beta \text{ par } \frac{1}{\varphi} \nabla_\alpha \Theta^\alpha_\beta = K_\beta. \quad [\text{XI, I}].$$

$$\chi \Theta_{\alpha\beta} = \tau \left(\mathcal{Q}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \overline{\mathcal{Q}} \mathcal{G}(\alpha\beta) + M\alpha\beta \right) \text{ avec } \Theta^\alpha_\beta = h^{\alpha\mu} \Theta_{\beta\mu}.$$

De l'unitarité du vecteur (u_α) et de (52) on déduit aisément :

$$(53) \quad \chi u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (h_{\beta\gamma} - u_\beta u_\gamma) K^\gamma + \frac{1}{2\varphi} (\delta^\gamma_\beta - u^\gamma u_\beta) \mathcal{G}^{[\lambda\mu]} \sum_{\rho,c} \partial_\gamma \mathcal{R}_{[\lambda\mu]}.$$

$$(51) \quad \chi \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = \varphi K_\alpha u^\alpha + \frac{u^\alpha}{2} \mathcal{G}^{[\lambda\mu]} \sum_{\rho,c} \partial_\alpha \mathcal{R}_{[\lambda\mu]}.$$

$$\left(\text{Dans ces formules } \rho = \frac{\sigma \lambda^2}{\chi} \right)$$

Il est facile de voir que les équations aux parties symétriques permettent de poser :

$$\Delta U_{00} = - \frac{\chi \rho c^2}{2}$$

$$\Delta U_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$\Delta U_{ii} = - \chi \rho c^2, \quad \frac{\Delta \alpha_i}{c^2} = - 2\chi \rho V^i.$$

de sorte que l'on peut choisir :

$$U_{ij} = - 2 \delta_{ij} U_{00}, \quad \alpha_i = 4 U_{00} V^i$$

Explicitons alors les identités de conservation. Comme :

$$\nabla_\alpha \Theta^\alpha_i = C \frac{\omega}{c^2} \Delta \beta'_i = - \frac{C}{2c^2} \Delta \beta'_i \quad \left(\omega = - \frac{1}{2} \right) \quad (C = \lambda \tau)$$

en première approximation, de (53), où le dernier terme est négligeable, il vient

$$\chi u^\alpha \nabla_\alpha u_i = - \frac{C}{2\varphi c^2} \Delta \beta'_i.$$

soit :

$$(55) \quad \frac{dV^i}{dt} = \partial_i U_{00} + \frac{C}{2\varphi\chi} \Delta \beta'_i$$

χ étant d'ordre 2 en $\frac{1}{c}$, C d'ordre 1, il est donc normal de supposer que $\Delta \beta'_i$ est d'ordre 1 en $\frac{1}{c}$, c'est ce que nous supposons désormais.

La condition : $\chi u^\alpha \nabla_\alpha u_\alpha = - K_\alpha u^\alpha$ déduite de (53) pour $\beta = 0$ n'apporte aucun résultat nouveau étant donnée l'unitarité de (u_α) .

(54) se réduit alors à :

$\chi \nabla_a (\rho u^a) = \rho K_a u^a$, car $\mathcal{R}_{[1,2]}$, compte tenu de $\Delta \beta'_i = 0 \left(\frac{1}{e} \right)$, est d'ordre 3 au moins en $\frac{1}{c}$.

Cette condition s'écrit :

$$\chi \nabla_a u^a = K_a u^a, \text{ puisque } \rho \text{ est supposé constante.}$$

et conduit à :

$$(56) \quad \partial_i V^i = 0 \left(\frac{1}{c^2} \right)$$

Les équations de type Maxwellien

Nous reprenons les équations (48). En première approximation :

$$\begin{aligned} D^o &= C \nabla_i (\nabla_i u_o - \nabla_o u_i) \\ &= C \Delta u_o - C \partial_{oi} (u_i) \end{aligned}$$

En raison de (56) le dernier terme de l'égalité précédente est négligeable et :

$$(57) \quad D^o = C \Delta u_o = C \left(- \frac{\Delta U_{o0}}{c^2} + \frac{\Delta V^s}{2c^2} \right).$$

Puis il vient pour $\alpha = i$:

$$\begin{aligned} D^i &= C \sum_k \nabla_k (\nabla_i u_k - \nabla_k u_i) + C \nabla_o (\nabla_o u_i - \nabla_i u_o) \\ &= C \sum_k \partial_{ki} u_k - C \Delta u^i + C \partial_{oo} u_i - C^2 \partial_{io} u_o \\ &\quad - C L^k_{oo} (\partial_k u_i - \partial_i u_k) - C \sum_k L^j_{(kk)} (\partial_i u_j - \partial_j u_i) - C \sum_k L^j_{(ik)} L^j_{(ik)} (\partial_j u_k - \partial_k u_j) \end{aligned}$$

Or, on déduit de (53) en dérivant par rapport à t , pour $\beta = i$.

$$\partial_{oo} u_i - \partial_{io} u_o = \frac{1}{c^3} \frac{\partial}{\partial t} V^k (\partial_k V^i - \partial_i V^k) + \frac{1}{\gamma c} \frac{\partial K_i}{\partial t}$$

Supposons plus particulièrement que :

$$(58) \quad \partial_i V^k = \partial_k V^i \text{ (mouvement irrotationnel)}$$

Alors compte tenu de cette condition et de :

$$u_i = u^i \left(-1 - \frac{2 U_{o0}}{c^2} \right) + \frac{\alpha i}{c^2}$$

il vient :

$$(59) \quad D^i = C (\Delta u_i) \frac{V^i}{c} + C (\partial_k u_o) \partial_i \frac{V^k}{c} - C (\partial_{ik} u_o) \frac{V^k}{c} + \frac{C}{\gamma c} \frac{\partial K_i}{\partial t}$$

où le deuxième membre contient le terme maxwellien $C(\Delta u_\alpha) \frac{V^i}{c}$ et des termes propres à notre théorie.

Il est facile de vérifier que dans le cadre de nos approximations :

$\nabla_\alpha D^\alpha = 0$, car cette égalité s'explique en :

$$\partial_i \frac{\Delta u^i}{c} + \frac{1}{\gamma c} \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial K_i}{\partial t} \right) = 0$$

ΔV^* étant d'ordre 2 en $\frac{1}{c}$.

Or la formule à établir résulte de :

$$\partial_{\alpha\alpha} u_i - \partial_{i\alpha} u_\alpha = \frac{1}{\gamma c} \left(\frac{\partial K_i}{\partial t} \right), \text{ par dérivation relativement à } i \text{ et sommation.}$$

Interprétation physique. — Si $F_{\alpha\beta}$ représente le tenseur électro-magnétique, nous posons : $*F_{\alpha\beta} = -\alpha c^2 \mathcal{R}_{[\alpha\beta]}$, $*F$ étant la forme adjointe de F pour la métrique $h_{\alpha\beta}$. [VII, 1].

$$\mathcal{R}_{[ij]} = -\frac{\Delta \beta_{ij}}{c^2} + 0 \left(\frac{1}{c^2} \right).$$

Nous appelons μ la densité de charge au repos.

$$-x \sum_{p,c} c^2 \partial_i \mathcal{R}_{[jk]} = 4 \pi \mu.$$

En relativité générale les équations du mouvement des particules chargées s'écrivent :

$$u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = \frac{\mu \phi}{c^2} F_{\alpha\beta} u^\beta$$

Pour $\alpha = i$, en première approximation, ces équations s'identifient à (55) en prenant

$$\alpha = \sqrt{\frac{8\pi}{\epsilon}} \frac{1}{\gamma c}, \quad \mu = -\frac{C}{\gamma \alpha}$$

toutes les fois qu'il est possible de négliger les dérivées de ΔV^2 .

BIBLIOGRAPHIE

- I. BOURBAKI (N.). 1. Algèbre linéaire. — 2. Algèbre multilinéaire. — 3. Formes sesquilinéaires et quadratiques. — 4. Modules sur les anneaux principaux (Hermann, Paris).
 - II. CATTANEO (C.). 1. Nuevo cimento, 1958-1959. — 2. Rend. Ac. Naz. Lincei, 1959. — 3. Conservation Laws (Int. Conf. on relativ. and gravitation, London, 1965).
 - III. CATTANEO-GASPARINI (L.). 1. C. R. Acad. Sc., 246, 1958. — 2. C. R. Acad. Sc., 252, 1961. — 3. C. R. Acad. Sc., 256, 1963.
 - IV. CHARLES-RENAUDIE (J.). Thèse, Paris, 1956 (Gauthier-Villars).
 - V. CHOQUET-BRUHAT (Y.). Magnéto-hydrodynamique relativiste. Séminaire Janet (1959-1960).
 - VI. COSTA DE BEAUREGARD (O.). 1. Théorie de la relativité restreinte (Masson 1949). — 2. L'hypothèse de l'effet inertial de Spin. (Cah. Phys. 105, et C. R. Acad., 246, 1958).
 - VII. CRUMEYROLLE (A.). 1. Thèse Paris, 1961 (Rivist. Mat. Univ. Parma, 3-1962 et 5-1964). — 2. C. R. Acad., 256, 1963. — 3. Variétés différentiables à coord. hypercomplexes. (Ann. de la Fac. de Toulouse, 1964). — 4. Construction d'une nouvelle théorie unitaire en méca. relat. Le cas symétrique intérieur (C. R. Acad., 262, 1966, Série A).
 - VIII. GROSJEAN (P. V.). Les principes de la géométrie semi-métrique et quelques-unes de leurs applications. (Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège).
 - IX. HENNEQUIN-GUYON (F.). Thèse, Paris, 1958 (Gauthier-Villars).
 - X. LENOIR (M.). Thèse, Paris, 1962.
 - XI. LICHNEROWICZ (A.). 1. Théorie relativiste de la gravitation de l'électromagnétisme (Masson, Paris, 1955). — 2. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, (Cremonese, Roma, 1955).
 - XII. PAPAPETROU. Equ. of motion in general relativity (Proc. Phys. Soc., 1951).
 - XIII. PHAM TAN HOANG. 1. Thèse, Paris, 1957. — 2. Sur la méthode des sing. en relativ. générale, (C. R. Acad., 246, 1958).
 - XIV. THIRY (Y.). C. R. Acad. Sciences, 224 (1947) (en coll. avec A. LICHNEROWICZ); C. R. Acad. Sciences, 226 (1948). Thèse, Paris, 1950.
 - XV. TONNELAT (M. A.). Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation, (Gauthier-Villars, Paris, 1965).
-