ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN COMBES

Sur la résolution de certains systèmes infinis d'équations linéaires

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 28 (1964), p. 149-159

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1964_4_28__149_0>

Sur la résolution de certains systèmes infinis d'équations linéaires

par Jean COMBES

1. Introduction.

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach complexe. $(y_i)_{i \in N}$ étant une suite donnée de points de $\mathcal{B}$, nous considérons le système d'une infinité d'équations linéaires

$$(S) \qquad \sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij} x_j = y_i \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

aux inconnues $x_j \in \mathcal{B}$. Les a_{ij} sont des nombres complexes donnés et nous supposons, comme dans les articles cités à la bibliographie sous les numéros [1] et [2] et dont le présent travail constitue une suite, que la matrice $A = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure régulière, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ pour $j < i$, et $a_{ii} \neq 0$ pour tout i. Nous supposons même, ce qui est loisible, que $a_{ii} = 1$ pour tout i.

Dans [1] nous nous étions limité au cas de $\mathcal{B} = C$, les y_i et x_j étant donc des nombres complexes. Mais cela n'a rien d'essentiel : il est aisé de voir que, pour un espace de Banach complexe quelconque $\mathcal{B}$, les propriétés établies dans [1] et rappelées ci-dessous restent vraies.

Nous désignons toujours par B l'inverse à gauche de A, par X et Y les matrices à une colonne (x_j) et (y_j), par A', B', X', Y' les matrices obtenues en remplaçant dans A et B chaque élément par son module, dans X et Y chaque élément par sa norme (que nous noterons $|x_j|$ comme lorsque $\mathcal{B} = C$ et qu'il s'agit effectivement du module de x_j). Le système (S) s'écrit AX = Y.

On a vu dans [1] que, si AX = Y et si B'A'X' existe (c'est-à-dire si les séries qui définissent ses éléments convergent), on a X = BY; en particulier si AX = 0 et si B'A'X' existe, X = 0. Si Y donné est tel que B'A'B'Y' existe, le système AX = Y admet la solution de Cramer X = BY, et cette solution est la seule pour laquelle B'A'X' existe.

L'application de ces résultats suppose qu'on a pu évaluer avec assez de précision les éléments de B. Des exemples ont été donnés dans [2], concernant des problèmes de théorie des fonctions : problèmes du type d'Abel-Gontcharoff, univalence des dérivées successives d'une fonction analytique f(z), ... etc...

Il y a un cas particulier intéressant où l'on sait mieux résoudre le système, en obtenant, sous certaines conditions, d'autres solutions que la solution de Cramer : c'est le cas où la matrice A est du type de Von Koch, c'est-à-dire où $a_{i,\,i+n}$ ne dépend que de n, les lignes, mis à part les éléments nuls situés sous la diagonale, se déduisant de la première par translation parallèle à la diagonale. Posons $a_{i,\,i+n} = c_n$. Von Koch a obtenu dans [3], lorsque les x_n et les y_n sont des nombres complexes, que la série $\varphi(t) = \sum c_n t^n$ a un rayon de convergence R non nul et que les seconds membres y_n satisfont à $\lim.\sup \sqrt[n]{|y_n|} \leqslant r < R$, toutes les solutions pour lesquelles $\lim.\sup \sqrt[n]{|x_n|} \leqslant r$; elles se déduisent simplement des zéros de $\varphi(t)$.

Ainsi donc, pour le système $AX = Y$, on sait préciser les conditions de validité de la solution de Cramer, si du moins on a pu étudier avec assez de précision la matrice B; lorsque A est du type de Von Koch, on sait même trouver d'autres solutions.

Nous nous proposons dans cet article d'étudier des systèmes *suffisamment proches* de systèmes que l'on sait ainsi résoudre. Il est intuitif que, si on remplace A par une matrice assez voisine, les propriétés du système seront peu modifiées. Nous donnons aux paragraphes 2 et 4 deux résultats simples dans cette voie, concernant surtout le cas de systèmes homogènes, et nous appliquons ces résultats à des problèmes de théorie des fonctions.

2. Premier théorème.

Soit A une matrice triangulaire supérieure régulière ($a_{ii} = 1$), et soit B son inverse à gauche. *Nous supposons que leurs éléments vérifient*

$|a_{i,\,i+n}| \leqslant K' l^n$ et $|b_{i,\,i+n}| \leqslant K\, l^n$ pour $n > 0$, $K' > 0$, $K > 0$ et $l \geqslant 0$ étant des constantes données (1).

Etant donnée une suite (x_n) nous définirons son *type* τ par la formule $\tau = \lim.\sup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$. Soit E l'espace vectoriel des suites de type inférieur à $1/l$. En raisonnant comme en [2], p. 94, on voit facilement que *l'application* $X \to AX$ *est un automorphisme de* E *qui conserve le type.*

En particulier l'équation $AX = 0$ n'admet dans E que la solution $X = 0$.

Soit maintenant $V = (v_{ij})$ une matrice $\infty \times \infty$ sur le corps des complexes dont tous les éléments situés sur la diagonale ou au-dessous sont nuls : $v_{ij} = 0$ pour $j \leqslant i$. Nous nous proposons d'étudier les solutions dans E de $(A + V)\,X = 0$. λ étant un nombre positif, nous posons $V_n(\lambda) = \sum_{p=1}^{+\infty} \lambda^p\,|v_{n,\,n+p}|$ ($V_n(\lambda)$ est fini ou non).

---

(1) On peut d'ailleurs remarquer que l'inégalité $|a_{i,\,i+n}| \leqslant K' l^n$ entraîne $|b_{i,\,i+n}| \leqslant K'(K'+1)^{n-1} l^n$. Voir [1], p. 259 et [2], p. 86. On est conduit à inverser la série $1 - K'lt - K'l^2t^2 \ldots$.

Théorème 1. — *λ étant un nombre inférieur à $1/l$, si, pour* n *assez grand, on a* $V_n(\lambda) \leqslant \dfrac{1-\lambda l}{1+(K-1)\lambda l}$, *l'équation* $(A + V)\, X = 0$ *n'admet que* $X = 0$ *comme solution de type inférieur à λ.*

En effet, si $X \in E$, $B'A'X'$ existe. L'équation $(A + V)\, X = 0$ entraîne alors $AX = -VX$, donc $X = -B(VX)$.

Si $X \neq 0$ est de type inférieur à λ, $\dfrac{|x_n|}{\lambda^n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{|x_n|}{\lambda^n} > \dfrac{|x_{n+p}|}{\lambda^{n+p}}$ quel que soit p positif. *Soit* n *une de ces valeurs.* Les composantes de VX, à partir de celle d'indice n, ont leurs normes majorées par $|x_n|\, V_n(\lambda)$, $\lambda |x_n|\, V_{n+1}(\lambda)$, ... Si n est assez grand la composante d'indice n de $-B(VX)$ a une norme inférieure à

$$|x_n|\, \frac{1-\lambda l}{1+(K-1)\lambda l}\,(1 + Kl\lambda + Kl^2\lambda^2 \ldots) = |x_n|\,,$$

d'où une contradiction.

Exemple : Si $l \geqslant 1$, et si, pour tout p, $|v_{n,\, n+p}| \leqslant \varepsilon_n$, ε_n tendant vers 0 avec $1/n$, l'hypothèse du théorème est satisfaite pour tout $\lambda < 1/l$, et par suite l'équation $(A + V)\, X = 0$ n'admet dans E que la solution $X = 0$.

Cas particulier. — Soit I la matrice $\infty \times \infty$ unité, et l'équation $(I + V)\, X = 0$. On peut prendre $l = 0$.

Si, pour le nombre positif λ, on a à partir d'une certaine valeur de n $V_n(\lambda) \leqslant 1$, *l'équation* $(I + V)\, X = 0$ *n'admet que* $X = 0$ *comme solution de type inférieur à λ* (2).

Remarque. — Nous avons ci-dessus traité, en vue des applications qui suivent, le cas de l'équation *homogène* $(A + V)\, X = 0$. Il est facile d'obtenir un résultat *pour le cas général.*

Le fait que, pour une valeur $\lambda < 1/l$, et pour $n \geqslant m$, $V_n(\lambda)$ soit majoré par un nombre M, entraîne que, pour $n \geqslant m$ et p positif quelconque, $|v_{n,\, n+p}| \leqslant \dfrac{M}{\lambda^p}$. Puisque $|a_{n,\, n+p}| \leqslant K'\, l^p$, on a, dans les mêmes conditions, une inégalité de même forme pour les éléments de la matrice $A + V$: $|a_{n,\, n+p} + v_{n,\, n+p}| \leqslant \dfrac{N}{\lambda^p}$.

Soient A_m et V_m les matrices obtenues en supprimant dans A et V les m premières lignes et les m premières colonnes. En utilisant la remarque de la note (1), on voit alors qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'application $X \to (A_m + V_m)\, X$ soit un automorphisme de l'espace E_α des suites dont le type est inférieur à α; et cet automorphisme conserve le type.

Il en est de même de $X \to (A + V)\, X$ si on suppose que VX existe pour tout $X \in E_\alpha$.

---

(2) Cf. [2], p. 87, où une forme voisine de ce résultat est donnée.

3. Applications.

a) Nous prenons d'abord comme matrice A la matrice qui intervient dans le *problème d'Abel-Gontcharoff,* relatif à une suite (z_n) de points du plan complexe $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, c'est-à-dire dans la détermination d'une fonction analytique f pour laquelle on donne les nombres $f^{(n)}(z_n)$ (voir [2], p. 91 et suivantes). La $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne de A est, à partir de la diagonale :

$$1 \quad z_n \quad z_n^2/2! \quad \ldots \quad z_n^p/p! \ldots$$

Comme matrice A + V, nous prenons celle qui correspond au même problème pour une autre suite (ζ_n). La $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne de V, à partir de la diagonale, est donc :

$$0 \qquad \zeta_n - z_n \qquad \ldots \qquad \frac{\zeta^p{}_n - z^p{}_n}{p!} \qquad \ldots$$

Posant $|\zeta_n - z_n| = \delta_n$, on voit aisément que

$$V_n(\lambda) \leqslant \exp \lambda\, |z_n| . (\exp \lambda\delta_n - 1),$$

puisque $|\zeta^p{}_n - z^p{}_n| \leqslant (|z_n| + \delta_n)^p - |z_n|^p$.

Ceci permet, ayant étudié le problème d'Abel-Gontcharoff sous certaines hypothèses, d'obtenir immédiatement des renseignements sur d'autres cas. Supposons par exemple que, pour *toutes* les suites (z_n) de points appartenant à un compact donné H, contenu dans le disque-unité, les matrices A et B satisfassent aux hypothèses indiquées au début du paragraphe 2, avec le jeu de constantes K′, K et l. Une fonction entière non identique à 0 dont chaque dérivée $f^{(n)}$ s'annule en un point z_n de H ne peut être de croissance moindre que

(ordre 1, type $1/l$), puisque, si l'on écrit $f(z) = \sum_0^\infty x_n z^n/n!$, on a AX = 0.

Soit maintenant une suite quelconque (ζ_n), et notons δ_n la distance de z_n à H. Si, pour f non identique à 0, on a $f^{(n)}(\zeta_n) = 0$ pour tout n, on voit que :

— *si* $\delta_n \to 0$ *avec* $1/n$, f *ne peut être de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* $1/l$)*;*

— *si, pour* n *assez grand,* δ_n *est inférieur ou égal au nombre positif* δ, f *ne peut être de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* λ), *le nombre positif* λ *étant donné par*

$$e^{\lambda}\,(e^{\lambda\delta} - 1) = \frac{1 - \lambda l}{1 + (K-1)\lambda l} \quad ;$$

nous obtenons donc pour le type des solutions non nulles un minorant λ, dont la variation relative à partir de $1/l$, soit $1 - \lambda l$, est, lorsque δ est petit, équivalente à $\dfrac{K\, e^{1/l}\,\delta}{l}$.

On retrouve ainsi notamment l'extension donnée par KAMENETSKY et par Mme MACINTYRE [4] à un théorème de Schoenberg : *si les valeurs d'adhérence de la suite* (ζ_n) *appartiennent toutes à* $[-1, +1]$, f *ne peut être de croissance moindre que* (*ordre* 1, *type* $\pi/4$).

En effet, lorsque H est le segment $[-1, +1]$, on peut prendre d'après [4] $l = \dfrac{4}{\pi}$, $K = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$. Pour le même compact H, Mme MACINTYRE étudie aussi dans [4] le cas $\delta_n \leqslant \delta$, et obtient comme minorant λ la valeur $\dfrac{\pi}{4} e^{-\frac{\pi^2 \delta}{8}}$ meilleure que celle que donne la méthode indiquée ici (du moins avec la valeur de K utilisée, mais on doit pouvoir remplacer K par un nombre plus petit).

b) Comme application du cas particulier qui termine le paragraphe 2, nous traitons maintenant un exemple emprunté à la théorie des *séries d'Abel.*

Soit F l'espace vectoriel complexe formé par les fonctions entières qui sont développables en série d'Abel uniformément convergente sur tout compact :

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} f^{(n)}(n) \quad P_n(z) \quad , \quad \text{avec} \quad P_0(z) = 1, \quad P_n(z) = \frac{z(z-n)^{n-1}}{n\,!}$$

pour $n \geqslant 1$. On sait (voir par exemple [5], p. 171) que F contient en particulier toutes les fonctions entières de croissance moindre que (ordre 1, type ω), où $\omega = 0{,}278\ldots$ est la racine positive de $\omega\, e^{1+\omega} = 1$.

Soit $f \in F$. Posons $f^{(n)}(n) = x_n$.

$$\text{Puisque } P^{(n)}_{n+p}(z) = P_p(z-n)\text{, on a :}$$

$$f^{(n)}(z) = x_n + \ldots + x_{n+p}\, P_p(z-n) + \ldots$$

Supposons que chaque dérivée $f^{(n)}$ de f s'annule en un point ζ_n, et posons $|\zeta_n - n| = \delta_n$. On majore $|P_p(\zeta_n - n)|$ par

$\dfrac{\delta_n(\delta_n + p)^{p-1}}{p\,!}$, ou encore par $\dfrac{\delta_n\, e^{\delta_n}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{e^p}{p^{3/2}}$ (on a majoré $\left(1 + \dfrac{\delta_n}{p}\right)^{p-1}$ par e^{δ_n} et $\dfrac{p^p}{p!}$ par $\dfrac{e^p}{\sqrt{2\pi p}}$)

Si donc $f \in F$ et $f^{(n)}(\zeta_n) = 0$ pour tout n, le vecteur X de composantes $(x_0, x_1 \ldots)$ satisfait à $(I + V)\,X = 0$, et l'on a,

$$\text{pour } \lambda \leqslant 1/e : \; V_n(\lambda) \leqslant \frac{\delta_n\, e^{\delta_n}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(\lambda\, e)^p}{p^{3/2}}$$

En supposant f non identique à 0, on obtient les résultats suivants :

— *soit* h *le nombre positif défini par* $h\, e^h \sum_{1}^{\infty} p^{-3/2} = \sqrt{2\pi}$ (on a pris $\lambda = 1/e$) ; *si, pour* n *assez grand, on a* $\delta_n \leqslant h$, *la suite* (x_n) *ne peut avoir un type inférieur à* $1/e$;

— *si, pour* n *assez grand, on a* $\delta_n \leqslant \delta$ *avec* $\delta > h$, *la suite* (x_n) *ne peut avoir un type inférieur au nombre* $\lambda(\delta)$ *défini par*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(\lambda\, e)^p}{p^{3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta\, e^\delta}$$

De la limitation inférieure ainsi trouvée *pour le type de la suite* $x_n = f^{(n)}(n)$, on déduit une limitation *pour la croissance de* f, en utilisant la propriété suivante, qui s'établit facilement : si une fonction entière f a une croissance inférieure à (ordre 1, type τ), la suite $(f^{(n)}(n))$ a un type inférieur à $\tau\, e^\tau$. D'où l'énoncé, dans lequel il n'est plus nécessaire de supposer d'avance que $f \in F$:

Soit f *une fonction entière, non identique à* 0, *satisfaisant pour tout* n *à* $f^{(n)}(\zeta_n) = 0$. *Si, pour* n *assez grand, on a* $|\zeta_n - n| \leqslant h$, f *ne peut être de croissance moindre que* $(1, \omega)$; *si on a* $|\zeta_n - n| \leqslant \delta$ *avec* $\delta > h$, f *ne peut être de croissance moindre que* $(1, \mu)$, μ *étant défini par* $\mu\, e^\mu = \lambda$ (les nombres h, ω, $\lambda(\delta)$ sont ceux qui ont été introduits ci-dessus).

Pour voir si ces résultats sont précis ou non, il convient de former des exemples de fonctions entières, non identiques à 0, et dont, pour chaque n, la dérivée $n^{\text{ième}}$ présente un zéro proche de n. En voici un.

Soient τ_1 et τ_2 deux nombres positifs tels que $\tau_1\, e^{\tau_1} = \tau_2\, e^{-\tau_2}$, et considérons $f(z) = e^{\tau_1 z} + e^{-\tau_2 z}$; $f^{(n)}(z)$ s'annule pour $\zeta_n = n$ si n est impair, pour $\zeta_n = n + \dfrac{i\pi}{\tau_1 + \tau_2}$ si n est pair, ce qui prouve que, dans l'énoncé précédent, on ne peut remplacer ω ou μ par des nombres trop grands. Remarquons que, si on choisit $\tau_2 \neq 1$, le nombre τ_1 qui lui correspond est inférieur à ω; $e^{\tau_1 z}$, de type $< \omega$, appartient donc à F; il en est de même de $e^{-\tau_2 z}$ donc de f(3), *si* $\tau_2 < 1$. Citons aussi l'exemple classique de $f(z) = z\, e^{-z}$ (qui n'appartient pas à F).

4. Deuxième théorème.

Nous supposons *dans tout ce paragraphe* que :

— *la matrice A est du type de Von Koch :* $a_{i,i+n} = c_n$;

— *la série* $1 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \ldots = \varphi(t)$ *a un rayon de convergence R non nul, fini ou non.*

(3) On peut en effet montrer que $e^{-\tau z} \in F$ pour $0 < \tau < 1$.

Étant donné un nombre $r \in [0, R[$, nous désignons ici par E_r *l'espace des suites* $(x_n)_{n \in N}$ *d'éléments de* $\mathcal{B}$ *dont le type* (4) *est inférieur ou égal à* r. Nous représentons toujours la suite (x_n) par le vecteur-colonne X, et nous parlerons aussi bien du type de X.

On sait, d'après [3], que pour tout $Y \in E_r$, l'équation $AX = Y$ admet au moins une solution $X \in E_r$; quant à l'équation homogène $AX = 0$, ses solutions dans E_r dépendent d'un nombre N de vecteurs arbitraires de $\mathcal{B}$ égal au nombre *total* de zéros de $\varphi(t)$ situés dans le disque $|t| \leqslant r$: si φ n'a pas de zéro dans ce disque, il n'y a que la solution banale $X = 0$; si φ y admet h racines simples $t_1, t_2, \ldots t_h$, les solutions sont définies par

$x_n = t^n{}_1 C_1 + \ldots + t^n{}_h C_h$, où les C_i désignent des vecteurs arbitraires de $\mathcal{B}$; si t_1 est racine d'ordre q (disons : $t_1 = t_2 = \ldots = t_q$), les q premiers termes de x_n doivent être remplacés par

$t^n{}_1 \, C_1 + n \, t_1{}^{n-1} \, C_2 + \ldots + n(n-1) \ldots (n-q+2) \, t_1{}^{n-q+1} \, C_q$; de même

pour les autres racines multiples, s'il y en a. Ces résultats sont établis dans [3] pour le cas où $\mathcal{B}$ est le corps des complexes, mais leur démonstration s'étend facilement au cas d'un espace de Banach complexe quelconque $\mathcal{B}$.

Remarquons aussi que, *si* φ *ne s'annule pas dans le disque* $|t| \leqslant r$, *l'application* $X \to AX$ *est un automorphisme de* E_r qui conserve le type : A et B satisfont en effet aux hypothèses indiquées au début du paragraphe 2, avec une valeur $l < 1/r$ (on sait que le calcul de B revient à inverser la série $\varphi(t)$).

Nous nous proposons maintenant, pour $Y \in E_r$ $(0 < r < R)$, de résoudre dans E_r l'équation $(A + V)X = Y$, en faisant sur V les hypothèses suivantes :

— *V est une matrice* $\infty \times \infty$ *sur le corps des complexes dont tous les éléments situés sur la diagonale ou au-dessous sont nuls;*

— *VX existe pour tout* $X \in E_r$;

— *il existe un nombre* $\rho > r$ *pour lequel* $\limsup\limits_{n \to +\infty} (V_n(\rho))^{1/n} < 1$ (5).

Ceci entraîne :

qu'il existe un nombre k $(0 < k < 1)$ tel que, si $X \in E_r$ a pour type τ, VX a un type inférieur ou égal à $k\tau$;

qu'il existe un nombre $r_0 > 0$ tel que l'application $X \to (A + V)X$ soit un automorphisme de E_{r_0} conservant le type (voir la remarque qui termine le paragraphe 2). Dans E_{r_0}, $(A + V)X = Y$ se résout par les formules de Cramer. Si donc les y_i sont tous parallèles à un vecteur C de $\mathcal{B}$, il en est de même des x_i.

---

(4) Voir paragraphe 2.

(5) $V_n(\rho)$ a été défini au paragraphe 2. Si on étudiait la résolution dans l'espace E'_r des suites de type *inférieur* à r, on ferait la même hypothèse avec $\rho = r$.

On peut remarquer aussi que AX est défini *pour tout X de type inférieur à R* (rayon de convergence de la série $\varphi(t)$), et que l'application $X \to AX$ ne peut augmenter le type d'un tel vecteur. Par conséquent, pour tout $r' \leqslant r$, les applications $X \to AX$ et $X \to (A + V)\,X$ sont des *endomorphismes* de $E_{r'}$.

Dès lors, soit à résoudre dans E_r l'équation $(A + V)\,X = Y$. Si X est une solution, posons $X = X_0 + Z$, en désignant par X_0 une solution particulière de $AX = Y$. On a $AZ = -VX$, et $VX \in E_{kr}$. Donc Z est de la forme $X_1 + X_2$, où $X_2 \in E_{kr}$ et où X_1 est nul ou est une solution de $AX = 0$ appartenant à $E_r - E_{kr}$.

Par suite on cherchera X sous la forme : $X = X_0 + X_1 + X_2$, X_0 étant une solution particulière de $AX = Y$, X_1 une solution *arbitraire* de $AX = 0$ dans $E_r - E_{kr}$, et l'inconnue X_2 appartenant à E_{kr}. On est conduit à résoudre, *dans* E_{kr}, $(A + V)\,X_2 = -V\,(X_0 + X_1)$.

Si, quel que soit $\mathcal{B}$, on sait résoudre dans E_{kr} pour tout Y l'équation $(A + V)\,X = Y$, et si les solutions de l'équation homogène y dépendent de p vecteurs arbitraires de $\mathcal{B}$ (au sens vu à propos de l'équation $AX = 0$), on voit qu'on sait résoudre $(A + V)\,X = Y$ dans E_r, et que les solutions de $(A + V)\,X = 0$ y dépendent de $p + q$ vecteurs arbitraires de $\mathcal{B}$, q désignant le nombre *total* de zéros de $\varphi(t)$ contenus dans la couronne $kr < |t| \leqslant r$ (6).

En itérant le procédé, on voit que :

Théorème 2. — Sous les hypothèses indiquées, pour tout $Y \in E_r$, *l'équation* $(A + V)\,X = Y$ *admet au moins une solution* $X \in E_r$. *Les solutions dans* E_r *des équations homogènes* $AX = 0$ *et* $(A + V)\,X = 0$ *dépendent du même nombre N de vecteurs arbitraires de* $\mathcal{B}$, *N étant égal au nombre total de zéros de* $\varphi(t)$ *dans le disque* $|t| \leqslant r$.

Lorsque $\mathcal{B}$ est le corps des complexes, N est la dimension commune des noyaux des deux endomorphismes de E_r : $X \to AX$ et $X \to (A + V)\,X$.

Dans le cas général, les solutions dans E_r de l'équation $(A + V)\,X = 0$ sont de la forme $X = \Lambda_1 C_1 + \ldots \Lambda_N C_N$, les C_i désignant N vecteurs arbitraires de $\mathcal{B}$ et les Λ_i N suites *indépendantes* de nombres complexes.

5. Applications.

Exemple. — Prenons pour A la matrice associée à

$$\varphi(t) = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{4!} \;\ldots = ch\sqrt{t}.$$

$\varphi(t)$ admet une infinité de zéros simples $t_h = -\left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right)^2$, $h = 0, 1, 2\ldots$

On rencontre cette matrice lorsqu'on cherche à déterminer une fonction

(6) Il ne peut en effet y avoir réduction du nombre $p + q$, en raison des inégalités de croissance des suites (x_n) associées aux racines de l'équation $\varphi(t) = 0$.

entière $f(z) = \sum_{0}^{\infty} x_n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ dont toutes les dérivées d'ordre impair s'annulent à l'origine, et les dérivées d'ordre pair au point 1. Les résultats de Von Koch entraînent que la seule solution de croissance inférieure à $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ est $f(z) = 0$, que les solutions de croissance inférieure à $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ sont de la forme $\mu \cos\left(\frac{3\pi z}{2}\right)$, ... etc. ...

Supposons maintenant que, *imposant encore aux dérivées d'ordre impair d'être nulles à l'origine, nous imposions à chaque dérivée* $f^{(2n)}$ *de s'annuler en un point* ζ_{2n}, et posons $|\zeta_{2n} - 1| = \delta_{2n}$.

Le théorème 1 montre que si $\delta_{2n} \to 0$ avec $1/n$, il n'y a toujours pas de solution de croissance inférieure à $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, à part $f(z) = 0$. On calcule en effet l'inverse à gauche B de A en inversant la série $\varphi(t)$; puisque le zéro simple $-\frac{\pi^2}{4}$ de φ est le plus proche de l'origine, on voit facilement que les hypothèses du début du paragraphe 2 sont satisfaites avec $l = \frac{4}{\pi^2}$.

Pour appliquer le théorème 2, d'après la majoration de $V_n(\lambda)$ faite au paragraphe 3, il suffit de supposer : $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\delta_{2n}} < 1$.

Alors, $\tau > 0$ étant donné, les solutions de croissance inférieure à $(1, \tau)$ forment un espace ayant pour dimension, comme dans le cas où $\zeta_{2n} = 1$, le premier entier h tel que $\frac{\pi}{2} + h\pi \geqslant \tau$.

Extension. — Il est clair que, au paragraphe 4, l'hypothèse que A est une matrice du type de Von Koch n'est intervenue que par les propriétés suivantes : les éléments de A sont convenablement majorés; dans E_r l'équation $AX = Y$ admet au moins une solution, et l'équation homogène admet des solutions dépendant d'un nombre fini de vecteurs arbitraires de $\mathcal{B}$ et qu'on peut classer par rapidité de croissance.

On peut donc étendre le théorème 2 et, comme application, traiter l'exemple ci-dessus en faisant jouer aux dérivées d'ordre pair et impair des rôles symétriques : on ne supposera plus que les dérivées d'ordre impair s'annulent *à l'origine,* mais *en des points tendant vers l'origine.*

Prenons pour matrice A + V la matrice du problème d'Abel-Gontcharoff relatif à la suite (ζ_n), c'est-à-dire celle qui intervient lorsqu'on cherche une fonction entière $f(z) = \sum_{0}^{\infty} x_n \frac{z^n}{n!}$ satisfaisant à $f^{(n)}(\zeta_n) = y_n$, pour tout n.

Pour matrice A prenons la matrice du problème d'Abel-Gontcharoff relatif à la suite (z_n) définie par $z_n = 0$ pour n impair, 1 pour n pair. L'inverse à gauche B de A se forme facilement à partir de celle qui a été obtenue au début du paragraphe. On pose toujours $|\zeta_n - z_n| = \delta_n$.

Et les conclusions obtenues restent valables :
si $\delta_n \to 0$ *avec* $1/n$, *la seule fonction entière de croissance inférieure à* $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ *et qui vérifie* $f^{(n)}(\zeta_n) = 0$ *pour tout* n *est* $f(z) = 0$; *si* $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\delta_n} < 1$, *les solutions de croissance inférieure à* $(1, \tau)$ *forment un espace de dimension finie* h *égale au premier entier tel que* $\frac{\pi}{2} + h\pi \geqslant \tau$.

Citons pour terminer cette conséquence, parmi d'autres analogues.

Soit la fonction $g(z) = \cos \frac{\pi}{2} z + \alpha(z)$, α étant une fonction entière donnée de croissance inférieure à $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. En étudiant $\left(\frac{2}{\pi}\right)^n g^{(n)}(z)$, on voit que, si ζ_n désigne le zéro de $g^{(n)}$ le plus proche de 0 pour n impair, de 1 pour n pair, $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\delta_n} < 1$. Il en résulte que les seules fonctions entières de croissance inférieure à $\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ et qui vérifient, *pour cette suite* (ζ_n), $f^{(n)}(\zeta_n) = 0$ sont les fonctions $f = \lambda g$, λ désignant un nombre complexe arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. COMBES. Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (I). *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 4ᵉ série, t. XXI, 1957 (1959), pp. 255-265.

[2] J. COMBES. Sur certains systèmes infinis d'équations linéaires (II et III). *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 4ᵉ série, t. XXIII, 1959 (1962), pp. 85-113.

[3] H. VON KOCH. On a class of equations connected with Euler-Maclaurin's sum-formula. *Arkiv för Matematik,* Bd 15, n° 26, 1921.

[4] S. S. MACINTYRE. On the zeros of successive derivatives of integral functions. *Transactions Amer. Math. Soc.,* vol. 67, 1949, pp. 241-251.

[5] R. P. BOAS. *Entire Functions,* 1954, Academic Press, New-York.