ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

MICHEL POMMIEZ

Sur les différences divisées successives et les restes des séries de Newton généralisées

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 28 (1964), p. 101-110

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1964_4_28__101_0>

Sur les différences divisées successives et les restes des séries de Newton généralisées

par Michel POMMIEZ

Dans un précédent article [1] nous avons étudié les propriétés des fonctions (notamment celles de leurs zéros) :

$$f_{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\, z^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

associées à $f = f_{(0)}$ holomorphe dans un voisinage de l'origine.

A l'aide d'une nouvelle généralisation d'un théorème de R. P. Boas, nous obtenons des résultats analogues pour les différences divisées successives : $[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), f(z)]$, associées à une fonction holomorphe dans le disque-unité, ou à une fonction entière.

La plupart de ces résultats ont été énoncés, parfois sans démonstration, dans une récente Note aux Comptes rendus [2].

I. — Généralités.

1° **Espace** $\mathcal{H}(D)$. — D étant un domaine du plan complexe, on désignera par $\mathcal{H}(D)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes dans D, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de D. En désignant par $\Omega(R)$ le disque $|z| < R$, on notera plus simplement $\mathcal{H}_R$ l'espace $\mathcal{H}(\Omega(R))$; enfin, on écrira Ω au lieu de $\Omega(1)$ et $\mathcal{H}$ au lieu de $\mathcal{H}_1$. On sait que $\mathcal{H}(D)$ est à la fois un espace de Fréchet et un espace de Montel. On rappelle enfin que la convergence dans $\mathcal{H}(D)$ d'une suite f_n équivaut à la convergence uniforme sur tout compact de D de la suite $f_n(z)$.

2° **Différences divisées.** — Soit $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de points de D et f un élément de $\mathcal{H}(D)$; on définit la suite $(f_{(n)})_{n \geqslant 0}$ par les égalités :

$$f_{(0)} = f\,;\ f_{(n)}(z) = \frac{f_{(n-1)}(z) - f_{(n-1)}(\lambda_n)}{z - \lambda_n} \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

On écrira aussi plus explicitement :

$$f_{(n)}(z) = [f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n), f(z)] \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots.$$

Remarques. — a) Dans le cas où tous les λ_n sont nuls et où $o \in D$, on retrouve la suite :

$$f_{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} z^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

déjà étudiée dans l'article [1].

b) Si f est développable en série de Newton :

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \lambda_1) \ldots . (z - \lambda_k)$$

on voit que $f_{(n)}(z)$ *est le quotient par* $(z-\lambda_1) \ldots . (z-\lambda_n)$ *du reste de rang* n-1 *de cette série.*

c) Soit $a \in D$. On vérifie aisément que l'application L_a qui fait correspondre à f la fonction : $z \to \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$,

est un *opérateur continu de* $\mathcal{H}(D)$. Si f est une fonction entière, L_a conserve son ordre et son type.

3° Expression intégrale de $f_{(n)}(z)$.

Soit γ une courbe de Jordan fermée, rectifiable, contenue dans D, et dont le domaine intérieur Δ est lui-même inclus dans D; supposons de plus que $z, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ appartiennent à Δ (γ peut bien entendu dépendre de n). On déduit alors de la formule de Cauchy l'expression suivante de $f_{(n)}(z)$:

$$f_{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z)(v - \lambda_1) \ldots (u - \lambda_n)} du.$$

4° Séries de Newton : $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\lambda_1) \ldots . (z-\lambda_n)$ où $\lambda_n \to o$.

Rappelons le corollaire suivant d'un théorème connu (voir par exemple [3] pp. 168-170), dont la démonstration directe est d'ailleurs très simple :

Supposons que $\lambda_n \to 0$, *avec* $\lambda_n \in \Omega(R)$ *pour tout* n. *Alors, la suite :*

$$\{1, (z-\lambda_1), \ldots ., (z-\lambda_1) \ldots . (z-\lambda_n), \ldots . \}$$

est une base de $\mathcal{H}_R$ *par rapport à laquelle tout élément* f *de* $\mathcal{H}_R$ *a pour coordonnées les nombres* $f_{(n)}(\lambda_{n+1})$.

De plus, si f *possède au moins un point singulier de module R, on a :*

$$\limsup \left| f_{(n)}(\lambda_{n+1}) \right|^{1/n} = R^{-1}.$$

II. — Bases voisines de $\mathcal{H}_R$.

Nous allons d'abord établir un lemme énoncé dans [2] avec des hypothèses plus restrictives :

1° LEMME.

Soit $(g_n)_{n\geqslant o}$ *une base de* $\mathcal{H}_R$ *possédant les propriétés suivantes :*

(P_1) *les coordonnées* a_n *de tout élément* f *de* $\mathcal{H}_R$ *vérifient l'inégalité :* $\limsup |a_n|^{1/n} \leqslant 1/R$;

(P_2) *pour tout* $r < R$, *on a :* $\limsup\limits_{n \to +\infty} \left[\operatorname{Max}\limits_{|z| \leqslant r} |g_n(z)|\right]^{1/n} < R$

Alors l'application $\mathfrak{L}$ *:*

$$f \to F = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(o)}{n!} g_n$$

est un automorphisme algébrique et topologique de $\mathcal{H}_R$.

En effet, (P_2) entraîne d'abord que $\mathfrak{L}$ est bien définie sur $\mathcal{H}_R$. On vérifie ensuite sans difficultés que $\mathfrak{L}$ est un automorphisme algébrique de $\mathcal{H}_R$. Pour établir que $\mathfrak{L}$ est continue, il suffit de prouver que $f_p \to o$ entraîne $\mathfrak{L}(f_p) \to o$, et pour cela de majorer $\mathfrak{L}(f_p)(z)$ en utilisant (P_2) et les inégalités de CAUCHY pour les coefficients du développement en série entière de $f_p(z)$. $\mathcal{H}_R$ étant un espace vectoriel topologique métrisable et complet, un théorème de BANACH-SCHAUDER (voir par exemple [4], p. 57) permet d'affirmer que $\mathfrak{L}^{-1}$ est elle-même continue.

2° THÉORÈME. — *Soit* $G_n = \sum\limits_{k=o}^{\infty} \alpha_k(n)\, g_{n+k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *où les* g_n *satisfont aux hypothèses du lemme précédent et où* $\alpha_0(n) = 1$ *pour tout* n. *Supposons que* $H_n(R) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(n)|\, R^k < +\infty$, *pour tout* n. *Alors, si* $\limsup H_n(R) \leqslant 1$, *la suite* $(G_n)_{n\geqslant o}$ *est une base de* $\mathcal{H}_R$ *et, relativement à cette base, les coordonnées* b_n *de tout élément* f *de* $\mathcal{H}_R$ *vérifient l'inégalité :* $\limsup |b_n|^{1/n} \leqslant R^{-1}$.

Démonstration. — a) *Cas particulier où* $g_n(z) = z^n$ *:* Soit $o < R' < R$; on a :

$$H_n(R') = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(n)|\; R^k \left(\frac{R'}{R}\right)^k \leqslant \left(\frac{R'}{R}\right) H_n(R)\,.$$

D'où :

$$\limsup_{n \to +\infty} H_n(R') \leqslant \frac{R'}{R} < 1\,.$$

On a donc $H_n(R') \leqslant 1$, à partir d'un certain rang; on en déduit, à l'aide d'une généralisation d'un théorème de Boas (voir [1], p. 142) que $(G_n)_{n\geqslant o}$ est une base de $\mathcal{H}_R$ et que les coordonnées b_n (visiblement indépendantes de $R' < R$) d'un élément quelconque de $\mathcal{H}_R$ vérifient l'inégalité : $\limsup |b_n|^{1/n} \leqslant 1/R'$. Il suffit alors de faire tendre R' vers R pour achever la démonstration de ce cas particulier.

b) *Cas général :*

Posons $\gamma_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(n)\, z^{n+k}$; le résultat précédent montre que la suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathcal{H}_R$. On en déduit, en remarquant que $G_n = \mathcal{L}(\gamma_n)$, et en utilisant le lemme précédent, que la suite $(G_n)_{n\geq 0}$ est elle aussi une base de $\mathcal{H}_R$. Enfin, comme les coordonnées b_n d'un élément f de $\mathcal{H}_R$ dans la base (G_n) ne sont autres que les coordonnées de $\mathcal{L}^{-1}(f)$ par rapport à la base (γ_n) on a bien l'inégalité : $\limsup |b_n|^{1/n} \leqslant R^{-1}$.

Remarque. — Le contre-exemple $G_n(z) = z^n(1 - Az)$, où $A > 1$, montre que dans l'hypothèse $\limsup H_n(R) \leqslant 1$, *on ne peut remplacer 1 par un nombre plus grand.*

III. — Différences divisées $[f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n), f(z)]$, où $\lambda_n \to o$.

1° Lemme. — *Posons :*

$$g_0(z) = 1\,, \quad g_n(z) = \frac{z^n}{(1-z\lambda_1)\dots(1-z\lambda_n)} \qquad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

où $|\lambda_n| < R^{-1}$ *pour tout* n $\geqslant 1$ *et où* $\lambda_n \to$ o.

Alors :

a) *la suite* $(g_n)_{n\geq 0}$ *est une base de* $\mathcal{H}_R$;

b) *les coordonnées* a_n *de tout élément* f *de* $\mathcal{H}_R$ *vérifient l'inégalité :* $\limsup |a_n|^{1/n} \leqslant R^{-1}$.

Soit f un élément quelconque de $\mathcal{H}_R$ et z fixé tel que $|z| < R$; on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=\rho} v^{-1} f(v^{-1}) \frac{dv}{1 - vz}\,, \quad \text{où } R^{-1} < \rho < |z|^{-1}\,.$$

D'après I. 4°, la suite de polynômes $(P_n(v))_{n\geq 0}$:

$$\{1, v, v(v-\lambda_1), \dots, v(v-\lambda_1)\dots(v-\lambda_{n-1}), \dots\}$$

est une base de $\mathcal{H}_{|z|^{-1}}$; comme l'application : $v \to \frac{1}{1 - vz}$ appartient à ce dernier espace, on en déduit :

$$\frac{1}{1 - vz} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{v(v-\lambda_1)\dots(v-\lambda_{n-1})}{(1 - z\lambda_1)\dots(1 - z\lambda_n)}\,,$$

où la série est uniformément convergente sur tout compact inclus dans $\Omega(|z|^{-1})$.

En substituant à $\frac{1}{1 - vz}$ le développement en série précédent dans l'expression intégrale de $f(z)$, on obtient :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z)\,. \quad \text{avec :} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=\rho} v^{-1} f(v^{-1}) P_n(v)\, dv\,.$$

On déduit de la dernière égalité l'inégalité : lim sup $|a_n|^{1/n} \leqslant R^{-1}$, qui permet de vérifier que la série précédente est uniformément convergente sur tout compact inclus dans $\Omega(R)$. Enfin, pour établir l'unicité du développement de f en série de fonctions g_n, il suffit de vérifier que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n = 0$ entraîne $a_n = 0$ pour tout n, ce qui est immédiat.

2° Lemme. — *Soit* $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ *et* $(z_n)_{n \geqslant 1}$ *deux suites de points de* Ω *telles que* $\lim \lambda_n = 0$ *et* $\limsup |z_n| = r < a$, *où* a *désigne la racine positive de l'équation* $4x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ $(0{,}536 < a < 0{,}537)$.
Alors, il existe $R' > 1$ *tel que la suite*

$$G_n = \frac{g_n}{1 - v z_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

soit une base de $\mathcal{H}_R$, *pour tout* $R \in \,]\, 1, R' [$.

Soit R un nombre quelconque tel que : $1 < R < R_0 = \inf(\inf|z_n|^{-1}, \inf|\lambda_n|^{-1})$. La fonction $\dfrac{1}{1 - v z_n}$ appartenant à $\mathcal{H}_R$, on a, d'après le lemme précédent, où la suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ est remplacée par la suite $(\lambda_{n+k})_{k \geqslant 1}$:

$$\frac{1}{1 - v z_n} = 1 + v \frac{z_n}{1 - v \lambda_{n+1}} + \sum_{k=2}^{\infty} v^k \frac{z_n (z_n - \lambda_{n+1}) \ldots (z_n - \lambda_{n+k-1})}{(1 - v \lambda_{n+1}) \ldots (1 - v \lambda_{n+k})} .$$

D'où, en multipliant les deux membres par $g_n(v)$, l'égalité suivante, valable dans $\mathcal{H}_R$:

$$G_n = g_n + z_n g_{n+1} + \sum_{k=2}^{\infty} z_n (z_n - \lambda_{n+1}) \ldots (z_n - \lambda_{n+k-1}) g_{n+k} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

Posons maintenant :

$$G_n^* = G_n - (z_n - \lambda_{n+1}) G_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et développons G_n^* en série de fonctions g_{n+k} :

$$G_n^* = g_n + \lambda_{n+1} g_{n+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (z_n - \lambda_{n+1}) (A_k(z_n) - A_k(z_{n+1})) g_{n+k} \quad ,$$

où l'on a posé :

$$A_2(z) = z \text{ et } A_k(z) = z(z - \lambda_{n+2}) \ldots (z - \lambda_{n+k-1}) \text{ pour } k \geqslant 3.$$

La suite $H_n(R)$ associée à la suite (G_n^*) vérifie :

$$H_n(R) = |\lambda_{n+1}| R + |z_n - \lambda_{n+1}| \sum_{k=2}^{\infty} |A_k(z_n) - A_k(z_{n+1})| R^k .$$

Or, un calcul simple conduit à l'inégalité :

$$|A_k(z_n)-A_k(z_{n+1})| \leqslant |z_n^{k-1}-z_{n+1}^{k-1}| + 2\,r_n\left[(r_n+\varepsilon_n)^{k-2}-r_n^{k-2}\right] \qquad (k=2,3,\ldots$$

où : $r_n = \operatorname*{Sup}_{k \geqslant n} |z_k|$ et $\varepsilon_n = \operatorname*{Max}_{k \geqslant n} |\lambda_k|$.

Il en résulte l'inégalité :

$$\limsup H_n(R) \leqslant r \limsup \sum_{k=2}^{\infty} |z_n^{k-1}-z_{n+1}^{k-1}|\, R^k$$

En utilisant un résultat connu (voir [1], p. 149), on voit que cette dernière expression est $\leqslant 1$ si $R < \dfrac{a}{r}$. Le théorème II. 2°, prouve alors que la suite (G_n^*) est une base de $\mathcal{H}_R$ quel que soit R strictement compris entre 1 et $R' = \text{Inf}\left(R_0, \dfrac{a}{r}\right)$; de plus, les coordonnées b_n^* d'un élément f de $\mathcal{H}_R$ vérifient l'inégalité : $\limsup |b_n^*|^{1/n} \leqslant R^{-1}$. On en déduit aisément que la suite (G_n) possède les mêmes propriétés.

Remarque : si l'on avait appliqué directement le théorème II. 2° à la suite (G_n), on aurait obtenu un résultat plus faible, avec 0,5 au lieu de a.

3° Théorème. — *Si les suites* (λ_n) *et* (z_n) *satisfont aux mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, alors pour tout élément* f *de* $\mathcal{H}$, *on a :*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), f(z_n)]\; C_n(z), \text{ pour } |z| < 1,$$ *où* C_n *est un polynôme de degré* n.

Soit f un élément quelconque de $\mathcal{H}$ et z fixé dans Ω. Choisissons un nombre R satisfaisant aux inégalités : $1 < R < |z|^{-1}$ et $R < R'$. Comme la fonction $\dfrac{1}{1-vz}$ appartient à $\mathcal{H}_R$, on a, d'après le lemme précédent :

$$\frac{1}{1-vz} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z)\, G_n(v)$$, uniformément sur tout compact inclus dans $\Omega(R)$

Soit alors $\rho \in\,]1, R[$; on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=\rho} \frac{v^{-1} f(v^{-1})}{1-vz}\, dv$$

Il suffit de remplacer $\dfrac{1}{1-vz}$ par son développement en série précédent pour obtenir le développement de $f(z)$ en série de $C_n(z)$. En faisant $f(z) = z^n$, on obtient une relation de récurrence qui prouve que C_n est un polynôme de degré n et permet de calculer de proche en proche les termes de la suite (C_n).

On déduit par exemple du théorème précédent le corollaire :

Si les suites (λ_n) *et* (z_n) *satisfont aux hypothèses du lemme précédent, les conditions :*

$f \in \mathcal{H}$ *et* $[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), f(z_n)] = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *entraînent* $f(z) \equiv 0$.

On en déduit encore que :

Si f $\in \mathcal{H}$ *et n'est pas un polynôme, alors il existe une infinité de différences divisées* $[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), f(z)]$ *qui ne s'annulent pas dans le disque* $|z| \leqslant 0{,}536$.

4° La constante $C_{(\lambda_n)}$.

Pour chaque suite (λ_n) convergeant vers zéro, désignons par $C_{(\lambda_n)}$ *la borne supérieure de l'ensemble des nombres* a' *par lesquels on peut remplacer a dans le corollaire précédent.* On a :

$$0{,}536 < a \leqslant C_{(\lambda_n)} \leqslant 1.$$

Dans le cas où $\lambda_n = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *on retrouve la constante* $C = C_{(0)}$ relative aux restes successifs des séries entières, et l'inégalité : $C \geqslant a$. Rappelons que pour cette dernière constante, on connaît aussi l'inégalité :

$$C < 0{,}5617 \qquad \text{(voir [1], p. 109).}$$

Il est possible que $C_{(\lambda_n)}$ soit indépendante de la suite λ_n, au moins si cette suite converge assez vite vers zéro.

IV. — Différences divisées associées a une fonction entière.

1° Existence des zéros.

Soif f une *fonction entière quelconque* et (λ_n) une *suite quelconque de nombres complexes.* Posons encore :

$$f_{(n)}(z) = [f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), f(z)].$$

On a d'abord le résultat suivant, qui généralise une propriété obtenue antérieurement dans le cas ou $\lambda_n = 0$ pour tout n (voir [1], p. 121).

Il existe au plus une $f_{(n)}$ *dépourvue de zéros.*

En effet, s'il existait $f_{(n)}$ et $f_{(n+p)}$ (avec $p > 0$) dépourvues toutes deux de zéros, la fonction méromorphe :

$$F(z) = \frac{f_{(n)}(z)}{(z-\lambda_{n+1})\ldots(z-\lambda_{n+p})\, f_{(n+p)}(z)}$$

aurait trois valeurs exceptionnelles : 0, 1, ∞.

Plus précisément :

Il existe au plus un nombre fini de $f_{(n)}$ *ne possédant qu'un nombre fini de zéros; leurs rangs sont alors consécutifs.*

Écartons le cas évident ou f est un polynôme; soit $f_{(n)}$ la première différence divisée ne possédant qu'un nombre fini de zéros, et soit p un entier strictement positif quelconque; on a :

$$f_{(n)}(z) = A_p(z) + (z - \lambda_{n+1}) \ldots (z - \lambda_{n+p}) f_{(n+p)}(z), \text{ où } A_p \text{ est un polynôme.}$$

Supposons que $f_{(n+p)}$ n'ait qu'un nombre fini de zéros; alors $A_p(z)$ est $\equiv 0$, sinon la fonction F définie plus haut aurait encore les trois valeurs exceptionnelles 0, 1, ∞. Il en résulte que toutes les $f_{(k)}$ de rang compris entre n et $n+p$ n'ont, elles aussi, qu'un nombre fini de zéros.

Or, à partir d'un certain rang, on a $A_p(z) \not\equiv 0$ (sinon $f_{(n)}$ aurait une infinité de zéros, à savoir les nombres λ_{n+p} pour $p \geqslant 1$) et les $f_{(n+p)}$ correspondantes ont toutes une infinité de zéros.

Nous allons maintenant étudier de façon plus précise le cas où $\lambda_n = n - 1$, c'est-à-dire les restes successifs de la série de Newton proprement dite.

2° THÉORÈME. — *Soit* f *une fonction entière de type exponentiel fini dont l'indicatrice de croissance* h(θ) *vérifie l'inégalité :*

$$h(\theta) < \cos\theta \operatorname{Log}(2\cos\theta) + \theta \sin\theta \quad pour \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

(ce qui est réalisé en particulier si f *est de type* $\tau < \log 2$*).*

Soit $(z_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite de points telle que :*

$$\limsup \left| \frac{z_n - n}{n} \right| < \frac{1}{2} .$$

Alors, on a, pour tout z *:*

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [f(0), f(1), \ldots, f(n-1), f(z_n)]\, d_n(z)$$

où d_n *est un polynôme de degré* n.

Associons à $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sa transformée de Borel : $F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^{-n-1}$.

Soit γ une courbe de Jordan fermée rectifiable contenant dans son domaine intérieur l'enveloppe convexe et compacte S des singularités de F. On a, pour tout z :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(w)\, e^{zw}\, dw .$$

Posons : $L_n(f) = [f(0), f(1), \ldots, f(n-1), f(z_n)]$ pour $n \geqslant 1$ *et* $L_0(f) = f(0)$; soit φ_w l'application : $z \to e^{zw}$; on a :

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(w)\, L_n(\varphi_w)\, dw$$

Or, posant $W = e^w - 1$, on a :

$$e^{zw} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!} W^n \quad , \quad \text{pour } |W| < 1$$

Il en résulte l'égalité :

$$n!\, L_n(\varphi_w) = W^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_n - n)\dots(z_n - n - k + 1)}{(n+1)\dots(n+k)} W^k$$

Posons $G_n(W) = n!\, L_n(\varphi_w)$; la suite $H_n(R)$ associée à la suite (G_n) vérifie :

$$H_n(R) = \sum_{k=1}^{\infty} R^k \left| \frac{(z_n - n)\dots(z_n - n - k + 1)}{(n+1)\dots(n+k)} \right| \qquad (R < 1)$$

L'hypothèse faite sur les z_n entraîne l'inégalité :

$$\limsup H_n(R) < 1 \qquad \text{pour tout } R < 1.$$

Le théorème II, 2° (ou plus précisément le cas particulier a) de ce théorème) montre que la suite (G_n) est une base de $\mathcal{H}$. Il en résulte que la suite $G_n(e^w - 1)$ est une base de $\mathcal{H}(D)$, où $D = \{w : |e^w - 1| < 1\}$. On en déduit l'existence d'une suite $(d_n(z))_{n \geq 0}$ telle que :

$$e^{zw} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z)\, L_n(\varphi_w) \quad .$$

où la convergence est uniforme par rapport à w, sur tout compact inclus dans D.

Or l'hypothèse faite sur $h(\theta)$ entraîne que $S \subset D$, ce qui nous permet de choisir le contour d'intégration γ dans D. Substituant alors à e^{zw} son développement en série précédent dans l'expression intégrale de $f(z)$ et intégrant terme à terme, on obtient le développement de $f(z)$ en série de $d_n(z)$, avec pour coefficients les nombres $L_n(f)$. On voit ici encore, en prenant $f(z) = z^n$, que d_n est bien un polynôme de degré n.

Corollaire. — *Avec les hypothèses précédentes, il est impossible que* $[f(0), f(1), \dots, f(n-1), f(z_n)] = 0$ *pour tout* n, *sauf si* f(z) *est* $\equiv 0$.

Remarques.

a) Cette propriété précise un résultat bien connu correspondant au cas où $z_n = n$ (voir [5], p. 171).

b) On peut encore énoncer, toujours avec les hypothèses du théorème précédent :

Si f *n'est pas un polynôme, il existe une infinité de différences divisées* $[f(0), f(1), \dots, f(n-1), f(z)]$ *qui ne s'annulent pas dans le disque* $|z - n| < \frac{n}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. POMMIEZ, Sur les restes successifs des séries de Taylor. *Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse,* 4e série, tome XXIV, 1960 (1963), pp. 77-165.

[2] M. POMMIEZ, Sur la suite des différences divisées successives relatives à une fonction analytique. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome 260 (mai 1965), pp. 5161-5164.

[3] A. O. GUELFOND, Calcul des différences finies. *Dunod,* 1963.

[4] DUNFORD et SCHWARTZ, Linear Operators (part I). *Interscience Publishers,* New-York, 1957.

[5] R. P. BOAS, Entire functions. *Academic Press,* 1954.