Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Jean Combes

Sur un théorème de H. von Koch

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4e série, tome 26 (1962), p. 99-103
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1962_4_26__99_0>

SUR UN THÉORÈME DE H. VON KOCH

par Jean COMBES

---

1. — Le système (S).

Soit (S) le système d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues :

$$(S) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_{n+p} = y_p \qquad (p = 0, 1, 2 \dots)$$

dans lequel les coefficients c_n et les seconds membres y_n sont des nombres complexes donnés ($c_0 \neq 0$), et les inconnues x_n sont aussi des nombres complexes.

Avec des hypothèses convenables sur les données, et en se bornant aux solutions de croissance pas trop rapide, HELGE VON KOCH [1] a résolu le système (S) à l'aide d'une interprétation ingénieuse qui ramène à un problème de théorie des fonctions.

Rappelons-en le principe, en examinant d'abord le cas du système *homogène* ($y_p = 0$ pour tout p).

On suppose que la série $f(t) = \sum_{0}^{\infty} c_n t^n$ a un rayon de convergence A *non nul*, fini ou non, et on cherche les *solutions satisfaisant à la condition*

$$(C_r) \qquad \limsup_{n \to +\infty} |x_n|^{1/n} \leqslant r \; ,$$

r étant un nombre quelconque inférieur à A. La série $\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x_n}{t^{n+1}}$ définit alors une fonction holomorphe pour $|t| > r$, et le système (S) exprime que, dans la couronne (r, A) [2], le produit $f(t)\,\varphi(t)$ est égal à une fonction $g(t)$, holomorphe pour $|t| < A$.

Soit $r' \in \,]r, A[$, tel que f ne s'annule pas dans la couronne (r, r'). Si $t_1, t_2, \dots t_k$ désignent les zéros, que nous supposons d'abord simples, de f dans le disque $|t| \leqslant r$, g/f a dans la couronne (r, r') une expression de la forme $\sum_{i=1}^{k} \frac{K_i}{t - t_i} + \psi(t)$, les K_i étant certaines constantes et ψ une fonction

---

(1) HELGE VON KOCH. On a class of equations connected with Euler-Maclaurin's sum-formula. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band 15, n° 26 (1921).

(2) Nous désignons par « couronne (r, A) » le domaine du plan complexe (t) défini par $r < |t| < A$.

holomorphe pour $|t| < r'$. Mais ψ, étant égale à $\varphi(t) - \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i}{t-t_i}$ pour $|t| > r$, est holomorphe dans tout le plan complexe, point à l'infini compris, et nulle à l'infini, donc identiquement nulle. Par suite

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i}{t-t_i} \quad \text{et}$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} K_i\, t_i^n \tag{1}$$

On trouve donc pour le système homogène (S), *dans les conditions indiquées, uniquement les solutions* (1), évidentes a priori, formées avec les zéros de f. Si en particulier f ne s'annule pas dans le disque $|t| \leqslant r$, la seule solution satisfaisante à la condition (C_r) est la solution banale : $x_n = 0$ pour tout n.

On traiterait facilement le cas où f admet dans le disque $|t| \leqslant r$ des zéros multiples, et le cas du système non homogène. Pour cette étude le lecteur pourra se reporter à l'article cité de H. von Koch, où il trouvera des applications aux fonctions entières périodiques et à des extensions de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

2. — Le système (S′). Étude du système homogène.

Le but du présent article est d'utiliser la même interprétation pour étudier un système (S′), analogue à (S), mais associé cette fois à une fonction $f(t)$ donnée par un développement de Laurent, au lieu d'un développement de Taylor.

(S′) est le système : $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n\, x_{n+p} = y_p$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les c_n, x_n, y_n sont toujours des nombres complexes; nous supposons qu' *une infinité de coefficients c_n d'indice négatif sont différents de* 0 (sinon on serait ramené au problème examiné au paragraphe 1 : si, en effet, $c_q \neq 0$ et $c_n = 0$ pour $n < q$, les équations de (S′) correspondant à $p \geqslant 0$ forment un système du type (S), après quoi x_{q-1}, x_{q-2} ... sont donnés par un système récurrent).

Nous supposons dans toute la suite que la fonction $f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, t^n$ est *holomorphe dans la couronne* (a, A), a étant un nombre donné $\geqslant 0$, et A un nombre donné fini ou non, supérieur à a. Nous examinerons dans ce paragraphe le cas du système *homogène,* en nous bornant aux *solutions qui satisfont à la condition*

$$(C_{r,R}) \qquad \limsup_{n \to +\infty} |x_n|^{1/n} \leqslant R \ , \qquad \limsup_{n \to +\infty} |x_{-n}|^{1/n} \leqslant 1/r$$

en désignant par r et R deux nombres de l'intervalle $]a, A[$. Pour des x_n satisfaisant à $(C_{r,R})$, toutes les séries écrites comme premiers membres des équations de (S′) sont absolument convergentes.

Si $R < r$, la série $\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_n}{t^{n+1}}$ définit dans la couronne (R, r) une fonction holomorphe, et (S′) exprime que le produit $f(t)\ \varphi(t)$ est identiquement nul. Le système (S′) n'admet alors que la *solution banale :* $x_n = 0$ pour tout n.

Supposons maintenant $r \leqslant R$. Il nous faut partager la série $\varphi(t)$ en deux parties : $\varphi_1(t) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{x_n}{t^{n+1}}$ est holomorphe pour $|t| > R$, $\varphi_2(t) = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{x_n}{t^{n+1}}$ pour $|t| < r$. Écrivant alors l'équation de (S′) qui correspond à l'entier p sous la forme

$$\sum_{n=-p}^{+\infty} c_n\, x_{n+p} = - \sum_{-\infty}^{-p-1} c_n\, x_{n+p} = A_p \quad ,$$

on voit que, si (S′) est vérifié, on a :

pour $R < |t| < A$: $\qquad f(t)\ \varphi_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_p/t^{p+1} \quad ,$

pour $a < |t| < r$: $\qquad f(t)\ \varphi_2(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_p/t^{p+1} \quad .$

La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} A_p/t^{p+1}$ converge donc dans la couronne (a, A) et y a pour somme une fonction holomorphe $g(t)$.

Si $t_1,\ t_2\ \ldots\ t_k$ sont les zéros (que nous supposons d'abord simples) de f dont le module $\in [r, R]$, et si ε positif est assez petit pour que f n'ait pas d'autre zéro dans la couronne $(r - \varepsilon,\ R + \varepsilon)$, contenue ainsi que sa frontière dans la couronne (a, A), on a, dans la couronne $(r - \varepsilon,\ R + \varepsilon)$:

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{K_i}{t - t_i} + \psi(t) \quad ,$$

les K_i étant certaines constantes, et ψ une fonction holomorphe dans la couronne $(r - \varepsilon,\ R + \varepsilon)$.

Or, dans la couronne $(\mathrm{R}, \mathrm{R}+\varepsilon)$, $g/f = \varphi_1$. Par suite $\psi(t)$ est holomorphe pour $|t| > \mathrm{R}$, et tend vers 0 si t tend vers l'infini. De même, puisque $g/f = \varphi_2$ dans la couronne $(r - \varepsilon, r)$, ψ est holomorphe pour $|t| < r$. En fin de compte, $\psi(t)$ est identique à 0, et les expressions de φ_1 et φ_2 montrent que, pour tout entier n positif, négatif ou nul, on a encore la formule

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{K}_i \, t^n_i \quad . \tag{1}$$

La solution (x_n) *est donc une combinaison linéaire des solutions particulières évidentes* (t^n_1), ..., (t^n_k). *Inversement, quelles que soient les constantes* K_i, *la formule* (1) *définit une solution du système homogène* (S′) *satisfaisant à la condition* $(\mathrm{C}_{r,\mathrm{R}})$.

Si f n'a pas de zéro dont le module appartienne à $[r, \mathrm{R}]$, on ne trouve que la solution banale. Enfin on traite sans difficulté le cas des zéros *multiples :* si t_1 par exemple est zéro d'ordre q, il lui correspond les q *solutions particulières* $x_n = t^n_1$, $x_n = n\, t_1^{n-1}$, ...,

$$x_n = n\,(n-1)\ \ldots\ (n-q+1)\ t_1^{\,n-q},$$

qui proviennent des termes en $\dfrac{1}{t-t_1}$, $\dfrac{1}{(t-t_1)^2}$, ... $\dfrac{1}{(t-t_1)^q}$ dans la partie principale de g/f au point t_1. Et on voit que *les solutions du système* (S′) *homogène qui satisfont à* $(\mathrm{C}_{r,\mathrm{R}})$ *sont les combinaisons linéaires des différentes solutions particulières associées aux zéros de* f *dont le module appartient à* $[r, \mathrm{R}]$.

Il est bien connu que ces solutions particulières sont *linéairement indépendantes*. Supposons que les zéros t_1, ... t_k soient respectivement d'ordre q_1, ... q_k et posons $q_1 + \ldots + q_k = \mathrm{N}$. Le déterminant d'ordre N dont les lignes sont formées par les valeurs de x_0, x_1, ... $x_{\mathrm{N}-1}$ pour chacune des N solutions particulières n'est pas nul : dans le cas des zéros simples c'est un déterminant de Vandermonde, dans le cas des zéros multiples c'en est une forme dégénérée; mais c'est toujours le déterminant du système cramérien que l'on a à résoudre lorsqu'on cherche un polynôme de degré N qui admette pour zéros les t_i à l'ordre q_i, et dont le coefficient du terme le plus élevé ait une valeur donnée.

Si on appelle E l'espace vectoriel sur le corps des complexes constitué par les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec les opérations usuelles, et si on appelle $\mathrm{E}_{r,\mathrm{R}}$ le sous-espace de E formé par les solutions (x_n) du système homogène (S′) qui satisfont à $(\mathrm{C}_{r,\mathrm{R}})$, r et R étant deux nombres de l'intervalle $]a, \mathrm{A}[$, $\mathrm{E}_{r,\mathrm{R}}$ *a une dimension finie* N *égale au nombre total* (3) *de zéros de* f *dont le module est* $\geqslant$ r *et* $\leqslant$ R.

---

(3) Chaque zéro est compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

3. — Étude du système (S′) avec seconds membres.

Soit une suite (x_n) satisfaisant à $(C_{r,R})$, r et R étant deux nombres de l'intervalle $]a, A[$; considérons les y_p correspondants, définis par les équations de (S′).

Si $R < r$, on voit, $\varphi(t)$ ayant la même signification qu'au paragraphe précédent, que y_p est le coefficient de $1/t^{p+1}$ dans le développement de Laurent de la fonction $f(t)\,\varphi(t)$, qui est holomorphe dans la couronne (R, r). La suite (y_p) satisfait donc à la condition $(C_{r,R})$.

Si $R \geqslant r$, y_p est la somme des coefficients de $1/t^{p+1}$ dans les développements des fonctions $f(t)\,\varphi_1(t)$ et $f(t)\,\varphi_2(t)$, holomorphes respectivement dans les couronnes (R, A) et (a, r). La suite (y_p) satisfait donc encore à $(C_{r,R})$.

C'est pourquoi, dans le problème inverse de la résolution de (S′) lorsque les y_p sont donnés, *nous ferons l'hypothèse que la suite* (y_p) *satisfait à la condition* $(C_{r,R})$, r *et* R *appartenant toujours à* $]a, A[$.

L'étude est immédiate lorsque $R < r$. Soit, dans ce cas, $h(t)$ la fonction $\sum_{-\infty}^{+\infty} y_p/t^{p+1}$. h/f est méromorphe dans la couronne (R, r). Si la couronne (R', r') est contenue dans la couronne (R, r) et ne contient pas de pôle de h/f, donc, en particulier, si elle ne contient pas de zéro de f, le développement de Laurent $\varphi(t)$ de h/f dans la couronne (R', r') fournit l'unique solution de (S′) qui satisfasse à $(C_{r',R'})$. On voit aussi qu'il n'existe de solution satisfaisant à $(C_{r,R})$ que si h/f n'a pas de pôle dans la couronne (R, r)

Lorsque $R \geqslant r$, on se ramène au cas précédent par décomposition, en considérant successivement les deux fonctions $h_1(t) = \sum_{0}^{\infty} y_p/t^{p+1}$, holomorphe pour $|t| > R$, et $\sum_{-\infty}^{-1} y_p/t^{p+1}$, holomorphe pour $|t| < r$ (on remplace par 0 d'abord les y_p d'indice < 0, puis ceux d'indice $\geqslant 0$). A la première on fera correspondre une solution qui satisfasse à $(C_{R',R})$, R′ étant pris supérieur à R et tel que h_1/f soit holomorphe dans la couronne (R, R'); à la deuxième on fera correspondre de même une solution qui satisfasse à $(C_{r,r'})$ avec $r' < r$. Par addition on aura une solution du système initial satisfaisant à $(C_{r,R})$. On sait trouver toutes les autres d'après le paragraphe 2

Notons la différence entre les deux cas. Etant donnée une suite $(y_p)_{p\varepsilon Z}$ qui satisfasse à la condition $(C_{r,R})$, le système (S′) admet toujours, lorsque $R \geqslant r$, au moins une solution (x_n) qui satisfasse à la même condition; il n'en est pas de même lorsque $R < r$: dans ce cas, si f admet des zéros dans la couronne (R, r), il n'existe en général que des solutions satisfaisant à des conditions plus larges $(C_{r',R'})$, avec $R' > R$ et $r' < r$.